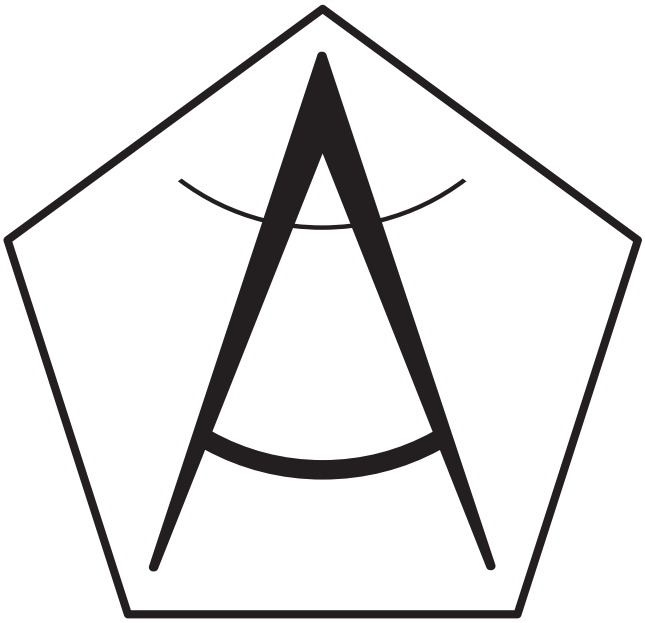
Helsingin matematiikkalukio



PITKÄN MATEMATIIKAN LISÄSIVUT 2
ALGEBRA

Ville Tilvis ja Esa V. Vesalainen

VERSIO 1.0

syyskuu 2019

Lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -käyttöluvalla.

Sisältö

Johdanto **3**

1 Hyödyllisiä kaavoja **4**

Muistikaavat 4

Muuta hyödyllistä 5

Harjoitustehtäviä 6

Pascalin kolmio ja $(a+b)^n$ 7

Harjoitustehtäviä 11

2 Kompleksiluvut **12**

Kompleksilukujen rakenne 13

Moduli ja liittoluku 15

Jakolasku 16

Kompleksinen neliöjuuri 16

Toisen asteen yhtälön ratkaisu 18

Kompleksiset polynomit 19

Harjoitustehtäviä 20

3 Algebralliset epäyhtälöt **23**

Lausekkeiden arvioinnista 24

Harjoitustehtäviä 26

Reaalilukujen neliöt ovat aina epänegatiivisia 27

Harjoitustehtäviä 28

4 Keskiarvoista ja niiden suuruusjärjestyksestä **29**

Kahden muuttujan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö 34

Harjoitustehtäviä 35

5 Keskiarvojen yleistykset useammalle luvulle **37**

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö kolmelle ja neljälle muuttujalle 37

Harjoitustehtäviä 40

6 Yleinen aritmeettis-geometrinen epäyhtälö **42**

Harjoitustehtäviä 42

Yleisen aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistus 43

Ensimmäiset vihjeet **46**

Toiset vihjeet **59**

Johdanto

Tämä on toinen osa pitkän matematiikan lisäsivuihin. Ensimmäisessä osassa perehdyttiin täsmälliseen päättelyyn eri muodoissaan ja harjoiteltiin vaikeiden ongelmien ratkaisemista.

Pitkän matematiikan lisäsivut 2 keskittyy algebraan, erityisesti lausekkeiden manipulointiin, kompleksilukuihin, yhtälöihin ja epäyhtälöihin. Näihin liittyvien teknisten taitojen lisäksi tärkeässä asemassa on edelleen täsmällinen päättely.

Osa tehtävistä on helppoja, mutta osa on vaikeita tai todella vaikeita. Ei ole tavatonta, että tehtävä ei ratkea tunnin päättäväisen yrittämisen jälkeenkään, mutta ratkeaa seuraavan tunnin aikana. Osa vie varmasti pidempään. Kaikkiin tehtäviin on vihje ja useimpiin vielä toinen vihje. Vihjeet on tarkoitettu käytettäväksi: yritä tehtävää ensin ilman vihjettä, lue sitten vihje, työskentele lisää, ja katso toinen vihje.

Ohjeellisesti tämä lisäsivupaketti voidaan katsoa suoritetuksi, kun noin puolet harjoitustehtävistä on ratkaistu, mielellään tasaisesti eri osioista.

Lisäsivuprojekti tulee kattamaan kaikki pitkän matematiikan kurssit. Kolmas, toistaiseksi julkaisematon osa käsittelee geometriaa.

Antoisia hetkiä lisäsivujen parissa!

Helsingissä ja Vantaalla 28.9.2019

Ville Tilvis ja Esa V. Vesalainen

1 Hyödyllisiä kaavoja

Muistikaavat

Ehdottomasti käytetyimpiä ja hyödyllisimpia algebrallisia kaavoja eli identiteettejä ovat niin kutsutut muistikaavat (binomikaavat), joihin luetaan ainakin seuraavat, reaalilukujen a ja b summaa ja erotusta koskevat kaavat:

summan neliö	$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$,
erotuksen neliö	$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2ab+b^2$,
summan ja erotuksen tulo	$(a+b)(a-b)$	$=$	a^2-b^2.

Muistikaavojen todistaminen on yksinkertaista: vasemman puolen auki kertomalla saa tulokseksi oikean puolen, esimerkiksi erotuksen neliölle

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot(-b) - b\cdot a - b\cdot(-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Näihin muistikaavoihin itsessään ei siis liity syvällistä teoriaa, mutta ne ovat tavattoman käteviä. Muistikaavojen käytön automatisoituminen on tarpeellinen askel matemaattisten taitojen polulla.

Esimerkki 1. Laske päässä $494\cdot 506$.

Ratkaisu. Laskun voi tehdä muistikaavaa $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ hyödyntäen:

$$\begin{aligned}494\cdot 506 &= (500-6)(500+6)\\ &= 500^2 - 6^2\\ &= 250\,000 - 36 = 249\,964.\end{aligned}$$

Esimerkki 2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille pätee

$$x^2 = y^2 + 23.$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$x^2 - y^2 = 23.$$

Koska erotus x^2-y^2 on positiivinen, luku x on lukua y suurempi. Muistikaavan $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ avulla yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(x+y)(x-y) = 23.$$

Koska x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja, myös $x+y$ ja $x-y$ ovat (sillä oli $x>y$). Koska 23 on alkuluku, kokonaislukujen $x+y$ ja $x-y$ tulo voi olla 23 vain, kun pätee

$$\begin{cases} x+y=23, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $2x=24$ eli $x=12$. Sijoittamalla tämä alempaan yhtälöön saadaan $12-y=1$ eli $y=11$. Tämä ratkaisu toimii, sillä

$$12^2-11^2=144-121=23.$$

Muuta hyödyllistä

Kolmen yleisimmän muistikaavan lisäksi on hyödyllistä osata muitakin identiteettejä. Usein hyödyksi ovat esimerkiksi reaaliluvuille a, b ja c pätevät kaavat

binomin kuutio	$(a+b)^3$	$=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,
kuutioiden erotus	a^3-b^3	$=$	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$,
kuutioiden summa	a^3+b^3	$=$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$,
trinomin neliö	$(a+b+c)^2$	$=$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

Näiden todistaminen on harjoitustehtävänä 3.

Lisäksi on hyvä tuntea reaaliluvuille a, b ja c pätevä kaava

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= (a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right), \end{aligned}$$

jonka todistus on tehtävänä 5.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 1. Laske muistikaavojen avulla laskut

a) 103^2 **c)** $101 \cdot 99$
b) 98^2 **d)** $58 \cdot 62$.

[Vihje]

Tehtävä 2. Olkoot a ja b kaksi positiivista kokonaislukua, joille pätee

$$a^2 - b^2 = 17.$$

Mitkä ovat nämä positiiviset kokonaisluvut a ja b?

Tällaisissa tehtävissä ei riitä, että löytää yhden ratkaisun, vaan tehtävänä on löytää kaikki ratkaisut ja osoittaa, että muita ei ole.

[Vihje]

Tehtävä 3. Todista reaaliluvuille a, b ja c oikeiksi seuraavat identiteetit

binomin kuutio	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
kuutioiden erotus	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,
kuutioiden summa	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
trinomin neliö	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Näistä kaavoista on hyötyä tehtävässä 19.

[Vihje]

Tehtävä 4. Tutki, löytyykö reaaliluvuille a ja b pätevän kaavan

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

kaltaista kaavaa lausekkeille $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$ ja niin edelleen. Mikäli kyllä, muotoile kaava lausekkeelle $a^n - b^n$, kun $n \geqslant 2$ on kokonaisluku.

[Vihje]

Tehtävä 5. Osoita kaikille reaaliluvuille a, b ja c päteväksi kaava

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (a+b+c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right). \end{aligned}$$

Tätä kaavaa hyödynnetään tehtävässä 54.

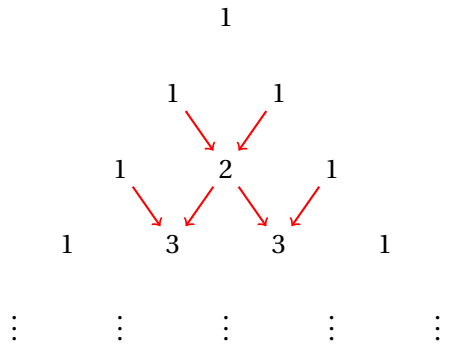
[Vihje]

Pascalin kolmio ja $(a+b)^n$

Blaise Pascalin mukaan nimetty (mutta jo aiemmin käytetty) Pascalin kolmio näyttää tältä:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Kolmion ensimmäisellä rivillä on vain yksi ykkönen. Jokaisella rivillä on yksi luku enemmän kuin edellisellä, ja rivin ensimmäinen ja viimeinen luku ovat aina ykkösiä. Sisemmät luvut saadaan laskemalla yhteen niiden yläpuolella viistosti olevat luvut. Esimerkiksi alla $1+2=3$.



Kutsumme Pascalin kolmion riviä, joka sisältää vain yksinäisen luvun 1, kolmion 0. riviksi, seuraavaa riviä 1. riviksi ja niin edelleen. Lisäksi jokaisella rivillä kutsumme vasemmanpuoleisinta lukua rivin 0. luvuksi, sitä seuraavaa lukua rivin 1. luvuksi, ja niin edelleen. Kun n on epänegatiivinen (eli positiivinen tai nolla) kokonaisluku ja k kokonaisluku, jolle $0 \leqslant k \leqslant n$, merkitsemme Pascalin kolmion n. rivin k. lukua symbolilla $\binom{n}{k}$, joka luetaan suomeksi "n yli k". Pascalin kolmion luvut nimetään siis näin:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Esimerkiksi $\binom{5}{2} = 10$, kuten Pascalin kolmiosta voidaan lukea.

Pascalin kolmion rakenteesta johtuen pätee

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

kaikilla epänegatiivisilla kokonaisluvuilla n, samoin kuin

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n ja k, joille $k \leqslant n$.

Lisäksi Pascalin kolmio on symmetrinen pystyakselinsa suhteen, joten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

kaikilla epänegatiivisilla luvuilla n ja k, joille $k \leqslant n$.

Binomikerroin

Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan myös binomikertoimiksi, sillä Pascalin kolmion luvut liittyvät läheisesti binomin potensseihin $(a+b)^n$. Kun reaalilukujen a ja b summa korotetaan kokonaislukupotenssiin n, auki kerrotun ja sievennetyn polynomin kertoimet löytyvät Pascalin kolmiosta:

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0 = 1 & = \mathbf{1} \\
(a+b)^1 = a+b & = \mathbf{1}\cdot a + \mathbf{1}\cdot b \\
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & = \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}\cdot b^2 \\
(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & = \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}\cdot b^3 \\
(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & = \mathbf{1}\cdot a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}\cdot b^4. \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Täsmällisemmin sanottuna binomin n. potenssin $(a+b)^n$ auki kirjoitetun muodon kertoimet löytyvät Pascalin kolmion riviltä n, kuten seuraavaksi todistetaan.

Binomilause. Yleisesti pätee, että

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots$$
$$\dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

Huomaa, miten muuttujan a eksponentit pienenevät ja muuttujan b eksponentit kasvavat. Binomilause voidaan kirjoittaa summamerkintää käyttäen lyhyemmin muodossa

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Esimerkki. Esitä lauseke $(x+2)^5$ ilman sulkuja.

Ratkaisu. Poimitaan tarvittavat kertoimet Pascalin kolmion 5. riviltä. Ne ovat 1, 5, 10, 10, 5 ja 1. Nyt voidaan laskea:

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= \boxed{1}\cdot x^5 + \boxed{5}x^4\cdot 2 + \boxed{10}x^3\cdot 2^2 + \boxed{10}x^2\cdot 2^3 + \boxed{5}x\cdot 2^4 + \boxed{1}\cdot 2^5 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.\end{aligned}$$

Binomilauseen todistus.

Voit huoleti ohittaa tämän todistuksen ja palata siihen myöhemmin.

Oletetaan, että lause ei päde joillakin luonnollisen luvun n arvoilla. Tutkitaan pienintä luvun n arvoa, jolla lause ei päde. Aiempien esimerkkien perusteella täytyy olla $n > 3$. Koska n on pienin toimimaton eksponentti, kaava toimii, kun eksponenttina on $n-1$. Voidaan siis laskea näin:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} \\ &= (a+b)\left[\binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b^1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}\right].\end{aligned}$$

Kerrotaan sulut auki yhtälön oikealla puolella:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = a&\left[\binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b^1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}\right] \\ &+ b\left[\binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b^1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}\right] \\ = \quad &\binom{n-1}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}ab^{n-1} \\ &+ \binom{n-1}{0}a^{n-1}b^1 + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}b^n\end{aligned}$$

Tästä symbolipuurosta voi tunnistaa, että summassa on ylemmässä ja alemmassa rivissä termipareja, joissa on samat eksponentit; parit löytyvät kaikille muille termeille paitsi ensimmäiselle (a^n) ja viimeiselle (b^n).

Lasketaan yhteen termit, joissa on samat lukujen a ja b potenssit. Ensimmäinen tällainen summa on

$$\binom{n-1}{1}a^{n-1}b+\binom{n-1}{0}a^{n-1}b=\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}\right]a^{n-1}b=\binom{n}{1}a^{n-1}b,$$

sillä Pascalin kolmion kahden vierekkäisen luvun summa $\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}$ on kolmion seuraavan rivin luku $\binom{n}{1}$. Vastaavasti muille pareille pätee

$$\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k+\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^k=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

kun $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Näin on saatu

$$(a+b)^n=\binom{n-1}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n-1}{n-1}b^n.$$

Kun muistetaan vielä, että $\binom{n-1}{0}=1$ ja $\binom{n-1}{n-1}=1$ (Pascalin kolmion kunkin rivin ensimmäinen ja viimeinen luku on 1), saadaan binomikaava

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että kaava ei toimisi luvulla n. Kaava toimii siis kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

Lisää binomikertoimista

Laskukaava. Itse asiassa binomikertoimet voi kirjoittaa mukavasti kertomien avulla. Kun n on positiivinen kokonaisluku, sen *kertoma* on luku

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

Määrittelemme myös $0!=1$. Tällöin kaikilla epänegatiivisilla kokonaisluvuilla n ja kokonaisluvuilla k, joille $0 \leqslant k \leqslant n$, pätee

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Esimerkiksi

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}=10$$

ja

$$\binom{4}{4}=\frac{4!}{4!\,(4-4)!}=\frac{4!}{4!\cdot 0!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1}=1.$$

Kolmantena esimerkkinä voisimme mainita vaikkapa, että kun n on kokonaisluku, jolle $n \geqslant 2$, niin

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\,(n-2)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)\,(n-1)\,n}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)}=\frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Sovelluksia. Binomikertoimet tulevat luonnollisella tavalla vastaan myös mm. todennäköisyyslaskennassa. Tämä liittyy siihen, että binomikerroin $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monella tavalla n oliosta voi valita k oliota. Esimerkiksi 5 henkilön joukosta on mahdollista muodostaa $\binom{5}{2} = 10$ erilaista paria.

Aivan toisenlainen esimerkki binomikertoimista olisi Bertrandin postulaattina tunnettu kaunis tulos, jonka mukaan jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n on olemassa alkuluku p, jolle $n < p \leqslant 2n$. Erdősin kaunis (mutta kuitenkin jokseenkin tekninen) todistus tälle perustuu binomikertoimen $\binom{2n}{n}$ tarkasteluun.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 6. Kirjoita seuraavat lausekkeet binomikaavan avulla ilman sulkuja.

a) $(a+b)^6$
b) $(a-b)^6$
c) $(a+1)^3$
d) $(2x-3)^4$.

[Vihje]

Tehtävä 7. Ratkaise yhtälö

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 4.$$

[Vihje]

Tehtävä 8. Todista, että luku

$$\left(2+\sqrt{7}\right)^{2020} + \left(2-\sqrt{7}\right)^{2020}$$

on kokonaisluku.

[Vihje]

Tehtävä 9. Laske käsin luku $\binom{21}{3}$ hyödyntäen kaavaa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

missä k ja n ovat kokonaislukuja, joille $0 \leq k \leq n$.

[Vihje]

Tehtävä 10. Osoita, että kaava

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pitää paikkansa kaikille kokonaisluvuille n ja k, joille pätee $0 \leqslant k \leqslant n$.

Kuten aiemminkin binomikertoimen määritelmänä pidetään tässä sitä, että luku $\binom{n}{k}$ on Pascalin kolmiossa rivillä n järjestyksessä k. luku vasemmalta. Sekä rivien että lukujen numerointi alkaa nollasta.

[Vihje]

Tehtävä 11. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske summa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

binomikertoimien avulla.

[Vihje]

2 Kompleksiluvut

Tulon merkkisäännön mukaisesti kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen, ja kahden negatiivisen luvun tulo on myös positiivinen. Tästä syystä reaalilukujen neliöt eivät ole negatiivisia: kun x on reaaliluku, pätee

$$x^2 \geqslant 0.$$

Näin ollen esimerkiksi yhtälöllä

$$x^2 = -1$$

ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa, eli lukua $\sqrt{-1}$ ei ole. 1500-luvulla törmättiin kuitenkin mielenkiintoiseen ilmiöön: kolmannen asteen yhtälöä ratkaistaessa joutuu luonnollisella tavalla tekemisiin negatiivisten lukujen neliöjuurten kanssa. Tällaiset luvut ovat esimerkkejä kompleksiluvuista.

Leonhard Euler otti 1700-luvulla käyttöön merkinnän i luvulle, jonka neliö on -1, ja kompleksilukujen teoria nykymuodossaan vakiintui 1800-luvulla.

Nimestään huolimatta kompleksiluvut eivät ole kohtuuttoman monimutkaisia, ja ne ovat mitä mainioin työväline. Kompleksilukuihin törmää jatkuvasti lukuisilla matematiikan aloilla, ja niillä on myös selkeitä sovelluksia luonnontieteissä: esimerkiksi atomi- ja molekyylitason fysiikkaa erinomaisesti kuvaavan kvanttimekaniikan perustava laki on kätevää muotoilla Schrödingerin yhtälöksi

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\Psi,$$

jonka alussa komeilee imaginaariyksikkö i. Myös signaalikäsittelyssä ja sähkötekniikassa kompleksiluvuilla lasketaan rutiininomaisesti.

Kompleksiluvuilla on kaunis teoria ja kaunis rakenne, josta tässä luvussa esitellään vain perusteet. Mikäli kaipaat lisälukemista, logiikasta kompleksilukujen rakenteen takana saa käsityksen Antti Valmarin tekstistä *Onko $\sqrt{-1}$ olemassa? Keskipituinen kertomus lukujen olemuksesta*, osat yksi ja kaksi [1] ja silmäyksen soveltavaan puoleen luo Vesa Linja-aho artikkelissaan *Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla*[2].

Kompleksilukujen historiasta ja vielä laajemmasta rakenteesta kvaternioista voi lukea Jorma Merikosken artikkelista *Kompleksiluvuista ja kvaternioista*[3], ja lisää hyödyllisiä teknisiä yksityiskohtia löytyy Matti Lehtisen artikkelista *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*[4].

Minkään näistä lukeminen ei ole välttämätöntä seuraavan ymmärtämiseksi.

---

[1] Antti Valmari: *Onko $\sqrt{-1}$ olemassa? Keskipituinen kertomus lukujen olemuksesta*
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/1/valmari_osa1.pdf
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/2/valmari_osa2.pdf

[2] Vesa Linja-aho: *Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla*,
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/1/osoitinlaskenta.pdf

[3] Jorma Merikoski: *Kompleksiluvuista ja kvaternioista*,
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2001/3/merikoski/merikoski.pdf

[4] Matti Lehtinen: *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*,
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/1/lehtinen.pdf

Kompleksilukujen rakenne

Kompleksiluvut ovat reaalilukujen joukon laajennus, joka noudattaa samoja laskulakeja kuin reaaliluvut (kaikkia paitsi suuruusjärjestykseen liittyviä).

Aloitetaan sopimalla, että on olemassa imaginaariyksikkö i, jolle pätee

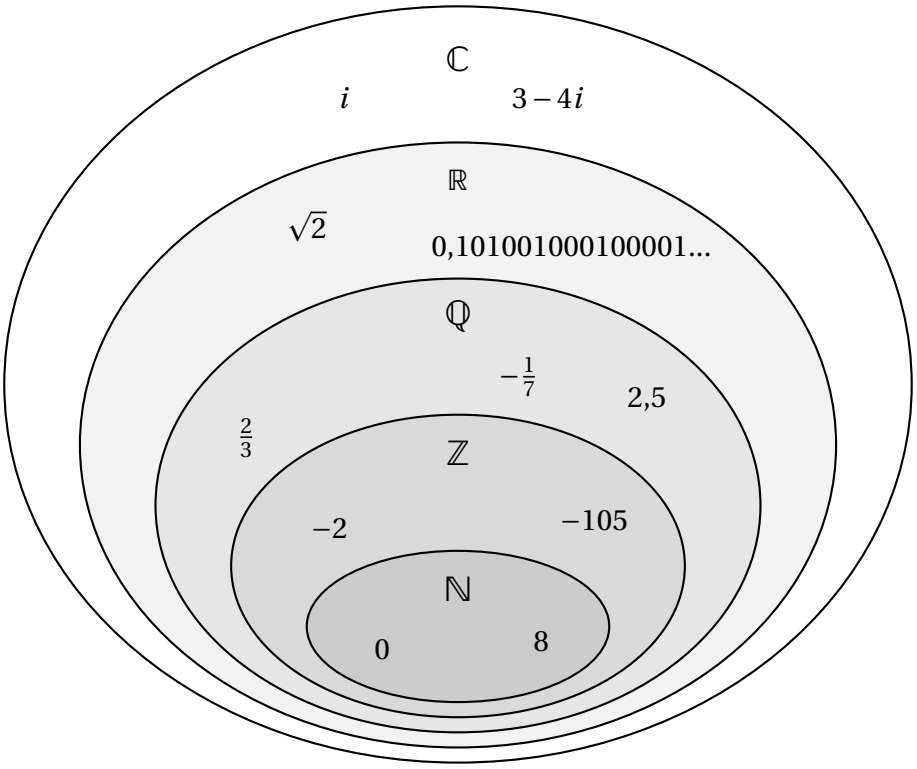
$$i^2 = -1.$$

Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ koostuu luvuista z, jotka ovat muotoa

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Lukua a kutsutaan kompleksiluvun reaaliosaksi ja lukua b imaginaariosaksi. Kompleksilukuja ovat siis esimerkiksi $2 + i$, $3 - 4i$, $3i$ ja 7. Reaaliluvut voidaan tulkita kompleksiluvuiksi, joiden imaginaariosa on 0.

Kompleksiluvun z reaaliosaa merkitään usein $\mathrm{Re}(z)$ tai $\Re(z)$ ja imaginaariosaa $\mathrm{Im}(z)$ tai $\Im(z)$. Esimerkiksi $\mathrm{Im}(3 + 2i) = 2$.



Lukujoukkojen hierarkia

Kompleksilukujen laskusäännöt yhteenlaskun ja kertolaskun osalta määritellään samoiksi kuin reaaliluvuilla. Näin kompleksiluvuilla voi laskea kuten tavallisilla polynomeilla, kunhan muistaa lisäsäännön $i^2 = -1$.

Esimerkki. Olkoon $z = 2+3i$ ja $w = 1-i$. Lasketaan lukujen z ja w summa, erotus ja tulo:

$$\begin{aligned} z+w &= (2+3i)+(1-i) \\ &= 3+2i, \end{aligned}$$

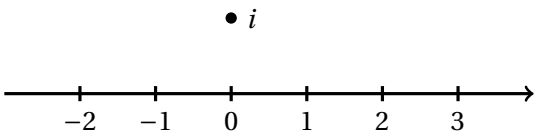
$$\begin{aligned} z-w &= 2+3i-(1-i) \\ &= 2+3i-1+i \\ &= 1+4i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2+3i)(1-i) \\ &= 2-2i+3i-3i^2 \\ &= 2+i-3\cdot(-1) \\ &= 5+i. \end{aligned}$$

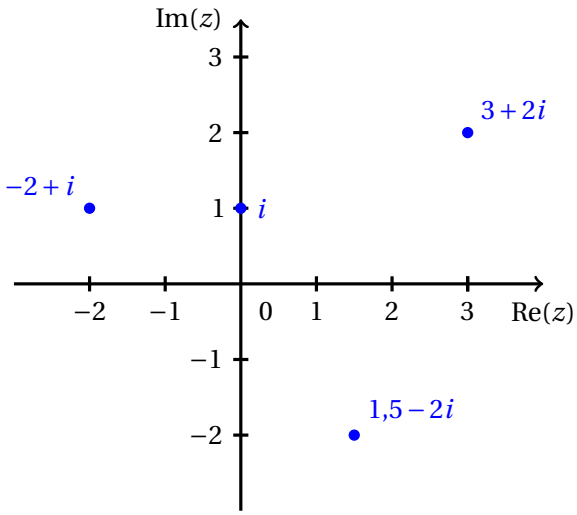
Kompleksitaso

Siinä missä reaaliluvut voidaan sijoittaa lukusuoralle, kompleksiluvut kannattaa visualisoida tasoon.

Kompleksitason vaaka-akselina toimii lukusuora, jossa reaaliluvut ovat. Pystyakselille sijoitetaan imaginaariyksikkö i yhden yksikön päähän origosta ylöspäin.



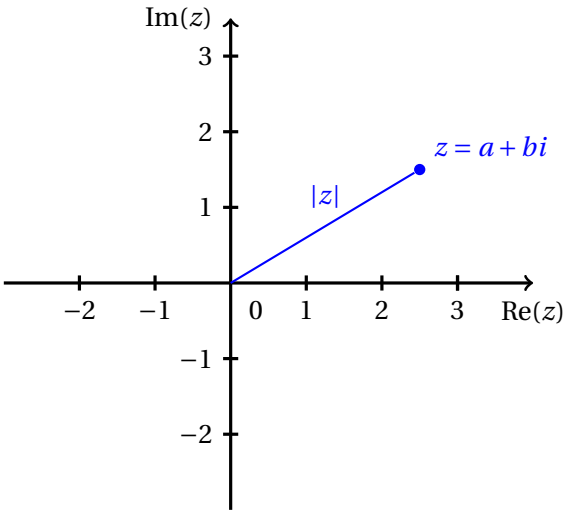
Jokainen kompleksiluku z sijoitetaan pisteeseen, jonka x-koordinaatti on luvun reaaliosa $\mathrm{Re}(z)$ ja y-koordinaatti luvun imaginaariosa $\mathrm{Im}(z)$. Näin esimerkiksi $3+2i$ sijaitsee kompleksitason pisteessä $(3,2)$.



Kompleksilukuja kompleksitasossa

Moduli ja liittoluku

Kompleksilukujen geometrisen tulkinnan vuoksi on luontevaa määritellä kompleksiluvun z itseisarvo eli *moduli* $|z|$ luvun z etäisyydeksi origosta.



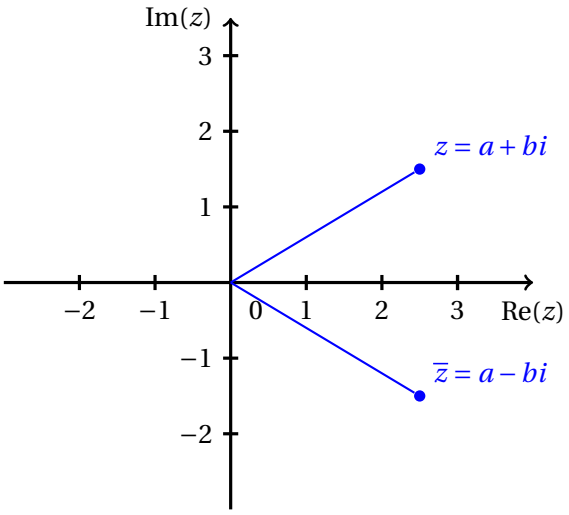
Pythagoraan lauseen perusteella saadaan

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

eli esimerkiksi

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Liittoluku. Kompleksiluvun z liittoluku $\overline{z}$ saadaan muuttamalla luvun z imaginaariosa vastaluvukseen. Jos esimerkiksi $z = 3 + 2i$, on $\overline{z} = 3 - 2i$. Voidaan merkitä myös $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$.



Liittoluvut ovat toistensa peilikuvia reaaliakselin suhteen.

Liittoluvuilla on mainioita ominaisuuksia, kuten kaikille kompleksiluvuille z ja w pätevät identiteetit

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

ja

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Nämä todistetaan tehtävässä 17.

Jakolasku

Kahden kompleksiluvun osamäärä voidaan laskea laventamalla nimittäjän liittoluvulla ja käyttämällä nimittäjässä muistikaavaa. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{3+4i} &= \frac{(3-4i)(2+i)}{(3-4i)(3+4i)} \\ &= \frac{6+3i-8i-4i^2}{3^2-(4i)^2} \\ &= \frac{10-5i}{9+16} = \frac{10-5i}{25} \\ &= \frac{10}{25} - \frac{5}{25}i \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.\end{aligned}$$

Yleisesti siis muotoa $\dfrac{jotain}{a+bi}$ oleva osamäärä kannattaa laventaa nimittäjän liittoluvulla $a-bi$.

Kompleksinen neliöjuuri

Miten merkintä $\sqrt{-9}$ pitäisi tulkita? Onko se mielekäs? Jos on kompleksiluku $z = \sqrt{-9}$, niin varmasti pitäisi päteä

$$z^2 = -9.$$

Yhtälön ratkaisu alkaa siirtämällä termit samalla puolelle yhtälöä:

$$z^2 + 9 = 0.$$

Nyt yhtälön vasenta puolta voi muokata sopivasti:

$$\begin{aligned}z^2 + 9 &= z^2 - i^2 \cdot 9 \\ &= z^2 - i^2 \cdot 3^2 \\ &= z^2 - (3i)^2.\end{aligned}$$

Nyt voidaan käyttää muistikaavaa $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$, joka pätee myös kaikille kompleksiluvuille u ja v, ja kirjoittaa

$$z^2 - (3i)^2 = (z-3i)(z+3i).$$

Alkuperäinen yhtälö on siis yhtäpitävä yhtälön

$$(z-3i)(z+3i) = 0$$

kanssa, ja tulon nollasäännön, joka pätee myös kompleksiluvuille, nojalla saadaan ratkaisuiksi

$$z = 3i \quad \text{ja} \quad z = -3i.$$

Yleensä kompleksinen neliöjuuri määritellään niin, että näitä molempia lukuja kutsutaan luvun -9 neliöjuuriksi. Voidaan siis merkitä

$$\sqrt{-9} = 3i \quad \text{tai} \quad \sqrt{-9} = -3i.$$

Huomaa, että tämä poikkeaa reaalisesta neliöjuuresta: on sovittu, että $\sqrt{9}$ on 3, ei -3, vaikka onkin kaksi reaalilukua x, jotka toteuttavat yhtälön $x^2 = 9$.

Määritelmä. Yleisesti kompleksinen neliöjuuri määritellään niin, että kun z ja c ovat kompleksilukuja, luku z on luvun c neliöjuuri täsmälleen silloin, kun

$$z^2 = c.$$

Tämän erikoistapauksena voidaan todeta, että kun luku c on negatiivinen reaaliluku (vaikkapa $c = -a$, missä a on positiiviinen reaaliluku), edellä mainitusta yhtälöstä saadaan

$$z^2 = -a$$

eli

$$z^2 + a = 0,$$

jonka vasen puoli saadaan samanlaisella sievennyksellä kuin edellä muotoon

$$z^2 + a = z^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2 = z^2 - i^2\left(\sqrt{a}\right)^2 = (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}).$$

Yhtälö voidaan siis kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}) = 0,$$

josta saadaan ratkaistua tulon nollasäännöllä neliöjuuriksi

$$z = i\sqrt{a} \quad \text{ja} \quad z = -i\sqrt{a}.$$

Esimerkiksi pätee $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$ tai $\sqrt{-5} = -i\sqrt{5}$. Voidaan merkitä $\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}$.

Tehtävässä 21 johdetaan neliöjuurelle $\sqrt{a + bi}$ yleinen kaava, kun $b \neq 0$. Kaava on mukavan yksinkertainen.

Miksi kaksi arvoa?

Kompleksisen neliöjuuren sallitaan tarkoittavan kahta eri lukua tilanteen mukaan, koska muuten neliöjuuren laskusäännöt (kuten epänegatiivisille reaaliluvuille a ja b pätevä sääntö $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$) eivät kaikissa tilanteissa päde.

Jos esimerkiksi vaaditaan luvun -1 neliöjuurelle vain yksi arvo $\sqrt{-1} = i$, saadaan aikaan yllätys sieventämällä

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i \cdot i = -i.$$

Neliöjuurten laskusäännöt voi pelastaa sallimalla sen, että kompleksisella neliöjuurella tarkoitetaan tilanteen mukaan jompaa kumpaa kahdesta eri luvusta, esimerkiksi $\sqrt{-1}$ on joko i tai $-i$. Vain nollan neliöjuuri on yksikäsitteinen: $\sqrt{0} = \pm 0 = 0$.

Toisen asteen yhtälön ratkaisu

Nyt kun kompleksinen neliöjuuri on määritelty, voidaan johtaa ratkaisukaava toisen asteen yhtälölle

$$az^2 + bz + c = 0,$$

missä $a \neq 0$, b, c ja tuntematon z ovat kaikki kompleksilukuja. Kerrotaan ensin puolittain luvulla $4a$, jolloin saadaan yhtäpitävästi

$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0.$$

Kun lisätään puolittain b^2 ja vähennetään $4ac$, saadaan

$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 = b^2 - 4ac,$$

eli

$$(2az)^2 + 2 \cdot 2az \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Yhtälön vasen puoli on tarkkaan katsoen neliö, kirjoitetaan se näkyviin:

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Nyt voidaan kirjoittaa kompleksista neliöjuurta käyttäen

$$2az + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

ja edelleen

$$2az = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Kun lopuksi jaetaan luvulla $2a$, saadaan ratkaisukaava

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},}$$

jonka ulkomuoto on täsmälleen sama kuin vastaavalla reaalilukukaavalla. Nyt vain neliöjuuri pitää tulkita kompleksiseksi neliöjuureksi.

Esimerkki. Yhtälö

$$z^2 + iz + 3 = 0$$

voidaan ratkaista kaavaa käyttäen merkinnöillä $a = 1$, $b = i$ ja $c = 3$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-i \pm \sqrt{-1 - 12}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-13}}{2} \\ &= \frac{-i \pm i\sqrt{13}}{2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right) i. \end{aligned}$$

Kompleksiset polynomit

Reaaliluvuista kompleksilukuihin siirryttäessä polynomilaskenta muuttuu paljon yksinkertaisemmaksi. Esimerkiksi reaalilukujen maailmassa jotkin polynomit voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin, toisia ei:

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$x^2 + 1 =$ ei reaalisia ensimmäisen asteen tekijöitä

Kun kompleksiluvut otetaan mukaan, jälkimmäinenkin lauseke voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin. Voidaan nimittäin laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= x^2 - (-1) \\ &= x^2 - i^2 \\ &= (x+i)(x-i). \end{aligned}$$

Tämä onnistuu itse asiassa kaikille vähintään ensimmäisen asteen polynomeille, minkä takaa algebran peruslause:

Algebran peruslause. Jokaisella polynomilla (joka ei ole vakio) on vähintään yksi nollakohta (mahdollisesti kompleksinen). Lause pätee kaikille polynomeille, joiden kertoimet ovat kompleksilukuja, siis myös reaalilukukertoimisille.

Algebran peruslauseen avulla voidaan todistaa miellyttävä tulos:

1. Jokaisen kompleksilukukertoimisen polynomin voi kirjoittaa ensimmäisen asteen kompleksilukukertoimisten polynomien tulona.

   Toisin sanoen: Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin n-asteiselle kompleksilukukertoimiselle polynomille $p(z)$ löytyy aina kompleksiluvut $c, a_1, a_2, ..., a_n$ niin, että $p(z) = c(z-a_1)(z-a_2)...(z-a_n)$.

   Tulon nollasäännöllä tästä seuraa:

2. Jokaisella asteen n kompleksilukukertoimisella polynomiyhtälöllä on n kompleksilukuratkaisua (joista osa voi olla keskenään samoja).

Algebran peruslauseen todistus löytyy esimerkiksi Tuomas Hytösen Solmu-lehdessä[5] julkaistusta artikkelista Algebran peruslause lukiolaisille.

Esimerkki. Jaetaan tekijöihin $x^2 - 2x + 5$.
Ratkaistaan ensin kyseisen polynomin nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}. \end{aligned}$$

[5] Matematiikalehti Solmu, 3/2011, https://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/3

Reaalisia ratkaisuja ei ole, mutta kompleksisia on:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4i}{2} \\ &= 1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Nollakohtien avulla polynomi voidaan jakaa tekijöihin:

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i).$$

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 12. Olkoot $z = 3 - 2i$ ja $w = 5 + i$. Laske luvut $z + w$, $z - w$ ja $z \cdot w$. Tarkista tulokset vihjeestä. Laske myös $\frac{z}{w}$.

[Vihje]

Tehtävä 13. Piirrä kompleksitaso ja merkitse sinne kompleksiluvut $z_1 = 2i$, $z_2 = 2{,}7 + i$, $z_3 = -2 + i$ ja $z_4 = 2 - 3i$.

[Vihje]

Tehtävä 14. Miltä näyttää se kompleksitason alue, jossa luvuille z pätee

a) $|z| = 2$,
b) $1 < \operatorname{Re} z < 2$,
c) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$,
d) $|z - i| < |z|$?

[Vihje]

Tehtävä 15. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $4z^2 - 4z + 5 = 0$.

[Vihje]

Tehtävä 16. Kompleksilukujen z ja w summa on $2 + 2i$ ja niiden tulo on $-4 + 2i$. Mitkä ovat luvut z ja w?

[Vihje]

Tehtävä 17. Tarkista määritelmistä lähtien, että seuraavat identiteetit ovat tosia. Tässä z ja w ovat kompleksilukuja.

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
c) $\left|\overline{z}\right| = |z|$,
d) $|z|^2 = z\overline{z}$,
e) $|zw| = |z| \cdot |w|$.

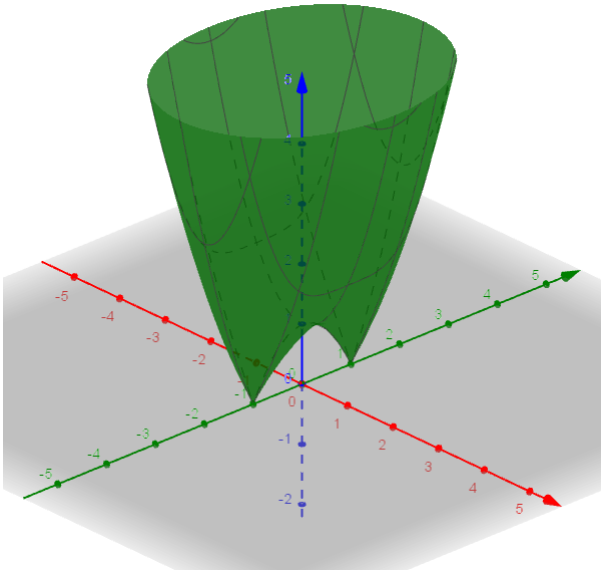
[Vihje]

Tehtävä 18. Reaalifunktion kuvaaja on kaksiulotteinen: muuttujan x arvot ovat vaaka-akselilla ja niihin liittyvät funktion arvot $f(x)$ pystyakselilla. Kompleksifunktion kuvaajan piirtäminen on ongelmallista, sillä sekä muuttuja z että funktion arvo $f(z)$ ovat kaksiulotteisen tason pisteitä. Tarvittaisiin siis neliulotteinen kuvaaja!

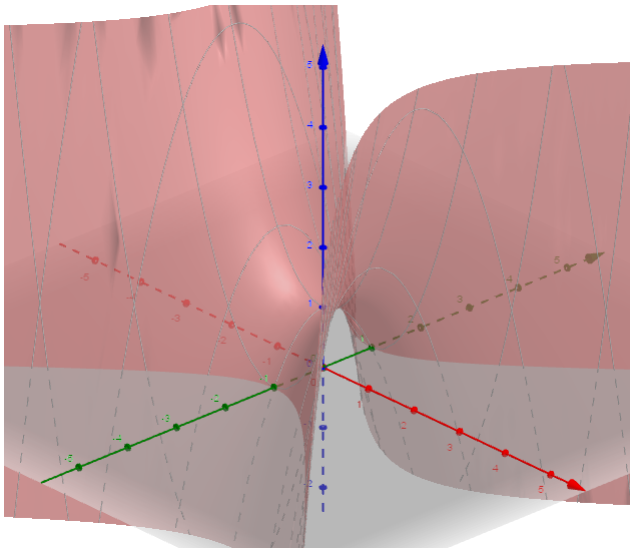
Ongelmaa ei voi kokonaan kiertää, mutta yksi tapa visualisoida kompleksifunktioita on tehdä kolmiulotteinen kuvaaja, jossa xy-taso vastaa muuttujan z arvoja ja kolmannelle akselille valitaan jokin funktion arvoon $f(z)$ liittyvä reaaliluku.

Alla on esitetty visualisointeja funktiosta $f(z) = z^2 + 1$. Joka kuvaajassa on harmaalla kompleksitaso, jossa punainen reaaliakseli kulkee alaviistoon ja vihreä imaginaariakseli yläviistoon. Muuttujat z ovat tämän tason pisteitä.

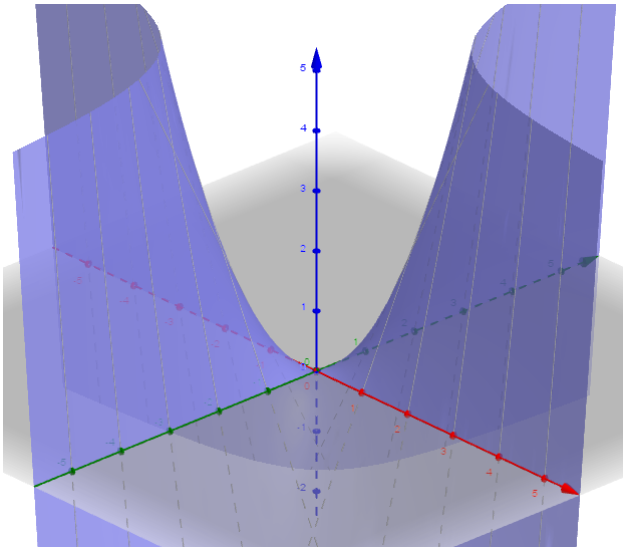
Alla olevissa kolmessa kuvaajassa on sinisellä pystyakselilla vuorollaan $\left|f(z)\right|$, $\operatorname{Re} f(z)$, ja $\operatorname{Im} f(z)$. Ensimmäisestä kuvaajasta voidaan esimerkiksi lukea, että kun $z = i$, $\left|f(z)\right| = 0$. Samoin $\left|f(-i)\right| = 0$, ja muuten $\left|f(z)\right|$ on positiivinen.



$\left|f(z)\right|$



$\operatorname{Re} f(z)$



$\operatorname{Im} f(z)$

Itse tehtävä: Tutki yhtälön $z^3 - 1 = 0$ ratkaisuja piirtämällä funktion $g(z) = |z^3 - 1|$ kuvaaja kolmiulotteiseen koordinaatistoon sopivalla ohjelmalla ja tutkimalla nollakohtia. Esimerkiksi GeoGebra 5 -ohjelmassa funktio voidaan piirtää komennolla

```
g(x,y)=|(x+i*y)^3-1|.
```

Näetkö nollakohdan $z = 1$? Entä kaksi muuta nollakohtaa? Missä päin kompleksitasoa ne suunnilleen ovat? Tässä tehtävässä ei tarvita tarkkoja ratkaisuja.

[Vihje]

Tehtävä 19. Ratkaise edellisessä tehtävässä esiintynyt yhtälö

$$z^3 - 1 = 0$$

kompleksilukujen joukossa laskemalla. Etsi kaikkien kolmen ratkaisun tarkat arvot.

[Vihje]

Tehtävä 20. Määritä luvun $2i$ neliöjuuret muodossa $x + iy$, eli etsi kaikki reaaliluvut x ja y, joille pätee

$$(x + iy)^2 = 2i.$$

Tarkista lopuksi, että ratkaisusi toimivat.

[Vihje]

Tehtävä 21. Kompleksinen neliöjuuri. Johda kompleksiluvun $a + bi$ neliöjuurten $\sqrt{a + bi}$ lausekkeet. Toisin sanoen ratkaise x ja y yhtälöstä

$$(x + iy)^2 = a + bi,$$

missä $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Sovitaan, että $b \neq 0$, jotta kyseessä on aidosti kompleksisen luvun neliöjuuri.

[Vihje]

3 Algebralliset epäyhtälöt

Tässä kappaleessa on tarkoituksena tutustua algebrallisiin epäyhtälöihin. Tässä epäyhtälöillä tarkoitamme sen tapaisia tuloksia kuin vaikkapa

Lause. *Jos x on reaaliluku, niin $x^2 \geqslant 0$. Tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $x = 0$.*

Lause. *Jos a, b ja c ovat epänegatiivisia reaalilukuja, niin*

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a = b = c$.

tai vaikkapa

Lause. *Jos a, b ja c ovat reaalilukuja, niin*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Asian ydin on erilaisten lausekkeiden suuruuksien vertailussa. Emme voi tässä lyhyessä johdannossa tehdä oikeutta epäyhtälöille. Niillä on valtava merkitys matematiikassa, ja esimerkiksi merkittävä osa differentiaali- ja integraalilaskennasta tai lukuteoriasta perustuu erilaisiin epäyhtälöihin.

Tässä keskitymme joihinkin alkeellisiin algebrallisiin epäyhtälöihin, joissa ei esiinny esimerkiksi derivaattoja tai integraaleja. Otamme erityisesti tarkasteluun klassisimmat keskiarvoja käsittelevät epäyhtälöt, kuten aritmeettis-geometrisen epäyhtälön. Nämä ovat erittäin kauniita, ja toisinaan vastaan tulee ongelmia, jotka voi ratkaista elegantisti ja mukavasti tällaisin työkaluin.

Klassisia epäyhtälöitä voi toisinaan soveltaa kauniilla tavalla optimointiongelmiin, joissa kysytään vaikkapa, millaisella tietynlaisella kuviolla on suurin pinta-ala tai pienin tilavuus, tai missä pisteessä jokin funktio saa suurimman tai pienimmän arvonsa. Tällaisissa tilanteissa on oleellista, että ymmärtää, milloin käyttämissään epäyhtälöissä vallitsee yhtäsuuruus; optimaalinen kuvio tai kappale johdetaan yhtäsuuruusehdon avulla.

Lausekkeiden arvioinnista

Aloitetaan lausekkeiden vertailusta, jonka voi suorittaa varsin yksinkertaisilla työkaluilla.

Positiivisten reaalilukujen osamäärä suurenee, kun osoittajaa kasvatetaan ja pienenee, kun nimittäjää kasvatetaan.

Kun a ja b ovat positiivisia reaalilukuja, voidaan arvioida esimerkiksi

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b} \qquad \text{ja} \qquad \frac{a}{b} > \frac{a}{b+5}.$$

Näihin toteamuksiin ei liity mitään ”laskua”, ne ovat vain tosia väitteitä siitä, kumpi lausekkeista on suurempi. Tällaisella arvioinnilla (suuruuksien vertaamisella) voi tehdä jo paljon.

Esimerkki. Olkoon reaaliluku $a > 3$, ja merkitään

$$S = \frac{2a+1}{a+3}.$$

Osoita, että $1 < S < 2$.

Ratkaisu. Arvioidaan lukua S ensin ylöspäin lisäämällä osoittajaan viisi:

$$S = \frac{2a+1}{a+3} < \frac{2a+1+5}{a+3}.$$

Luku 5 valittiin, koska tulokseksi saatu lauseke on itse asiassa arvoltaan tasan 2. Laskemalla saadaan

$$S < \frac{2a+1+5}{a+3} = \frac{2a+6}{a+3} = \frac{2(a+3)}{a+3} = 2.$$

Siis pätee $S < 2$.

Seuraavaksi arvioidaan lukua S alaspäin kasvattamalla nimittäjää korvaamalla luku 3 sitä suuremmalla luvulla a:

$$S = \frac{2a+1}{a+3} > \frac{2a+1}{a+a}.$$

Tätä voidaan arvioida vielä toisenkin kerran alaspäin pienentämällä osoittajaa yhdellä:

$$S > \frac{2a+1}{a+a} = \frac{2a+1}{2a} > \frac{2a}{2a} = 1.$$

Pätee siis myös $S > 1$, kuten haluttiin osoittaa.

Positiivisille reaaliluvuille pätee $a < b$ täsmälleen silloin, kun $\frac{a}{b} < 1$.

Esimerkki. Osoita, että pätee

$$\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} < 1$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geqslant 1$.

Ratkaisu. Kerrotaan nimittäjä auki muistikaavalla:

$$\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}.$$

Sekä osoittaja että nimittäjä ovat positiivisia, kun $n \geqslant 1$. Lisäksi nimittäjä on yhden suurempi kuin osoittaja. Pätee siis

$$\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1.$$

Mitä suurempi positiivinen reaaliluku a on, sitä pienempi on $\frac{1}{a}$.

Esimerkki. Osoita, että edellisessä esimerkissä esiintynyt lauseke

$$\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

on sitä suurempi, mitä suurempi kokonaisluku $n \geqslant 1$ on.

Ratkaisu. Lisätään osoittajaan nolla muodossa $+1-1$:

$$\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}.$$

Sovelletaan muistikaavaa osoittajaan, jolloin lauseke saa muodon

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}.$$

Tätä voidaan edelleen muokata pilkkomalla lauseke kahdeksi jakolaskuksi:

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Nyt voidaan sanoa, että mitä suurempi positiivinen luku n on, sitä suurempi on $(n+1)^2$, joten sitä pienempi on $\frac{1}{(n+1)^2}$, joten sitä suurempi on $1-\frac{1}{(n+1)^2}$, minkä halusimme todistaa.

Reaaliluvuille pätee $a > b$ täsmälleen silloin, kun $a-b>0$.

Esimerkki. Olkoot x ja y reaalilukuja, joille $0 < x < y$. Osoita, että

$$\frac{x}{y} < \frac{x+1}{y+1}.$$

Ratkaisu. Tutkitaan lukujen erotusta $\frac{x+1}{y+1} - \frac{x}{y}$. Jos se on positiivinen, väite on todistettu. Aloitetaan laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{y+1} - \frac{x}{y} &= \frac{y(x+1)}{y(y+1)} - \frac{x(y+1)}{y(y+1)} \\ &= \frac{xy+y}{y(y+1)} - \frac{xy+x}{y(y+1)}.\end{aligned}$$

Yhdistetään murtolausekkeet, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}&= \frac{xy+y-xy-x}{y(y+1)} \\ &= \frac{y-x}{y(y+1)}.\end{aligned}$$

Koska $y > x$ ja $y(y+1) > 0$, pätee

$$\frac{y-x}{y(y+1)} > 0,$$

joten väite on perusteltu.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 22. Olkoot a ja b reaalilukuja, joille $1 < a < b$. Järjestä suuruusjärjestykseen luvut

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{b+1}{a}, \quad \frac{a}{b+1}, \quad \text{ja} \quad \frac{a}{2b}.$$

[Vihje]

Tehtävä 23. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja, joille $a > b$. Osoita, että lukujen $a+b$ ja $a-b$ käänteislukujen keskiarvo on suurempi kuin luvun a käänteisluku.

[Vihje]

Tehtävä 24. Kumpi luvuista

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} \text{ ja } \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}$$

on suurempi?

[Vihje]

Tehtävä 25. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^3 + b^3 \geqslant a^2 b + ab^2.$$

[Vihje]

Reaalilukujen neliöt ovat aina epänegatiivisia

Tässä on varsin yksinkertainen, mutta voimallinen lause:

Lause. *Jos x on reaaliluku, niin $x^2 \geqslant 0$. Lisäksi $x^2 = 0$ vain ja ainoastaan silloin, kun $x = 0$.*

Todistus. Jos x on positiivinen, on $x^2 = x \cdot x$ kahden positiivisen luvun tulona positiivinen. Jos x on negatiivinen, on x^2 kahden negatiivisen luvun tulona myös positiivinen. Lopuksi, 0^2 on tunnetusti 0.

Lauseen mukaan siis muun muassa $2^2 > 0$, $(-1)^2 > 0$ ja $0^2 = 0$. Mutta mielenkiintoisempaa on, että luvun x paikalle voi sijoittaa monimutkaisempia lausekkeita. Tarkastellaan esimerkiksi seuraavan lauseen todistusta:

Lause. *Jos a ja b ovat reaalilukuja, niin $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Lisäksi tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $a = b$.*

Todistus. Asian ydin on siinä, että $(a-b)^2 \geqslant 0$. Nimittäin, tämän epäyhtälön voi kirjoittaa myös muodossa $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$, tai edelleen muodossa $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Lisäksi yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $a^2 + b^2 = 2ab$, eli kun $a^2 + b^2 - 2ab = 0$, eli kun $(a-b)^2 = 0$, eli kun $a = b$.

Seuraava esimerkki on jo varsin juonikas:

Esimerkki. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a - b^2, \quad b - c^2, \quad c - d^2 \quad \text{ja} \quad d - a^2$$

on pienempi tai yhtä suuri kuin $\dfrac{1}{4}$.

Ratkaisu. Tehdään se vastaoletus, että kyseiset luvut olisivat kaikki suurempia kuin $\dfrac{1}{4}$. Tällöin olisi

$$a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Kun kaikki termit siirretään samalle puolelle ja järjestellään sopivasti, tämä epäyhtälö saa muodon

$$0 \quad > \quad a^2 - a + \frac{1}{4} \quad + \quad b^2 - b + \frac{1}{4} \quad + \quad c^2 - c + \frac{1}{4} \quad + \quad d^2 - d + \frac{1}{4}.$$

Kukin muotoa

$$a^2 - a + \frac{1}{4}$$

oleva lauseke voidaan muokata kaikille reaaliluvuille x ja y pätevän muistikaavan $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ avulla muotoon

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2,$$

jolloin vastaoletuksen mukaisesta epäyhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned} 0 &> a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + c^2 - c + \frac{1}{4} + d^2 - d + \frac{1}{4} \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että reaalilukujen neliöiden summa ei koskaan voi olla negatiivinen.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 26. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a pätee

$$a^2 \geqslant 6a - 9.$$

Millä luvun a arvoilla yhtäsuuruus on voimassa?

[Vihje]

Tehtävä 27. Olkoon x nollasta poikkeava reaaliluku. Osoita, että

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2,$$

ja että tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $x = \pm 1$.

Tämän tehtävän toisesta vihjeestä löytyy kokonainen ratkaisu, johon kannattaa tutustua, kun tehtävää on miettinyt itse (mahdollisesti ensimmäisen vihjeen avulla).

[Vihje]

Tehtävä 28. Olkoon x positiivinen reaaliluku. Osoita, että

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2,$$

ja että tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $x = 1$.

[Vihje]

Tehtävä 29. Etsi kaikki ne reaalilukuviisikot $\langle x, y, u, v, w \rangle$, joille

$$\begin{cases} y^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4x - 1, \\ x^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4y - 1, \\ x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 4u - 1, \\ x^2 + y^2 + u^2 + w^2 = 4v - 1, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4w - 1. \end{cases}$$

[Vihje]

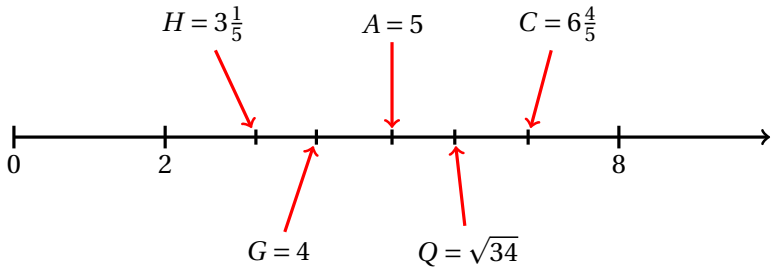
4 Keskiarvoista ja niiden suuruusjärjestyksestä

Kahden luvun a ja b keskiarvoista tunnetuin on aritmeettinen keskiarvo $A = \dfrac{a+b}{2}$.

Keskiarvoja on kuitenkin muitakin, ja eri keskiarvot ovat hyödyllisiä eri tilanteissa. Yleisimmin käytettyjä positiivisten reaalilukujen a ja b keskiarvoja[6] ovat

aritmeettinen keskiarvo	$A = \dfrac{a+b}{2}$,
geometrinen keskiarvo	$G = \sqrt{ab}$,
harmoninen keskiarvo	$H = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$,
kontraharmoninen keskiarvo	$C = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ ja
kvadraattinen keskiarvo	$Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Konkreettisena esimerkkinä lukujen 2 ja 8 aritmeettinen keskiarvo on $\dfrac{2+8}{2} = 5$, geometrinen keskiarvo $\sqrt{2\cdot 8} = 4$, harmoninen keskiarvo $\dfrac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = 3\frac{1}{5}$, kontraharmoninen keskiarvo $\dfrac{2^2+8^2}{2+8} = 6\frac{4}{5}$ ja kvadraattinen keskiarvo $\sqrt{\dfrac{2^2+8^2}{2}} = \sqrt{34} \approx 5{,}83\ldots$



Huomaa, että keskiarvot eivät ole tasavälein! Mielenkiintoista kyllä edellä esitettyjen keskiarvojen keskinäinen suuruusjärjestys on sama kaikilla lukupareilla a, b.

Lause. Positiivisten reaalilukujen a ja b keskiarvoille pätee

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q \leqslant C,$$

ja kussakin epäyhtälössä yhtäsuuruus on voimassa vain ja ainoastaan silloin, kun $a = b$.

[6] Näistä keskiarvoista neljä ensimmäistä olivat käytössä jo antiikin aikoina pythagoralaisessa matematiikkaperinteessä. Lisätietoja pythagoralaisista keskiarvoista löytyy kirjasta Carl Boyer: *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia, osa I* (Art House, 2000), jossa tosin on painovirheitä keskiarvojen kaavoissa.

Lauseen todistus on pilkottu neljäksi harjoitustehtäväksi 30–33. Ne voi kaikki todistaa havaintoon $x^2 \geqslant 0$ tukeutuen.

Aritmeettinen, kvadraattinen ja geometrinen keskiarvo voidaan määritellä samalla kaavalla myös silloin, kun toinen tai molemmat luvuista a ja b ovat nollia. Epäyhtälöt $G \leqslant A \leqslant Q$ pätevätkin kaikilla epänegatiivisilla reaaliluvuilla a ja b, kuten tehtävissä 30 ja 31 osoitetaan.

Keskiarvojen sovelluksia

Eri keskiarvot liittyvät luontevasti eri tilanteisiin.

Geometrinen keskiarvo liittyy muun muassa korkolaskuihin: Jos sijoituksen arvo nousee yhtenä vuonna 10 prosentilla ja toisena vuonna peräti 50 prosentilla, saadaan kokonaiskasvuksi 65 % laskemalla

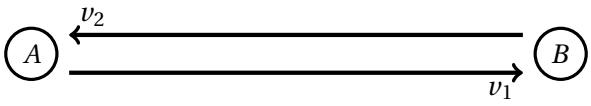
$$1{,}10 \cdot 1{,}50 = 1{,}65.$$

Keskimääräinen vuosikasvu saadaan laskemalla sille prosenttikerroin k kerrointen 1,1 ja 1,50 geometrisena keskiarvona:

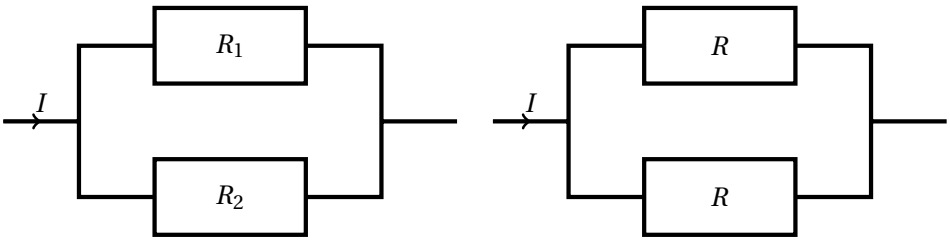
$$k^2 = 1{,}10 \cdot 1{,}50 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{1{,}10 \cdot 1{,}50} = 1{,}2845\ldots \approx 1{,}28.$$

Keskimääräinen vuosikasvu on siis ollut 28 %, ei 30 %, joka saataisiin lukujen 10 % ja 50 % aritmeettisena keskiarvona.

Harmoninen keskiarvo liittyy esimerkiksi keskinopeuksiin: Jos menomatkan kulkee nopeudella v_1 ja tulomatkan nopeudella v_2, keskinopeus on näiden nopeuksien harmoninen keskiarvo. Tätä pohditaan tehtävässä 35. Aritmeettinen keskiarvo ei voisi olla oikein, sillä tässä tilanteessa hitaammalla nopeudella ajaetaan pidempi aika.



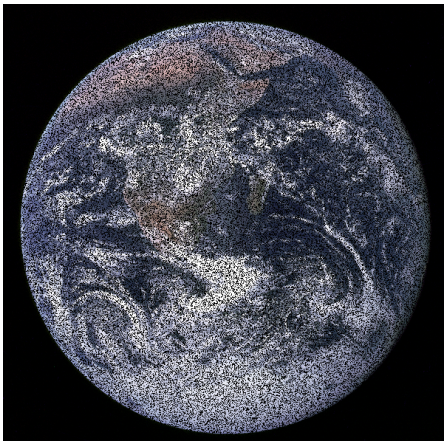
Harmoninen keskiarvo liittyy myös sähköoppiin: Jos virtapiirissä on rinnan kaksi vastusta, joilla on eri resistanssit R_1 ja R_2, yhtä suuren kokonaisresistanssin aiheuttavat kaksi samanlaista vastusta, joiden resistanssi R on resistanssien R_1 ja R_2 harmoninen keskiarvo.



Erilaisia keskiarvoja voi käyttää myös kuvankäsittelyssä, esimerkiksi virheiden korjauksessa. Alla on ensin alkuperäinen valokuva (NASA, Apollo 17 -lennolta 7.12.1972), sitten mustan kohinan sotkema kuva, ja lopulta kuva, josta sotku on yritetty korjata pois. Korjaus on tehty korvaamalla kunkin pikselin väriarvo yhdeksän lähimmän pikselin väriarvojen kontraharmonisella keskiarvolla. Koska kontraharmoninen keskiarvo korostaa suuria arvoja, musta sotku enimmäkseen katoaa. (Kontraharmoninen keskiarvo yli kahdelle luvulle esitellään sivulla 37.)

Alkuperäinen kuva

Pilalle mennyt kuva: harmillista mustaa kohinaa



Kontraharmonisella keskiarvolla korjattu kuva

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 30. Olkoot a ja b epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita niille aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

Kun olet yrittänyt tehtävää ja mahdollisesti käyttänyt vihjettä, lue toinen vihje joka tapauksessa tarkistaaksesi, otitko kaiken huomioon.

[Vihje]

Tehtävä 31. Olkoot a ja b epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita niille kvadraattis-aritmeettinen epäyhtälö

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

[Vihje]

Tehtävä 32. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita niille geometris-harmoninen epäyhtälö

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

[Vihje]

Tehtävä 33. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita niille kontraharmonis-kvadraattinen epäyhtälö

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

[Vihje]

Tehtävä 34. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja, ja merkitään niiden kontraharmonista keskiarvoa

$$C = \frac{a^2+b^2}{a+b},$$

aritmeettista keskiarvoa

$$A = \frac{a+b}{2},$$

ja harmonista keskiarvoa

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Osoita, että kahden muuttujan keskiarvoilla on se jännittävä ominaisuus, että

$$\frac{C+H}{2} = A,$$

eli kahden luvun harmonisen ja kontraharmonisen keskiarvon aritmeettinen keskiarvo on alkuperäisten kahden luvun aritmeettinen keskiarvo.

Kontraharmoninen keskiarvo on siis yhtä paljon aritmeettista keskiarvoa suurempi kuin mitä harmoninen keskiarvo on sitä pienempi.

[Vihje]

Tehtävä 35. Aarne ja Bertta pyöräilevät Ankkavaarasta Hanhilinnaan. Aarne pyöräilee puolet **etäisyydestä** nopeudella v_1 ja toiset puolet nopeudella $v_2 \neq v_1$. Bertta taas pyöräilee puolet **matka-ajastaan** nopeudella v_1 ja toiset puolet nopeudella v_2. Kumpi heistä saapuu perille nopeammin?

[Vihje]

Kahden muuttujan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

Keskitytään seuraavaksi kahden epänegatiivisen reaalimuuttujan a ja b aritmeettis-geometrisen epäyhtälön

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

soveltamiseen. Epäyhtälö kytkee kätevällä tavalla toisiinsa kahden luvun summan ja niiden tulon.

Ajatuksena näissä tehtävissä ei ole enää palauttaa kaikkia epäyhtälöitä raskaalla laskennalla tietoon $x^2 \geqslant 0$, vaan käyttää aritmeettis-geometrista epäyhtälöä oikopolkuna. Tarkastellaan esimerkiksi seuraavaa väitettä.

Esimerkki. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Todistus. Lähdetään liikkeelle epäyhtälön oikeasta puolesta $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$. Jokaiseen termiin voidaan soveltaa aritmeettis-geometrista epäyhtälöä, jolloin saadaan arvio

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqslant \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}.$$

Oikea puoli yhteen laskemalla saadaan

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqslant \frac{2a+2b+2c}{2},$$

eli

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqslant a+b+c,$$

minkä halusimmekin todistaa. Todistus oli hyvin lyhyt ja miellyttävä (ei muistikaavoja, ei toiseen potenssiin korotuksia), koska se hyödynsi aikaisempaa tulosta.

Yritä ratkaista seuraavat tehtävät samalla idealla: lyhyt on kaunista.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 36. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a + 4b \geqslant 4\sqrt{ab}.$$

[Vihje]

Tehtävä 37. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

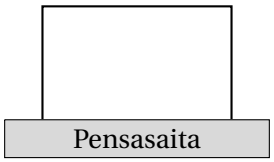
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

[Vihje]

Tehtävä 38. Olkoot x ja y epänegatiivisia reaalilukuja, joille $2x + y = 4$. Määritä lausekkeen xy suurin mahdollinen arvo.

[Vihje]

Tehtävä 39. Minnalla on poneja ja materiaalia 300 metrin aitaa varten. Hän haluaisi rakentaa suorakulmaisen aitauksen, missä yksi sivu koostuu tavallisen aidan sijaan korkeasta läpipääsemättömästä pensasaidasta. Kuinka hänen kannattaa rakentaa aitaus, jotta aidatun alueen pinta-ala olisi mahdollisimman iso?



[Vihje]

Tehtävä 40. Minna on hankkinut lisää poneja ja aitamateriaalia. Hän aikoo rakentaa aitaa 1200 m, ja hän haluaisi rakentaa suorakaiteen muotoisen aidan, jonka keskellä on toinen aita, joka jakaa alueen kahdeksi samanlaiseksi pienemmäksi suorakaiteeksi.

Miten Minnan pitää valita alueen muoto, jotta sen ala olisi mahdollisimman iso?

[Vihje]

Tehtävä 41. Minna rakentaa jälleen uuden aitauksen. Jos hän haluaa jakaa sen $k \in \mathbb{Z}_+$ yhtä suureksi pieneksi suorakaiteeksi,

ja aitamateriaalia on 1200 m, niin miten hänen kannattaa rakentaa aitaus, jotta sen ala olisi mahdollisimman iso?

Kommentti. Tämän tehtävän tapaus $k = 3$ esiintyi (hieman eri kehyskertomuksella ja lukuarvoilla) syksyn 2018 ylioppilaskoetehtävissä. Tehtävä on ratkaistavissa myös derivaatan avulla, mikä on tyypillisempi lähestymistapa suomalaisessa lukioperinteessä.

[Vihje]

Tehtävä 42. Olkoot a ja b reaalilukuja, joille $0 \leqslant a \leqslant 1$ ja $0 \leqslant b \leqslant 1$. Todista epäyhtälö

$$\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} \leqslant 1.$$

Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

[Vihje]

Tehtävä 43. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$ ja $0 \leqslant c \leqslant 1$. Todista epäyhtälö

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leqslant 1.$$

[Vihje]

Tehtävä 44. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4.$$

[Vihje]

Tehtävä 45. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Etsi kaikki positiiviset reaaliluvut x, joilla lausekkeen

$$\frac{x}{(x+a)(x+b)}$$

arvo on suurin mahdollinen.

[Vihje]

5 Keskiarvojen yleistykset useammalle luvulle

Aiemmin esitellyt erilaiset keskiarvot voidaan yleistää useammalle kuin kahdelle luvulle. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Määritellään luvuille seuraavat keskiarvot.

Aritmeettinen keskiarvo	$A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$
Geometrinen keskiarvo	$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
Harmoninen keskiarvo	$H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$
Kontraharmoninen keskiarvo	$C = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$
Kvadraattinen keskiarvo	$Q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$

Keskiarvoille pätee yhä epäyhtälö

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q \leqslant C,$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Todistamme osan näistä epäyhtälöistä. Aloitetaan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistaminen tapauksesta $n = 4$.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö kolmelle ja neljälle muuttujalle

Neljän muuttujan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö. Olkoot a, b, c ja d epänegatiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd},$$

ja tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $a = b = c = d$.

Todistus. Käyttämällä kahden muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kahdesti näemme, että

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Lisäksi ensimmäisessä arviossa $\geqslant$ vallitsee yhtäsuuruus täsmälleen silloin, kun sekä $a = b$ että $c = d$. Jälkimmäisessä arviossa $\geqslant$ yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $\sqrt{ab} = \sqrt{cd}$. Kun $a = b$ ja $c = d$, on $\sqrt{ab} = \sqrt{cd}$ yhtäpitävää sen kanssa, että $a = c$, eli yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $a = b = c = d$.

Lause. *Kolmen muuttujan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö: Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

ja tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $a = b = c$.

Todistus. Soveltamalla neljän muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä lukuihin a, b, c ja $\sqrt[3]{abc}$, saamme

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}},$$

missä yhtäsuuruus vallitsee täsmälleen silloin, kun $a = b = c = \sqrt[3]{abc}$. Ja tietenkin nämä viimeiset yhtäsuuruudet pätevät täsmälleen silloin, kun $a = b = c$. Lisäksi todistamamme epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{a+b+c}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} - \frac{\sqrt[3]{abc}}{4},$$

mikä sievenee muotoon

$$a+b+c \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} - \sqrt[3]{abc}.$$

Sievennetään epäyhtälön oikeaa puolta erikseen:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} - \sqrt[3]{abc} &= 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{abc}} - \sqrt[3]{abc} \\ &= 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^4} - \sqrt[3]{abc} \\ &= 4\sqrt[3]{abc} - \sqrt[3]{abc} \\ &= 3\sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Saatiin siis

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}\,,$$

josta saadaan haluttu tulos

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Nyt kun kolmen ja neljän muuttujan tapaukset aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä on todistettu, niitä voidaan soveltaa huoletta. Yleinen tapaus todistetaan lopuksi.

Esimerkki 1. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Ratkaisu. Jaetaan vasemman puolen termit kukin neljään yhtä suureen osaan ja ryhmitellään ne sopivasti:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{a^4 + a^4 + a^4 + a^4}{4} + \frac{b^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4} + \frac{c^4 + c^4 + c^4 + c^4}{4} \\ &= \frac{a^4 + a^4 + b^4 + c^4}{4} + \frac{b^4 + b^4 + c^4 + a^4}{4} + \frac{c^4 + c^4 + a^4 + b^4}{4}. \end{aligned}$$

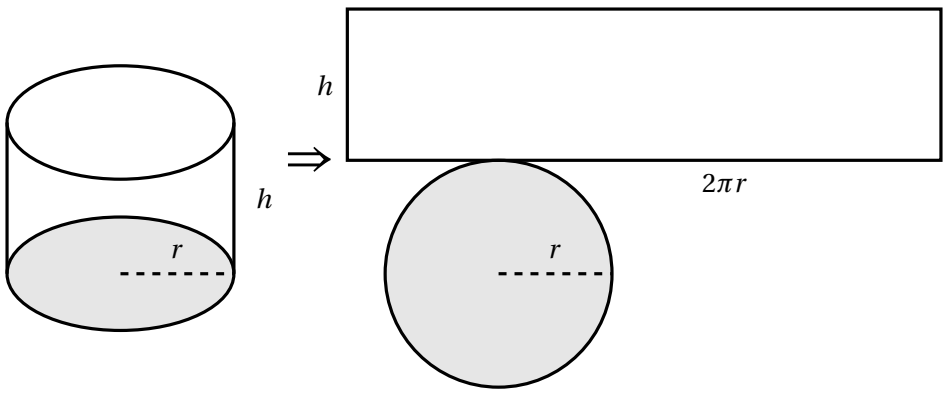
Sovelletaan neljän muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä näihin kolmeen nelikkoon, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{a^4 + a^4 + b^4 + c^4}{4} + \frac{b^4 + b^4 + c^4 + a^4}{4} + \frac{c^4 + c^4 + a^4 + b^4}{4} \\ &\geqslant \sqrt[4]{a^4a^4b^4c^4} + \sqrt[4]{b^4b^4c^4a^4} + \sqrt[4]{c^4c^4a^4b^4} \\ &= a^2bc + b^2ca + c^2ab. \end{aligned}$$

Esimerkki 2. Asukokonaisuus koostuu housuista, paidasta ja hatusta. Kuinka monta vaatekappaletta pitää vähintään hankkia, jos halutaan varmistaa, että vuoden jokaisena päivänä, eli 365 päivänä on päällä erilainen asukokonaisuus?

Ratkaisu. Mikäli housujen määrä on a, paitojen b ja hattujen c, vaaditaan, että abc on vähintään 365. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö kertoo, että lukujen aritmeettinen keskiarvo on vähintään yhtä suuri kuin geometrinen keskiarvo, eli $(a+b+c)/3 \geqslant \sqrt[3]{abc}$. Kysytty vaatekappaleiden määrä on $a+b+c$, jonka on siis oltava vähintään $3 \cdot \sqrt[3]{365} = 21{,}43\ldots$, eli kokonaislukuna vähintään 22. Valitsemalla 8 housut, 7 paitaa ja 7 hattua saadaan $7 \cdot 7 \cdot 8 = 392$ erilaista asukokonaisuutta.

Esimerkki 3. Olkoon V positiivinen reaaliluku. Millä suoran sylinterin muotoisella ämpärillä, jonka tilavuus on V, on pienin vaipan ja pohjan yhteenlaskettu pinta-ala?



Ratkaisu. Olkoon tarkasteltavan sylinterin pohjan säde $r > 0$ ja olkoon sen korkeus $h > 0$. Tarkasteltavan sylinterin tilavuus on pohjan ala kertaa korkeus: $V = A_p h = \pi r^2 h$ ja sen vaipan ja pohjan yhteenlaskettu ala on $A = 2\pi rh + \pi r^2$. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön versiota

$$a + b + c \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{abc}$$

kolmelle epänegatiiviselle reaaliluvulle a, b ja c hyödyntäen saadaan

$$\begin{aligned} A = 2\pi rh + \pi r^2 = \pi rh + \pi rh + \pi r^2 &\geqslant 3\sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot \pi r^2} \\ &= 3\sqrt[3]{\pi}\sqrt[3]{\pi^2 h^2 r^4} = 3\sqrt[3]{\pi}\sqrt[3]{\left(\pi r^2 h\right)^2} \\ &= 3\sqrt[3]{\pi}\sqrt[3]{V^2}, \end{aligned}$$

missä yhtäsuuruus saavutetaan täsmälleen silloin kun $\pi hr = \pi r^2$, eli kun $h = r$. Tällöin $h = r = \sqrt[3]{V/\pi}$.

Materiaalin kulutuksen suhteen taloudellisin ämpäri on siis sellainen, jossa pohjan säde on sama kuin ämpärin korkeus. Valitettavasti tällainen ämpäri on ikävän muotoinen kantaa, ainakaan sangasta. Esimerkiksi kymmenen litran ämpärin korkeudeksi tulisi

$$h = \sqrt[3]{V/\pi} = \sqrt[3]{10\,\mathrm{dm}^3/\pi} = 1{,}471\ldots\,\mathrm{dm} \approx 15\,\mathrm{cm};$$

pohjan halkaisija olisi $2r \approx 29\,\mathrm{cm}$. Astia muistuttaa siis pikemminkin vesisoikkoa kuin ämpäriä.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 46. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

[Vihje]

Tehtävä 47. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

[Vihje]

Tehtävä 48. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Todista kolmen muuttujan geometris-harmoninen epäyhtälö

$$\sqrt[3]{xyz} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

[Vihje]

Tehtävä 49. Tutki, päteekö tehtävän 34 tulos kolmen muuttujan tapauksessa.

[Vihje]

Tehtävä 50. Ravintola Seijan MegaNuudeli myy ateriakokonaisuutta, johon kuuluu alkupala, keitto, pääruoka ja jälkiruoka. Ravintola mainostaa, että tästä menusta on olemassa yli 1000 versiota. Kuinka monta eri annosta listalla täytyy vähintään olla yhteensä, jotta tämä olisi mahdollista?

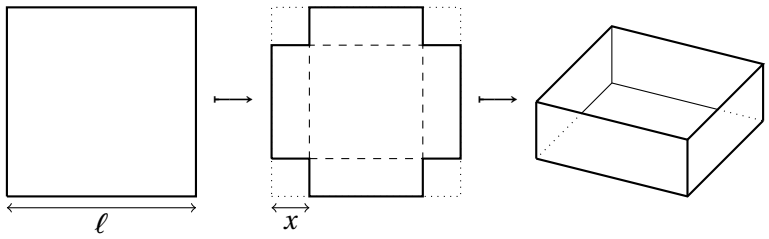
[Vihje]

Tehtävä 51. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

[Vihje]

Tehtävä 52. Ohut metallilevy on neliön muotoinen, ja sen sivun pituus on ℓ. Sen jokaisesta nurkasta leikataan pois $x \times x$ -neliö, missä $x < \ell/2$, ja sitten reunat taitetaan pystyyn niin, että saadaan (kanneton) suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko, jonka pohja on neliö. Miten x pitää valita, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



[Vihje]

Tehtävä 53. Olkoon V positiivinen reaaliluku. Mitkä ovat sen suorakulmaisen särmiön mitat, jolla on tilavuus V ja pienin mahdollinen pinta-ala?

[Vihje]

Tehtävä 54. Tehtävässä 5 todistettiin kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätevä kaava

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot \frac{1}{2} \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2).$$

Sen avulla voidaan todistaa varsin lyhyesti kolmen muuttujan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

epänegatiivisille reaaliluvuille x, y ja z. Mitenhän?

[Vihje]

Tehtävä 55. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2} \geqslant a^4 + b^4.$$

[Vihje]

6 Yleinen aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ epänegatiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Lisäksi tässä vallitsee yhtäsuuruus täsmälleen silloin, kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Esitämme todistuksen tälle vasta kappaleen lopussa. Harjoitellaan ensin epäyhtälön soveltamista.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 56. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}.$$

[Vihje]

Tehtävä 57. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita geometris-harmoninen epäyhtälö

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

ja osoita, että yhtäsuuruus vallitsee tässä jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Käytä apuna aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.

[Vihje]

Tehtävä 58. Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Todista, että niille pätee epäyhtälö

$$a^7 + b^7 + c^7 \geqslant a^2 b^2 c^2 (a+b+c).$$

[Vihje]

Tehtävä 59. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $n > 1$ on

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) < n^n.$$

[Vihje]

Yleisen aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistus

Lupasimme esittää todistuksen aritmeettis-geometriselle epäyhtälölle yleisessä tapauksessa. Tässä olisi yksi sellainen:

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ epänegatiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Todistus. Jos väitetty epäyhtälö ei päde kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, niin on olemassa pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla epäyhtälö ei päde. Löytyy siis epänegatiiviset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joilla

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Kunhan osoitamme, että tämä on mahdotonta, seuraa ristiriidasta, että oletus epäyhtälön virheellisyydestä muuttujan n tapauksessa on väärä, ja epäyhtälö on todistettu oikeaksi.

Tiedämme, että varmasti $n > 1$, sillä

$$\frac{a_1}{1} = a_1 \geqslant a_1 = \sqrt[1]{a_1}.$$

Samoin, on oltava $n > 2$, sillä tiedämme jo, että aina

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}.$$

Seuraavaksi toteamme, että n ei voi olla parillinen. Nimittäin, jos oletamme, että n on parillinen, niin aritmeettis-geometrisen epäyhtälön pitäisi kuitenkin päteä pienemmille lukumäärille, erityisesti $n/2$ muuttujalle ja kahdelle muuttujalle. Näiden avulla voidaan arvioida:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}}{n/2} \\
&\geqslant \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \ldots + \sqrt{a_{n-1} a_n}}{n/2} \\
&\geqslant \sqrt[n/2]{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4} \cdots \sqrt{a_{n-1} a_n}} \\
&= \sqrt[n/2]{\sqrt{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n}} \\
&= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},
\end{aligned}$$

mikä tuottaa halutun ristiriidan.
Viimeinen välivaihe $\sqrt[n/2]{\sqrt{x}} = \sqrt[n]{x}$ voidaan perustella korottamalla yhtälön kumpikin puoli potenssiin $\frac{n}{2}$ ja sitten potenssin 2. Murtopotenssimerkinnällä lasku käy näppärämmin: $\sqrt[n/2]{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Osoitetun ristiriidan vuoksi pienin luku n, jolla epäyhtälö ei toteudu, ei voi olla parillinen. Näin ollen mahdollisen pienimmän toimimattoman luvun n on oltava pariton. Voimme siis kirjoittaa luvun n muodossa $n = 2k-1$.

Seuraavassa päättelyssä tarvitaan tietoa siitä, että $n > k$. Tämä seuraa siitä, että koska n on vähintään 3, täytyy luvun k olla vähintään 2, ja silloin $n = 2k-1 = k+k-1 > k$.

Määritellään $a_{2k} = a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Nyt voimme arvioida, kuten aiemminkin, soveltaen k muuttujan ja 2 muuttujan aritmeettis-geometrisia epäyhtälöitä, että

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{a_1+\ldots+a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2} \\
&\geqslant \frac{\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \cdots a_{2k}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} \cdots a_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 \cdots a_{2k}} = \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n a_{n+1}} = \sqrt[n+1]{(a_{n+1})^n a_{n+1}} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Siis pätee

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geqslant a_{n+1}.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n+1} &\geqslant a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{n \cdot a_{n+1}}{n+1},
\end{aligned}$$

ja lopuksi, että

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

mikä tuottaa halutun ristiriidan.

Meidän on vielä todistettava aritmeettis-geometrisen epäyhtälön yhtäsuuruusehto:

Lause. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ epänegatiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

vain ja ainoastaan silloin, kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Todistus. Jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, niin silloin luonnollisesti

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{n \cdot a_1}{n} = a_1 = \sqrt[n]{a_1^n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Olkoot sitten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ epänegatiivisia reaalilukuja, joille

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Haluaisimme osoittaa, että luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat kaikki keskenään yhtä suuria. Olettakaamme tätä varten, että ne eivät ole kaikki yhtä suuria. Nyt jotkin kaksi niistä ovat erisuuria. Järjestämällä luvut $a_1, \ldots, a_n$ eri järjestykseen, jos tarpeen, voimme

olettaa, että $a_1 \neq a_2$. Nyt voimme johtaa ristiriidan käyttämällä kahden muuttujan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön yhtäsuuruusehtoa arvioimalla

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot a_3 \cdots a_n}$$
$$\leqslant \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Näin on koko todistus vihdoin saatu valmiiksi. Jos haluat harjoitella näin monimutkaisen todistuksen tekemistä, kirjoita oma versiosi kopioiden tätä rivi riviltä. Pysähdy aina kun et ymmärrä jotakin, ja etene vasta kun kaikki on selvää. Päädyt todennäköisesti kirjoittamaan lisää välivaiheita ja selityksiä, mikä onkin erittäin hyvä idea. Tällä tavoin monet matemaatikotkin opiskelevat.

Lopuksi

Tähän päättyy Pitkän matematiikan lisäsivut 2. Mukavaa, että luit tänne asti! (Oli urakkasi sitten kesken tai valmis.)

Tarina jatkuu osassa kolme, jossa syvennymme geometriaan. Teroita harppisi!

Ensimmäiset vihjeet

Tehtävä 1.
Vihje.
Voi olla otollista kirjoittaa seuraavasti:

a) $103^2 = (100+3)^2 = \ldots$
b) $98^2 = (100-2)^2 = \ldots$
c) $101 \cdot 99 = (100+1)(100-1) = \ldots$
d) $58 \cdot 62 = (60-2)(60+2) = \ldots$.

Kohta c tosin taitaa olla yhtä helppo laskea ilman muistikaavaakin.

Vastaukset voi tarkistaa toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 2.
Vihje.
Voisiko lausekkeen $a^2 - b^2$ kirjoittaa toisin?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 3.
Vihje.
Kussakin kaavassa kannattaa lähteä sieventämään sitä puolta yhtälöstä, jossa on sulkeita. Kun sulkeet on kerrottu auki, tuloksen pitäisi olla pienen sievennyksen jälkeen sama kuin toisella puolella yhtälöä.

Esimerkiksi kaavan

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

todistaaksesi lähde sieventämään vasenta puolta:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= \ldots\end{aligned}$$

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 4.
Vihje.
Taitaa löytyä! Pohdi, miten termit kumoutuvat laskussa

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = \cdots = a^3 - b^3.$$

Miten samankaltaisesta laskusta tulisi tulokseksi $a^4 - b^4$?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 5.
Vihje.
Kannattaa aloittaa kertomalla kaikki sulut auki keskimmäisestä lausekkeesta

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 6.
Vihje.

Poimi kertoimet Pascalin kolmiosta. Kohdassa b kannattaa ajatella lauseketta muodossa

$$(a-b)^6 = (a+(-b))^6,$$

jolloin a-kohdan tulokseen voi sijoittaa muuttujan b paikalle lausekkeen $(-b)$. Ole tarkkana merkkien kanssa!

Vastaavasti d-kohdassa lauseketta voi ajatella muodossa $((2x)+(-3))^4$.

Voit tarkistaa vastaukset toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 7.
Vihje.
Tässä pystyy ovelasti hyödyntämään binomikaavaa

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Voisiko yhtälöä muokata niin, että vasemmalle puolelle muodostuisi binomin kuutio?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 8.
Vihje.
Potenssit kannattaa kirjoittaa auki binomikaavan avulla.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 9.
Vihje.

Suoraan kaavaan sijoittaen saadaan

$$\binom{21}{3} = \frac{21!}{3! \cdot 18!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 18}.$$

Tämä taitaa supistua aika paljon. Voit tarkistaa vastauksen toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 10.
Vihje.
Pascalin kolmion ominaisuudet voi tiivistää kahteen seikkaan: Ensinnäkin reunoilla olevat luvut ovat ykkösiä, eli

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{ja} \quad \binom{n}{n} = 1$$

kaikilla epänegatiivisilla luvuilla n. Toisekseen kaikki luvut, jotka eivät ole reunalla, ovat kahden ylemmän summia, eli

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

kun k ja n ovat kokonaislukuja, joille $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Jos saat osoitettua, että lausekkeella

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

on nämä samat ominaisuudet, todistus on valmis.

Ensimmäisen ominaisuuden todistaaksesi osoita, että

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1.$$

Nämä ovat lyhyitä sievennyksiä.

Toinen ominaisuus

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

kuuluu kertomalausekkeiksi kirjoitettuna

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Jotta saisit osoitettua sen todeksi, sievennä vasenta puolta laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 11.
Vihje.
Luvut 1, 2, 3, ..., n esiintyvät peräkkäin Pascalin kolmiossa.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 12.
Vihje.
Vastaukset ovat

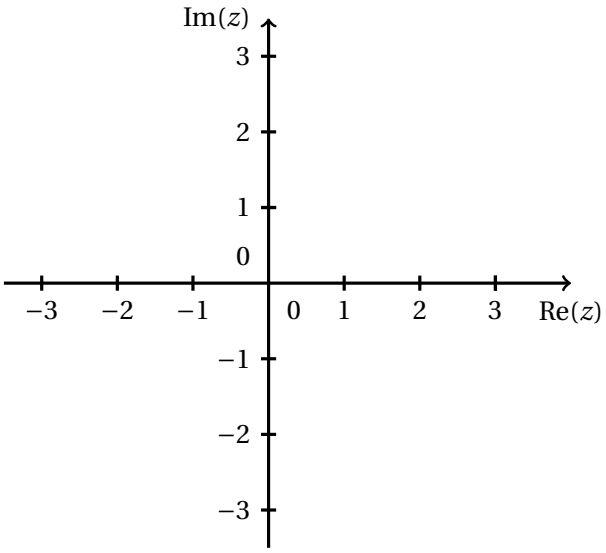
$$\begin{aligned} z+w &= 8-i, \\ z-w &= -2-3i, \\ z\cdot w &= 17-7i, \\ \frac{z}{w} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Mikäli et saanut näitä tuloksia, tutki sivun 14 esimerkkiä.

Jakolaskun osalta kannattaa katsoa vinkkiä sivulta 16.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 13.
Vihje.
Kompleksitason pitäisi näyttää tällaiselta:



Katso pisteiden sijoitteluun mallia sivun 14 esimerkistä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 14.
Vihje.

a) Muista, että $|z|$ kuvaa etäisyyttä origosta.
b) Re z kuvaa kompleksiluvun z reaaliosaa eli vaakakoordinaattia kompleksitasossa.

c) Yhtälö Re $z = \text{Im}\, z$, pätee kaikille kompleksiluvuille z, joiden vaaka- ja pystykoordinaatit kompleksitasossa ovat samat.
d) Mieti lukujen z ja $z - i$ sijaintia kompleksitasossa. Milloin jälkimmäinen luku on lähempänä origoa?

Voit myös edetä laskemalla. Jos merkitään reaalilukuja x ja y käyttäen $z = x + iy$, saadaan epäyhtälö $|x + iy - i| < |x + iy|$ eli

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tämän voi ratkaista korottamalla puolittain toiseen potenssiin.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 15.
Vihje.
Käytä normaaliin tapaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Luvun $\sqrt{-4}$ laskemiseksi katso mallia esimerkistä sivulla 16.

Toinen (varsin suositeltava) vaihtoehto on täydentää lauseke neliöksi $(2z-1)^2$, jolloin ratkaisukaavaa ei tarvita.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 16.
Vihje.
Kompleksiluvut z ja w toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} z + w &= 2 + 2i, \\ wz &= -4 + 2i. \end{cases}$$

Ratkaise ylemmästä $w = 2 + 2i - z$ ja sijoita se alempaan. Saat toisen asteen yhtälön.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 17.
Vihje.
Merkitse $z = a + bi$ ja $w = c + di$, missä a, b, c ja d ovat reaalilukuja. Lähde sieventämään kunkin lausekkeen vasenta puolta, esimerkiksi a-kohdassa

$$\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)\, i} = \ldots$$

Tavoitteena on saada muokattua lauseke muotoon $\overline{z} + \overline{w}$.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 18.
Vihje.

Eri ohjelmissa imaginaariyksikön syöttäminen on toteutettu eri tavalla, tarkista mikä toimii. Jos kompleksiluvuille ei löydy sisäänrakennettua tukea, lausekkeen $g(x,y) = |(x + iy)^3 - 1|$ voi korvata ”sievennetyllä” muodolla

$$g(x,y) = \sqrt{(x^3 - 3xy^2 - 1)^2 + (3x^2 y - y^3)^2}.$$

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 19.
Vihje.
Lauseketta $z^3 - 1$ kannattaa yrittää jakaa tekijöihin. Koska $z = 1$ on lausekkeen nollakohta, yksi tekijöistä on $z - 1$.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 20.
Vihje.
Vasen puoli auki kertomalla saadaan yhtälö

$$(x + iy)^2 = 2i$$

muokattua muotoon

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 2i,$$

joten lukujen x ja y on toteutettava yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ \quad 2xy = 2. \end{cases}$$

Ratkaise tämä yhtälöpari.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 21.
Vihje.
Tämä tehtävä on varsinainen odysseia, joten ei kannata lannistua, jos ratkaisu ei heti löydy.

Koska on oltava

$$a + bi = \big(x + yi\big)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

lukujen x ja y on toteutettava yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ \quad 2xy = b. \end{cases}$$

Ratkaise tästä $y = \frac{b}{2x}$ ja sijoita ylempään yhtälöön. Nyt voit ratkaista luvun x.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 22.
Vihje.
Tässä ei kannata tehdä pitkiä laskuja, tai oikeastaan laskuja ollenkaan. Vertaa yksittäisiä lukupareja ja yritä rakentaa järjestystä sitä kautta.

Voit tarkistaa vastauksen toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 23.
Vihje.
Lukujen $a+b$ ja $a-b$ käänteislukujen keskiarvo on

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right).$$

Lavenna keskiarvossa molemmat termit samannimisiksi ja sievennä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 24.
Vihje.
Kannattaa laskea lukujen erotus. Kovan sieventämisen jälkeen suuruusjärjestyksen voi päätellä siitä, onko erotus positiivinen vai negatiivinen. Voit aloittaa sieventämisen laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 25.
Vihje.
Tarkastele ensin tapausta $a = b$. Onko epäyhtälö tosi?

Tutki sitten tapausta $a > b$. (Tapausta $b > a$ ei tarvitse erikseen tarkastella, sillä epäyhtälö on symmetrinen lukujen a ja b suhteen.) Yritä muokata todistettavaa epäyhtälöä niin, että löydät yhteisen tekijän $a-b$ molemmilta puolilta.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 26.
Vihje.
Kannattaa siirtää kaikki termit samalla puolelle epäyhtälöä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 27.
Vihje.
Epäyhtälö kannattaa kirjoittaa muotoon

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 0.$$

Nyt ollaankin itse asiassa lähellä ratkaisua. Miten lauseke

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

liittyy asiaan?

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

Toisessa vihjeessä on tarjolla kokonainen ratkaisu tähän tehtävään.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 28.
Vihje.
Tehtävä on selvästi sukua edelliselle. Tässä voi olla hyödyllistä kirjoittaa $x = (\sqrt{x})^2$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 29.
Vihje.
Mitä tapahtuu, jos kaikki viisi yhtälöä laskee puolittain yhteen?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 30.
Vihje.
Reaaliluvuille a ja b pätee

$$(a-b)^2 \geqslant 0,$$

eli toisin kirjoitettuna

$$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0.$$

Voisiko todistettavaa epäyhtälöä muokata tähän suuntaan?

Toisessa vihjeessä näet kaksi kokonaista ratkaisua, joihin voit verrata omia ajatuksiasi.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 31.
Vihje.
Tässä voisi olla hyödyksi korottaa aluksi epäyhtälön molemmat puolet toiseen potenssiin. Ratkaisu etenee samaan tapaan kuin edellisen tehtävän toisen vihjeen tapa 1.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 32.
Vihje.
Kannattaa hyödyntää jo todistettua aritmeettis-geometrista epäyhtälöä. Käänteislukuihin vaihtamalla epäyhtälö $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ saa yhtäpitävän muodon

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}.$$

Voisiko tämän todistaa soveltamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä epäyhtälön oikeaan puoleen?

Toinen, hieman pidempi vaihtoehto on tässäkin korottaa epäyhtälö toiseen potenssiin puolittain. Lasku voi olla helpompi, jos oikeaa puolta sieventää mahdollisimman pitkälle ennen toiseen potenssiin korottamista.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 33.
Vihje.
Kannattanee taas korottaa ensin epäyhtälö puolittain toiseen potenssiin. Syntyvistä sievennysongelmista lisää toisessa vihjeessä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 34.
Vihje.
Tässä harmoninen keskiarvo on kenties kätevämpi kirjoittaa muodossa

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Sievennä rohkeasti.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 35.
Vihje.
Ensinnäkin: he eivät saavu perille yhtä nopeasti. Ratkaisemisen voi aloittaa vaikkapa kirjoittamalla Aarnen ja Bertan matka-ajat t_A ja t_B etäisyyden d ja nopeuksien v_1 ja v_2 avulla. Hyödynnä kaavaa

$$\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}, \quad \text{eli} \quad \text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}.$$

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 36.
Vihje.
Tässä voi käyttää kahden muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä vasemman puolen summaan. Voit nimittäin kirjoittaa epäyhtälön vasemman puolen muotoon $\frac{2a+8b}{2}$, jolloin kyseessä on lukujen $2a$ ja $8b$ keskiarvo.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 37.
Vihje.
Tässä voi soveltaa kahden muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä vasemman puolen jokaiseen tekijään erikseen.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 38.
Vihje.
Millaisen arvion saat summalle $2x + y$ aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä? Milloin arviossa vallitsee yhtäsuuruus?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 39.
Vihje.
Nimeä aidan sivut, ja kirjoita sekä aidan kokonaispituus että aidatun alueen pinta-ala näiden avulla. Voiko aidan pituutta arvioida aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä? Milloin arviossa vallitsee yhtäsuuruus?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 40.
Vihje.
Jälleen kannattaa nimetä sivut ja kirjoittaa aidan kokonaispituus ja aidattu ala näiden avulla. Nämä voi kytkeä jälleen toisiinsa aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä.

Voit tarkistaa vastauksen toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 41.
Vihje.
Kirjoita aidan pituus ja aitausten yhteispinta-ala aidanpätkien pituuksien a ja b sekä lukumäärän k avulla. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö puree tähänkin.

Voit tarkistaa oikean lausekkeen toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 42.
Vihje.
Tässä voi soveltaa kahden muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kahdesti.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 43.
Vihje.
Tässä voi itse asiassa soveltaa edellisen tehtävän tulosta.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 44.
Vihje.
Mitä tapahtuu, jos vasemman puolen kumpaankin tekijään soveltaa aritmeettis-geometrista epäyhtälöä?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 45.
Vihje.
Tässä kannattaa etsiä mieluummin lausekkeen $\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$ pienimpiä arvoja.

Voit tarkistaa lopputuloksen toisesta vihjeestä.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 46.
Vihje.
Mitä tapahtuu, jos vasemman puolen summaan soveltaa suoraan kolmen muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 47.
Vihje.
Tässä vasemman puolen jokaisen termin voi jakaa kolmeen yhtä suureen osaan, ja soveltaa kolmen muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä sopiviin kolmasosien kolmikoihin. Vertaa esimerkkiin 1 sivulla 39.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 48.
Vihje.
Mitä tapahtuu, jos kolmen muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä soveltaa lukuihin $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ja $\frac{1}{z}$?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 49.
Vihje.
Tällaisessa tehtävässä täytyy joko todistaa tulos oikeaksi tai osoittaa, että on olemassa vastaesimerkki, esimerkiksi löytämällä yksittäiset luvut, joilla tulos ei päde. Jos vastaesimerkin löytäminen on mahdollista, se voisi olla kohtuullisen helppoa. Kannattaa siis kokeilla sitä ensin.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 50.
Vihje.
Jos erilaisia alkupaloja on a kappaletta, keittoja b kappaletta, pääruokia c kappaletta ja jälkiruokia d kappaletta, erilaisten ateriakokonaisuuksien lukumäärä on $abcd$. Miten tämä on yhteydessä annosten kokonaismäärään $a+b+c+d$?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 51.
Vihje.
Tässä oikean puolen hankalista käänteisluvuista voi yrittää päästä eroon aritmeettis-harmonista epäyhtälöä soveltamalla.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 52.
Vihje.
Tässä kannattaa ensin kirjoittaa tilavuudelle lauseke, jossa esiintyvät x ja ℓ. Tilavuus on eräänlainen tulo, ja aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä voi arvioida tuloa ylhäältä päin lausekkeella, jossa esiintyy tulontekijöiden summa. Voitko laventaa tekijöitä jotenkin niin, että tekijöiden summassa ei sievennyksen jälkeen enää esiintyisi tuntematonta x?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 53.
Vihje.
Nimeä särmiön särmät esimerkiksi a, b ja c. Pinta-ala on tahkojen alojen summa. Voisiko siihen soveltaa aritmeettis-geometrista epäyhtälöä?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 54.
Vihje.
Huomioi, että kun a, b ja c ovat epänegatiivisia reaalilukuja, myös yhtälön

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

oikea puoli on epänegatiivinen. Miksi?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 55.
Vihje.
Tässä kummankin termin epäyhtälön vasemmalla puolella voi jakaa neljään yhtä suureen osaan. Sitten voi kokeilla käyttää aritmeettis-geometrista epäyhtälöä sellaisiin termiyhdistelmiin, missä nimittäjät supistuvat pois geometrisessa keskiarvossa.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 56.
Vihje.
Tässä summan $a + nb$ voi kirjoittaa muodossa $a + b + b + \ldots + b$ missä b esiintyy n kertaa.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 57.
Vihje.
Mitä aritmeettis-geometrisen epäyhtälön tuloksessa tapahtuu, jos luvut $a_1, \ldots, a_n$ korvaakin luvuilla $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 58.
Vihje.
Tässä voi pilkkoa vasemman puolen jokaisen termin seitsemään yhtä suureen osaan ja soveltaa seitsemän muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kolmesti.

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Tehtävä 59.
Vihje.
Tässä luvut $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ kannattaa sijoittaa aritmeettis-geometriseen epäyhtälöön. Millainen lauseke olikaan olemassa summalle $1+3+5+\ldots+(2n-1)$?

[Takaisin tehtävään] [Toinen vihje]

Toiset vihjeet

Tehtävä 1.
Toinen vihje.
Vastauksiksi pitäisi tulla

a) $103^2 = 10\,609$,
b) $98^2 = 9\,604$,
c) $101 \cdot 99 = 9\,999$,
d) $58 \cdot 62 = 3\,596$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 2.
Toinen vihje.
Muistikaavan avulla voidaan kirjoittaa kokonaislukuja a ja b koskeva ehto muotoon

$$(a+b)(a-b) = 17.$$

Luvut $a+b$ ja $a-b$ ovat myös kokonaislukuja. Miksi?

Itse asiassa luvut $a+b$ ja $a-b$ ovat *positiivisia* kokonaislukuja. (Miksi luvun a täytyy olla suurempi kuin luvun b?)

Mieti, minkä kahden positiivisten luvun tulo on 17. Vaihtoehtoja taitaa olla vain yksi. Voit siis kirjoittaa yhtälöparin

$$\begin{cases} a+b = \ldots, \\ a-b = \ldots, \end{cases}$$

josta luvut a ja b ratkeavat.

Oikeat luvut löytyvät varmasti myös kokeilemalla, mutta jonkinlainen perustelu (edellä esitetyn kaltainen tai toisenlainen) tarvitaan varmistamaan, ettei muita ratkaisuja ole.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 4.
Toinen vihje.
Tapauksessa $n = 4$ kaava näyttää tältä:

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3).$$

Osaatko yleistää lausekkeille $a^5 - b^5$ ja $a^n - b^n$?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 5.
Toinen vihje.
Toisen yhtäsuuruuden voi perustella kertomalla viimeisen lausekkeen loppuosan

$$\frac{1}{2} \cdot \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

auki.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 6.
Toinen vihje.
Vastaukset ovat

a) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$,
b) $(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$,
c) $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$,
d) $(2x-3)^4 = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 7.
Toinen vihje.
Yhtälöön kannattaa lisätä puolittain yksi, jolloin se saa muodon

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 5.$$

Näetkö vasemmalla puolella binomin kuution?

Vastaukseksi pitäisi lopulta tulla $x = \sqrt[3]{5} - 1$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 8.
Toinen vihje.
Binomikaavan soveltamisen jälkeen ne termit, joissa esiintyy parillinen luvun $\sqrt{7}$ potenssi ovat kokonaislukuja. Mitä tapahtuu niille termeille, joissa esiintyy pariton luvun $\sqrt{7}$ potenssi? Pohdi termien merkkejä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 9.
Toinen vihje.
Vastaukseksi pitäisi tulla

$$\binom{21}{3} = 1330.$$

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 10.
Toinen vihje.
Lauseke

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

sievenee muotoon

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}.$$

Kun murtolausekkeet laventaa luvuilla k ja $n-k$, niillä on samat nimittäjät. Kun osoittajassa ottaa yhteiseksi tekijäksi termin $(n-1)!$, kaikki sievenee sopivasti ja tuloksena on haluttu lauseke

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 11.
Toinen vihje.
Pascalin kolmiossa luvut 1, 2, ..., n ovat binomikertoimet $\binom{1}{1}$, $\binom{2}{1}$, ..., $\binom{n}{1}$. Lisäksi Pascalin kolmiossa pätee $\binom{1}{1} = \binom{2}{2}$ sekä

$$\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}, \qquad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}, \qquad \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2},$$

ja niin edelleen. Miten summa

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{n}{1}$$

sievenee?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 15.
Toinen vihje.
Sievennyksen jälkeen ratkaisujen pitäisi olla $z = \frac{1}{2} \pm i$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 17.
Toinen vihje.
Jos sievennys on työlästä, kannattaa sieventää lausekkeen kumpaakin puolta erikseen. Kohdassa e (joka on työläin) kannattaa yrittää todistaa väitteen neliöity versio $|zw|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$, koska silloin vältetään neliöjuuret. Väitteen vasen puoli sievenee

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= |(a+bi)(c+di)|^2 = \left|ac + adi + bic + bdi^2\right|^2 \\ &= |(ac-bd) + (ad+bc)i|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = \ldots \end{aligned}$$

ja oikea puoli

$$\begin{aligned} |z|^2 |w|^2 &= |a+bi|^2 \cdot |c+di|^2 \\ &= \left(a^2+b^2\right) \cdot \left(c^2+d^2\right) = \ldots \end{aligned}$$

Kun kumpaakin sievennystä jatkaa, molemmat sievenevät muotoon $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$, jolloin tulos $|zw|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$ on todistettu.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 18.
Toinen vihje.
Funktiolla pitäisi olla kolme nollakohtaa. Kuinka etäällä ne näyttävät olevan origosta? Tämä ei ole sattumaa. Nollakohtien tarkkojen arvojen laskeminen on omana harjoitustehtävänään 19.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 19.
Toinen vihje.
Koska $z = 1$ on polynomin $z^3 - 1$ nollakohta, polynomin $z^3 - 1$ voi jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$z^3 - 1 = (z-1)(\text{ jokin toisen asteen polynomi }).$$

Voit selvittää toisen tekijän kokeilemalla, tai käyttämällä kompleksiluvuille a ja b pätevää kaavaa

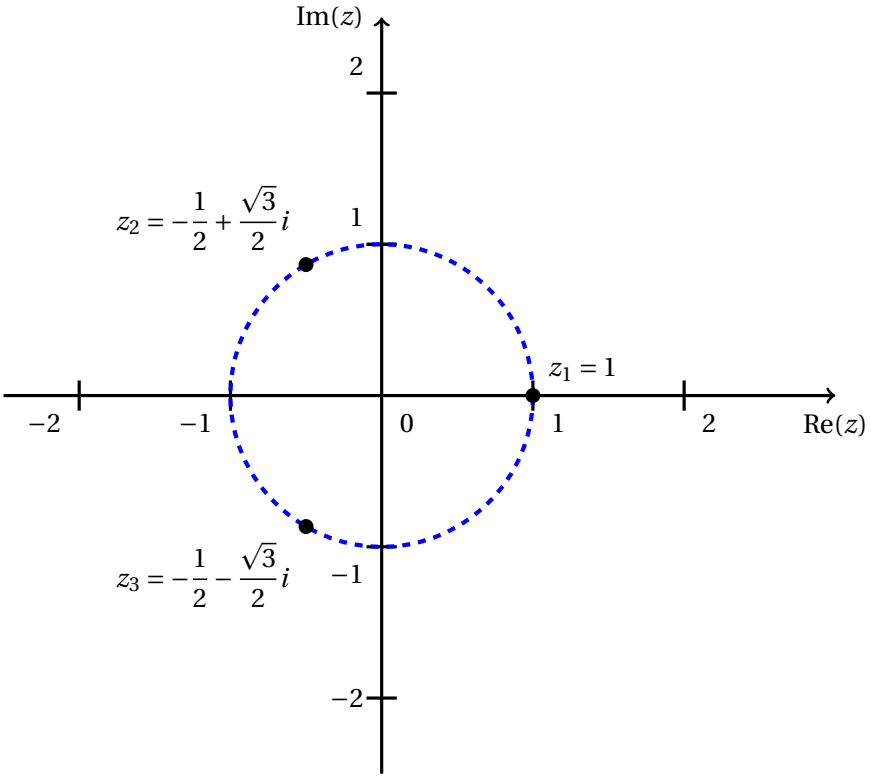
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

jonka todistus oli tehtävänä 3. Tehtävässä 3 tosin puhuttiin reaaliluvuista, mutta koska osittelulaki pätee myös kompleksiluvuille, tulos yleistyy. (Kaavaa voi soveltaa tässä, kun huomataan, että $z^3 - 1 = z^3 - 1^3$.)

Kun tekijät ovat selvillä, voit ratkaista yhtälön tulon nollasääntöä käyttäen. Saat ensimmäisen asteen yhtälön $z - 1 = 0$ ja toisen asteen yhtälön, jonka ratkaisut ovat kompleksisia. Ratkaisuiksi pitäisi tulla

$$z = 1, \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ja} \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Mielenkiintoista kyllä, ratkaisut muodostavat kompeksitasoon tasasivuisen kolmion, jonka kärjet ovat origokeskeisellä ympyrällä, jonka säde on 1.



Tämä ei ole sattumaa, vaan tulos yleistyy: esimerkiksi yhtälön $z^5 = 1$ ratkaisut muodostavat origon ympärille säännöllisen viisikulmion.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 20.
Toinen vihje.
Huomaa, että yhtälö $x^2 = y^2$ toteutuu sekä kun $x = y$, että kun $x = -y$. Nämä voit sijoittaa toiseen yhtälöön yksi kerrallaan.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 21.
Toinen vihje.
Vihjeen 1 lähestymistavalla päädyt jossakin vaiheessa yhtälöön

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a,$$

jonka voi kirjoittaa toisin myös muotoon

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Se ratkeaa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, kunhan tekee ensin sijoituksen $t = x^2$.

Tulokseksi pitäisi tulla

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

eli

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Tämän jälkeen voi ratkaista luvun y sijoittamalla luvun x lausekkeen yhtälöön $y = \frac{b}{2x}$.
Pitäisi siis tulla

$$y = \frac{b}{2x} = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}.$$

Tätä on mahdollista sieventää vielä jonkin verran muistikaavojen avulla. Mukavin muoto lienee

$$y = \pm\frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Koko vastauksen pitäisi siis olla

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right).$$

Päädyt todennäköisesti hieman erilaiseen sievennykseen. Voit tarkistaa tuloksesi korottamalla sen toiseen potenssiin käsin tai vaikkapa symbolisella laskinohjelmistolla ja katsomalla, saatko tulokseksi $a + bi$. Tämä tarkistus on osa täydellistä todistusta joka tapauksessa, sillä ei kai ole lähtökohtaisesti itsestään selvää, että ongelmalla ylipäänsä on ratkaisu, ts. että haluttuja lukuja x ja y on olemassa. Algebran

peruslause kyllä takaa ratkaisun olemassaolon (yhtälöllä $z^2 = a + ib$ on ratkaisu), mutta algebran peruslausetta ei ole tässä materiaalissa todistettu.

Lausekkeen $\frac{b}{|b|}$ arvo on ± 1 sen mukaan, onko $b > 0$ vai $b < 0$. Tätä voidaan merkitä funktiolla

$$\operatorname{sgn} b = \begin{cases} +1, & \text{kun } b > 0, \\ -1, & \text{kun } b < 0. \end{cases}$$

Voidaan siis kirjoittaa vielä mukavammin

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \cdot \operatorname{sgn} b \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 22.
Toinen vihje.
Oikea järjestys on

$$\frac{b+1}{a} > \frac{b}{a} > \frac{a}{b} > \frac{a}{b+1} > \frac{a}{2b}.$$

Osaatko perustella jokaisen epäyhtälön?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 23.
Toinen vihje.
Keskiarvon lauseke on sievennettynä

$$\frac{a}{a^2-b^2}.$$

Nimittäjässä voi arvioida $a^2 - b^2 < a^2$. Mitä tämä kertoo lausekkeiden $\frac{a}{a^2-b^2}$ ja $\frac{a}{a^2}$ suuruusjärjestyksestä?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 24.
Toinen vihje.
Lukujen erotus on sievennettynä

$$\frac{10^{2008} + 10^{2006} - 2 \cdot 10^{2007}}{\left(10^{2007}+1\right)\left(10^{2008}+1\right)}.$$

Tässä kannattaa huomata, että $10^{2007} = 10 \cdot 10^{2006}$ ja $10^{2008} = 100 \cdot 10^{2006}$. Voit siis ottaa osoittajassa luvun 10^{2006} yhteiseksi tekijäksi.

Erotus sievenee lopulta muotoon

$$\frac{81 \cdot 10^{2006}}{\left(10^{2007}+1\right)\left(10^{2008}+1\right)},$$

mistä vastauksen voi päätellä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 25.
Toinen vihje.
Epäyhtälö kannattaa muokata muotoon

$$a^3 - a^2 b \geqslant ab^2 - b^3.$$

Tässä muodossa voit ottaa yhteisiä tekijöitä niin, että kummallekin puolelle jää tekijä $a - b$.

Tapauksessa $a - b > 0$ voit jakaa tekijällä $a - b$ puolittain (miksi?) ja saada yhtäpitävän epäyhtälön, joka on tosi.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 26.
Toinen vihje.
Kun epäyhtälö on muodossa

$$a^2 - 6a + 9 \geqslant 0,$$

voit tunnistaa reaaliluvuille x ja y pätevän, muotoa

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

olevan muistikaavan. Tämän jälkeen todistus on liki valmis, miksi?

Yhtäsuuruus toteutuu vain, kun $a = 3$. Osaatko perustella tämän? Sivun 27 esimerkkilauseen todistukseen vertaaminen voi olla avuksi.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 27.
Toinen vihje.
Tässä on kaksi hieman eri tavoilla muotoiltua ratkaisua tehtävään. Ratkaisujen idea on kyllä aivan sama, mutta ensimmäinen on kirjoitettu ”lukijaystävällisesti”, kun taas jälkimmäisen alku voi näyttää yllättävältä, koska siinä aloitetaan keskeisestä oivalluksesta ilman, että sen syntyhistoriaa näytetään.

Jälkimmäisen todistuksen kaltaisia lukiessaan on hyvä muistaa, että niidenkin takana on tyypillisesti epämääräinen sekamelska ajatuksia, laskuja, piirroksia, yrityksiä, erehdyksiä, symbolipuuroa, virheitä, todistuksenalkuja, todistuksenloppuja, erikoistapauksia ja niin edelleen. Näistä sitten muodostuu erillinen johdonmukainen todistus vasta jälkeenpäin, kun ratkaisija ymmärtää, mitä on tekemässä.

Tapa 1. Muokataan epäyhtälö

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$$

muotoon

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 0.$$

Vasemmalla puolella epäyhtälöä voi hahmottaa reaaliluvuille a ja b pätevän muistikaavan $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ vasemman puolen, kun kirjoittaa $1=x\cdot\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} x^2-2+\frac{1}{x^2} &= x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Epäyhtälö on siis nyt muokattu muotoon

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geqslant 0.$$

Tämä on varmasti totta, sillä neliöluvut ovat epänegatiivisia. Alkuperäinenkin epäyhtälö on siis tosi.

Pitää vielä perustella, miksi yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen silloin, kun $x=\pm 1$. Yhtäsuuruus tarkoittaa tapausta

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2,$$

ja tämä on edellisen sievennyksen perusteella yhtäpitävää yhtälön $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=0$ kanssa. Tämä pätee vain, kun $x=\frac{1}{x}$, eli kun $x^2=1$, eli kun $x=\pm 1$.

Tapa 2.

Väite: $x^2-\frac{1}{x^2}\geqslant 2$ kaikilla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla x, ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $x=\pm 1$.

Todistus: Tutkitaan lauseketta $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$. Koska kyseessä on reaaliluvun neliö, lausekkeen arvo on aina epänegatiivinen:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geqslant 0.$$

Toisaalta voidaan sieventää muistikaavalla

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 &= x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= x^2-2+\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Pätee siis

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}\geqslant 0,$$

josta seuraa

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2,$$

mikä oli todistettava.

Yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=0$, eli kun $x=\frac{1}{x}$, eli kun $x^2=1$, eli kun $x=\pm 1$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 29.
Toinen vihje.
Kun kaikki viisi yhtälöä laskee yhteen ja kaikki termit siirtää toiselle puolelle yhtälöä, kutakin muuttujaa sisältävät lausekkeet on mahdollista täydentää neliöiksi tähän tapaan: $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$.

Tämän jälkeen yhtälö on muodossa

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2u-1)^2 + (2v-1)^2 + (2w-1)^2 = 0,$$

joka voi toteutua vain yksillä lukujen x, y, u, v w arvoilla. Millä?

Tarkista lopuksi, että löytämäsi luvut todella muodostavat alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisun.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 30.
Toinen vihje.
Tässä on kaksi kokonaista ratkaisua. Vertaa omaan ratkaisuusi ja mieti, oletko huomioinut kaiken oleellisen.

Tapa 1. Olkoot a ja b epänegatiivisia reaalilukuja. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

ja edelleen muodossa

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0.$$

Tämän epäyhtälön vasemmalla puolella on itse asiassa lukujen $\sqrt{a}$ ja $\sqrt{b}$ erotuksen neliö (sillä $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$). Epäyhtälön voi siis kirjoittaa muodossa

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0.$$

Tämä epäyhtälö on selvästi tosi, sillä reaalilukujen neliöt ovat epänegatiivisia. Alkuperäinenkin epäyhtälö on siis tosi.

Yhtäsuuruus toteutuu vain, kun $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, eli vain silloin, kun $a = b$.

Tapa 2. Epänegatiivisille luvuille x ja y epäyhtälöt $x \leqslant y$ ja $x^2 \leqslant y^2$ ovat yhtäpitävät, eli samat lukuparit toteuttavat molemmat yhtälöt. (Negatiivisille luvuille tämä ei päde. Esimerkiksi $-3 < -2$, mutta $9 > 4$.)

Koska a ja b ovat epänegatiivisia lukuja, myös $\frac{a+b}{2}$ ja $\sqrt{ab}$ ovat, eli epäyhtälön

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

kummankin puolen voi korottaa toiseen potenssiin ilman, että epäyhtälön toteuttavat lukuparit muuttuvat.

Yhtälöä sieventäen ja muistikaavoja käyttäen päästään muotoon

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0,$$

joka sievenee muistikaavalla muotoon

$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Tämä epäyhtälö on tosi kaikille luvuille a ja b (reaalilukujen neliöt ovat epänegatiivisia), joten alkuperäinenkin epäyhtälö on tosi kaikille epänegatiivisille luvuille. Tästä muodosta nähdään myös yhtäsuuruusehto: $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ vain ja ainoastaan silloin, kun $(a-b)^2 = 0$, eli kun $a = b$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 31.
Toinen vihje.
Toiseen potenssiin korotuksen jälkeen epäyhtälö on muodossa

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Avaa sulut muistikaavoilla ja sievennä. Sievennystavasta riippuen päädyt tulokseen

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

tai vastaavaan, selvästi kaikilla luvuilla toteutuvaan epäyhtälöön. Tarkastele yhtäsuuruusehto samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 32.
Toinen vihje.
Voit soveltaa edellisen vihjeen mukaisesti aritmeettis-geometrista epäyhtälöä lukujen $\frac{1}{a}$ ja $\frac{1}{b}$ keskiarvoihin:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}.$$

Tämä on jo lähellä väitettä; miten todistus viedään loppuun?

Jos taas käytät neliöintiä, kannattaa harmonisen keskiarvon lauseke sieventää muotoon $\dfrac{2ab}{a+b}$ ennen toiseen potenssiin korottamista. Jossakin vaiheessa sievennystä on todennäköisesti mahdollista jakaa luvuilla a ja b, jolloin epäyhtälö yksinkertaistuu.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 33.
Toinen vihje.
Toiseen potenssiin korotuksen jälkeen sulkujen avaamista kannattaa hetki vältellä, jos vain suinkin voi. Tekijällä $\left(a^2+b^2\right)$ puolittain jakaminen voi yksinkertaistaa laskua kovasti.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 35.
Toinen vihje.
Kummankin matka-aika koostuu kahdesta osasta. Aarnelle saadaan

$$t_A = \frac{d/2}{v_1} + \frac{d/2}{v_2} = d \cdot \frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2}.$$

Bertalle puolestaan ajat ovat samat (eli kumpikin $t_B/2$), mutta kuljetut matkat erisuuret. Niiden suuruudet ovat

$$d_1 = v_1 \cdot \frac{t_B}{2} \quad \text{ja} \quad d_2 = v_2 \cdot \frac{t_B}{2}.$$

Bertan matka-ajan t_B voi ratkaista, kun edellä esitetyt lausekkeet sijoittaa yhtälöön

$$d = d_1 + d_2.$$

Lopuksi matka-aikoja t_A ja t_B voi vertailla aritmeettis-harmonisella epäyhtälöllä. (Ajan t_A lausekkeessa esiintyy lukujen $\frac{1}{v_1}$ ja $\frac{1}{v_2}$ aritmeettinen keskiarvo. Sitä voi arvioida alhaalta harmonisella keskiarvolla, jolloin sievennyksen jälkeen päästään ajan t_B lausekkeeseen.)

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 36.
Toinen vihje.
Kun yhtälön vasemman puolen on muokannut muotoon $\frac{2a+8b}{2}$, voit arvioida aritmeettis-geometrisellä epäyhtälöllä

$$\frac{2a+8b}{2} \geqslant \sqrt{2a \cdot 8b},$$

jolloin väite onkin enää pienen sievennyksen päässä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 37.
Toinen vihje.
Kannattaa ajatella aritmeettis-geometrista epäyhtälöä muodossa

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Kun tätä soveltaa yhtä aikaa tulon tekijöihin $a+b$, $b+c$ ja $c+a$, todistus valmistunee.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 38.
Toinen vihje.
Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön neliöity muoto

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab,$$

missä a ja b ovat epänegatiivisia reaalilukuja, voi olla tässä hyödyksi. Miltä tämä epäyhtälö näyttää, jos sijoitetaan $a = 2x$ ja $b = y$?

Tulon xy suurimmaksi mahdolliseksi arvoksi tulee lopulta 2.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 39.
Toinen vihje.
Jos nimeät aidan sivut esimerkiksi kirjaimilla a ja b, missä a on pensasaitaa koskettavien sivujen pituus, aidan kokonaispituus on $2a+b$ ja aitauksen pinta-ala ab. Voit käyttää samankaltaista päättelyä kuin tehtävässä 38.

Maksimaaliseksi pinta-alaksi pitäisi lopulta tulla $11\,250\,\mathrm{m}^2$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 40.
Toinen vihje.
Oikea tulos on seuraava: Aitauksen maksimaaliseksi pinta-alaksi tulee $60\,000\,\mathrm{m}^2$. Se saavutetaan, kun kuvan mukaiset pystysivut ovat pituudeltaan 200 m ja vaakasuuntaisten sivujen puolikkaat 150 m. Koko aitauksen mitat ovat siis $200\,\mathrm{m} \times 300\,\mathrm{m}$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 41.
Toinen vihje.
Aitauksen suurin mahdollinen pinta-ala on $\dfrac{180\,000}{k+1}\,\mathrm{m}^2$. Optimaalisen aitauksen pidempi sivu on yllättävää kyllä pituudeltaan 300 m luvusta k riippumatta.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 43.
Toinen vihje.
Kun $0 \leqslant c \leqslant 1$, lauseke $\sqrt{abc}$ on itse asiassa enintään yhtä suuri kuin $\sqrt{ab}$. Miten on lausekkeen $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$ laita?

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 45.
Toinen vihje.
Lopputulokseksi pitäisi tulla, että lausekkeen $\dfrac{x}{(x+a)(x+b)}$ suurin mahdollinen arvo on $\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 46.
Toinen vihje.
Sievennys $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ voi olla avuksi. (Ja tämän yhtäsuuruuden voi puolestaan perustella korottamalla kummankin puolen potenssiin 6.)

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 47.
Toinen vihje.
Sivun 39 esimerkissä jaettiin termit kolmeen ryhmään, joista kuhunkin käytettiin neljän muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä. Tässä tehtävässä kannattaa

jakaa luvut kolmeen sopivaan kolmen luvun ryhmään, ja käyttää jokaiseen kolmen muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 48.
Toinen vihje.

Muista, että jos reaaliluvuille a ja b pätee $0 < a < b$, käänteisluvuille pätee $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. (Tämän voi todistaa jakamalla epäyhtälön $a < b$ luvulla ab ja supistamalla murtolausekkeet.)

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 49.
Toinen vihje.
Kokeile keskenään erisuuria lukuja vastaesimerkiksi.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 50.
Toinen vihje.
Tässä tehtävässä on oikeastaan kaksi osaa: Yhtäältä pitää todistaa, että annosten kokonaismäärä ei voi olla tiettyä lukua pienempi, ja toisaalta pitää näyttää konkreettisella esimerkillä, että tämä minimi on mahdollista saavuttaa.

Alarajan kelvollisten lukujen summalle voi saada neljän muuttujan aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä. Alarajan toteuttavan lukunelikon voi löytää kokeilemalla. Sivun 39 esimerkistä 2 on malliksi. Vastauksen pitäisi lopulta olla 23.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 51.
Toinen vihje.
Ajattele yhtälön oikean puolen summaa muodossa

$$3 \cdot \frac{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}}{3},$$

jolloin siinä esiintyy lukujen $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ ja $\frac{1}{c+a}$ aritmeettinen keskiarvo.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 52.
Toinen vihje.
Laatikon tilavuus on $x(\ell - 2x)(\ell - 2x)$, ja se kannattaa kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{4} \cdot 4x(\ell - 2x)(\ell - 2x).$$

Kolmen muuttujan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö voisi olla tässä hyödyksi.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 53.
Toinen vihje.
Nimeä särmiön särmät esimerkiksi a, b ja c. Tällöin särmiön kokonaisala on $2ab + 2bc + 2ca$. Tämä summa voidaan tulkita aritmeettiseksi keskiarvoksi:

$$2ab + 2bc + 2ca = \frac{6ab + 6bc + 6ca}{3}.$$

Pinta-alan pienimmäksi arvoksi pitäisi lopulta tulla $6\sqrt[3]{V^2}$.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 54.
Toinen vihje.
Edellisen vihjeen perusteella pätee

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 0,$$

kun a, b ja c ovat epänegatiivisia reaalilukuja. Kokeile sijoittaa tähän $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ ja $c = \sqrt[3]{z}$, missä x, y ja z ovat epänegatiivisia reaalilukuja.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 55.
Toinen vihje.
Kannattanee käyttää nimenomaan neljän muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kahteen eri summaan, joissa kummassakin on neljä termiä.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 58.
Toinen vihje.
Tehtävä on läheistä sukua sivun 39 esimerkille 1.

[Takaisin tehtävään]

Tehtävä 59.
Toinen vihje.
Lisäsivujen osassa 1 käsiteltiin tällainen summakaava:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

[Takaisin tehtävään]