Vastaukset.

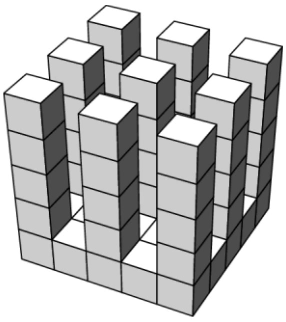
TEHTÄVÄ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VASTAUS	C	C	D	B	E	E	C	D	E	C

TEHTÄVÄ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
VASTAUS	D	B	A	E	D	D	C	A	C	B

TEHTÄVÄ	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
VASTAUS	E	A	D	A	B	A	E	B	D	D

3 pistettä

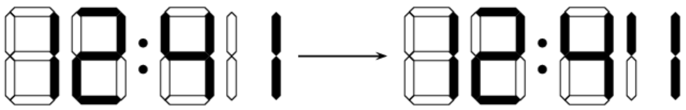
1.
Suuri kuutio koostuu $5 \times 5 \times 5$ pienestä kuutiosta. Pieniä kuutioita poistettiin, jolloin jäljelle jäi viisi tasakorkuista tornia tasaisella pohjalla kuvan mukaisesti. Kuinka monta pientä kuutiota on poistettu?



(A) 56 (B) 60 **(C)** 64 (D) 68 (E) 80

Ratkaisu.
Kuviosta puuttuu 16 neljän palikan tornia. $16 \cdot 4 = 64$.

2.
Paulan digitaalisen kellon näyttö on rikki. Kellon oikeanpuoleisimman numeron kolmesta vaakasuorasta valoviivasta yksikään ei toimi. Paula katsoo kelloaan, ja aika on juuri vaihtunut vasemmalla puolella näkyvästä oikealla puolella näkyvään (katso kuva). Paljonko kello on nyt?



(A) 12:40 (B) 12:42 **(C)** 12:44 (D) 12:47 (E) 12:49

Ratkaisu.
Vasemmanpuoleisessa kuvassa voisi olla viimeisenä numerona 1, 3 tai 7. Oikeanpuoleisessa puolestaan 4 tai 9. Näistä peräkkäiset ovat 3 ja 4, joten kello on 12:44.

3.
Kakku painaa 900 g. Panu leikkaa sen neljään osaan. Suurin pala on yhtä painava kuin kolme muuta yhteensä. Kuinka paljon suurin pala painaa?

(A) 250 g (B) 300 g (C) 400 g **(D)** 450 g (E) 600 g

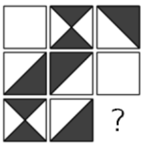
Ratkaisu.
Suurimman palan paino on puolet kakusta. Siis 900 g : 2 = 450 g.

4.
Tänään on Carlan, Emilien ja Lilianin syntymäpäivä. He täyttävät yhteensä 44 vuotta. Eräänä syntymäpäivänä joidenkin vuosien kuluttua heidän ikiensä summassa on taas kaksi samaa numeroa. Kuinka paljon he täyttävät yhteensä silloin?

(A) 66 **(B)** 77 (C) 88 (D) 99 (E) 100

Ratkaisu.
Joka vuosi ystävykset vanhenevat yhteensä kolme vuotta. Summat 55 ja 66 ovat mahdottomia, sillä niihin vaaditut lisäykset 11 ja 22 eivät ole kolmella jaollisia. Seuraava mahdollisuus on siis 77.
($77 = 44 + 3 \cdot 11$)

5.
Mikä laatta pitää lisätä kuvaan, jotta valkoinen alue on yhtä suuri kuin musta alue?



(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** Se on mahdotonta

Ratkaisu.
Kaksivärisissä laatoissa on yhtä paljon mustaa ja valkoista. Lisäksi kuvassa on kaksi kokonaan valkoista laattaa. Mustaa on siis vähemmän, oli lisättävä laatta millainen tahansa.

6.
Missä seuraavista lausekkeista ei ole tekijää $b + 1$?

(A) $2b + 2$ (B) $b^2 - 1$ (C) $b^2 + b$ (D) $-1 - b$ **(E)** $b^2 + 1$

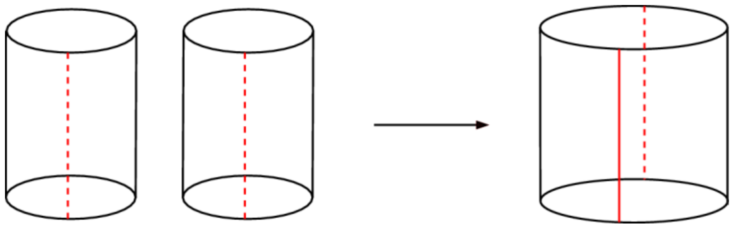
Ratkaisu.
$2b + 2 = 2(b + 1)$
$b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$
$b^2 + b = b(b + 1)$
$-1 - b = -(b + 1)$
Sen sijaan lausekkeella $b^2 + 1$ ei ole nollakohtaa $b = -1$, joten $b + 1$ ei voi olla sen tekijä.

7.
Kolmeen erikokoiseen koriin on laitettu yhteensä 24 palloa. Pienimmässä ja suurimmassa korissa on yhteensä kaksi kertaa niin paljon palloja kuin keskikokoisessa. Pienimmässä korissa on puolet keskikokoisen korin pallomäärästä. Kuinka monta palloa suurimmassa korissa on?

(A) 8 (B) 10 **(C)** 12 (D) 15 (E) 16

Ratkaisu.
Ensimmäisen tiedon perusteella keskimmäisessä korissa täytyy olla kolmasosa palloista, siis $\frac{24}{3} = 8$. Pienessä korissa on siis $\frac{8}{2} = 4$ palloa ja suurimmassa $24 - 8 - 4 = 12$ palloa.

8.
Kaksi samanlaista suoraa ympyrälieriötä leikataan auki katkoviivaa pitkin ja yhdistetään yhdeksi suureksi ympyrälieriöksi. Mitä voidaan sanoa syntyneen suuren lieriön tilavuudesta yhteen pieneen lieriöön verrattuna?



(A) Sen tilavuus on kaksinkertainen
(B) Sen tilavuus on kolminkertainen
(C) Sen tilavuus on π-kertainen
(D) Sen tilavuus on nelinkertainen
(E) Sen tilavuus on kahdeksankertainen

Ratkaisu.
Suuren lieriön pohjaympyrän kehän pituus on pieneen verrattuna kaksikertainen, joten myös sen säde on kaksinkertainen. Pohjaympyrän pinta-ala on $A = \pi r^2$, joten kaksinkertainen säde antaa nelinkertaisen pinta-alan. Koska korkeus on molemmissa lieriöissä sama, myös tilavuus on suuremmassa nelinkertainen.

9.
Kuinka monta numeroa laskun $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$ tuloksessa on?

(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 **(E)** 111

Ratkaisu.
Suoraan laskemalla saadaan
$$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = (2 \cdot 5)^{110} = 10^{110}.$$
Laskun tuloksessa on siis ykkönen ja 110 nollaa, yhteensä 111 numeroa.

10.
Vuosiluvussa 2014 kaikki numerot ovat keskenään erisuuret ja viimeinen numero on kolmen muun summaa suurempi. Kuinka monta vuotta sitten näin tapahtui viimeksi?

(A) 5 (B) 215 **(C)** 305 (D) 395 (E) 485

Ratkaisu.
2013, 2012, 2011, 2010 jne. eivät käy. Jatketaan siis alaspäin. Aiemmissa 2000-luvun vuosiluvuissa on kaksi nollaa. 1900- ja 1800-luvuilla kahden ensimmäisen numeron summa on liian suuri. Vastaus löytyy 1700-luvulta, jolloin viimeisen numeron täytyy olla 9. Ainoa sopiva on 1709. Aikaa on kulunut 2014 – 1709 = 305 vuotta.

Koska vastauksista tasan yksi on oikein, ratkaisu löytyy nopeasti myös kokeilemalla: $2014 - 5 = 2009$ ja $2014 - 215 = 1799$ eivät käy, mutta $2014 - 305 = 1709$ käy.

4 pistettä

11.
Kalle Komealla on salainen sähköpostiosoite, jonka vain hänen neljä ystäväänsä tuntevat. Tänään Kalle sai 8 sähköpostia. Mikä seuraavista on varmasti totta?

(A) Kalle sai kaksi sähköpostia jokaiselta ystävältään.
(B) Kalle ei ole voinut saada 8 sähköpostia samalta ystävältään.
(C) Kalle sai ainakin yhden sähköpostin jokaiselta ystävältään.
(D) Kalle sai ainakin kaksi sähköpostia joltakin ystävältään.
(E) Kalle sai ainakin kaksi sähköpostia kahdelta eri ystävältään.

Ratkaisu.
On mahdollista, että Kalle sai kaikki 8 sähköpostia samalta ystävältään. Tämä on ristiriidassa kohtien A, B, C ja E kanssa. Kohta D on väistämättä oikein, sillä sen vastakohta on, ettei Kalle saanut yhtä sähköpostia enempää yhdeltäkään ystävältään. Tällöin posteja olisi yhteensä korkeintaan neljä.

12.
Tiedetään, että $a^b = \frac{1}{2}$. Kuinka pajon on a^{-3b} ?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

Ratkaisu.

$$a^{-3b} = (a^b)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8.$$

13.

Pahvilaatikko on suorakulmaisen särmiön muotoinen, ja sen mitat ovat $a \times b \times c$. Tiedetään, että $a < b < c$. Yhtä mitoista a, b tai c kasvatetaan tietyllä määrällä. Missä seuraavista tapauksista laatikon tilavuus kasvaa eniten?

(A) Kun lukua a kasvatetaan
(B) Kun lukua b kasvatetaan
(C) Kun lukua c kasvatetaan
(D) Tilavuuden lisäys on sama kohdissa (A) – (C)
(E) Vastaus riippuu lukujen a, b, c suuruudesta.

Ratkaisu.

Olkoot kasvatettava määrä k. Kohdissa A – C uudeksi tilavuudeksi tulee

A. $(a+k)bc = abc + kbc$
B. $a(b+k)c = abc + kac$
C. $ab(c+k) = abc + kab$

Tuloista kbc, kac, kab suurin on kbc. Tilavuus kasvaa siis eniten, kun särmää a kasvatetaan.

14.

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = ?$$

(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 **(E)** 2

Ratkaisu.

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \frac{2^{2013}(2-1)}{2^{2012}(2-1)} = 2^{2013-2012} = 2^1 = 2.$$

15.

Kuningas ja hänen lähettinsä matkustavat linnasta kesäpalatsiin nopeudella 5 km/h. Joka tunti matkan aikana kuningas lähettää takaisin linnaan yhden lähetin, joka matkustaa nopeudella 10 km/h. Mikä on aikaero kahden peräkkäisen linnaan palaavan lähetin välillä?

(A) 30 min (B) 60 min (C) 75 min **(D)** 90 min (E) 120 min

Ratkaisu:

Lähetit lähtevät matkaan tunnin välein, jokainen 5 km kauempaa kuin edellinen. Lähetti taittaa 5 km matkan puolessa tunnissa, joten hän on edellisen lähetin lähtöpaikassa 1 h + ½ h tämän lähdön jälkeen. Lähetit saapuvat perille siis 1½ h eli 90 min välein.

16.
Kuudessa viikossa on $n!$ sekuntia. Kuinka suuri luku n on?
(Merkintä $n!$ tarkoittaa kokonaislukujen tuloa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

(A) 6 (B) 7 (C) 8 **<u>(D)</u>** 10 (E) 12

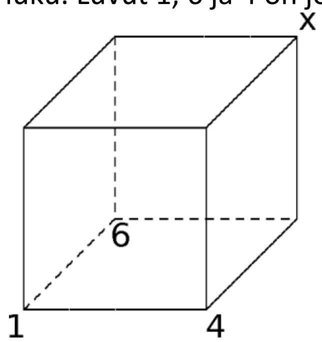
Ratkaisu.
Kuudessa viikossa on $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ sekuntia. Jaetaan lukuja tekijöihinsä ja järjestellään:
$6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$
$= (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 5 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 10)$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
$= 10!$

17.
Kuinka monelle kokonaislukukolmikolle (a, b, c) pätee $a > b > c > 1$ ja $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

(A) ei yhdelläkään (B) yhdelle **<u>(C)</u>** kahdelle (D) kolmelle (E) äärettömän monelle

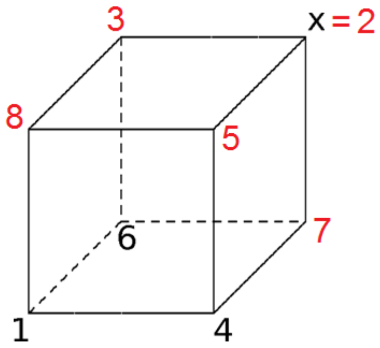
Ratkaisu.
Jos $c \geq 3$, summasta ja $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ tulee alle 1. Siis $c = 2$. Koska $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$, täytyy olla $a < 6$. Sopivat kolmikot ovat siis ja $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{30}$ ja $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{12}$.

18.
Kuution kärjet numeroidaan luvuilla 1 – 8. Jokaisen tahkon kärkien summaksi pitäisi tulla sama luku. Luvut 1, 6 ja 4 on jo sijoitettu kuvan mukaisesti. Mikä luku tulee kärkeen x?



<u>(A)</u> 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

Ratkaisu.
Jokainen kärki lasketaan mukaan kolmeen eri tahkoon. Yhdelle tahkolle tuleva summa on siis $(1 + 2 + 3 + \cdots + 7 + 8) \cdot 3 : 6 = 18$. Tämä perusteella viimeinen alatahkon luku on $18 - 1 - 4 - 6 = 7$. Käyttämättä ovat luvut 2, 3, 5 ja 8. Takatahkoon tarvitaan vielä $18 - 6 - 7 = 5$, sen saa vain yhdistelmällä $2 + 3$. Oikeanpuoleiseen tahkoon tarvitaan vielä $18 - 4 - 7 = 7$, sen saa vain yhdistelmällä $2 + 5$. Täytyy siis olla $x = 2$. Sijoitetaan vielä loputkin luvut paikoilleen ja tarkistetaan, että ratkaisu on mahdollinen:



19.

Funktiolle $f(x) = ax + b$ pätee $f\left(f\big(f(1)\big)\right) = 29$ ja $f\left(f\big(f(0)\big)\right) = 2$. Kuinka suuri on a?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Ratkaisu:

Lasketaan $f\left(f\big(f(x)\big)\right)$:

$f(x) = ax + b$

$f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$

$f\left(f\big(f(x)\big)\right) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$

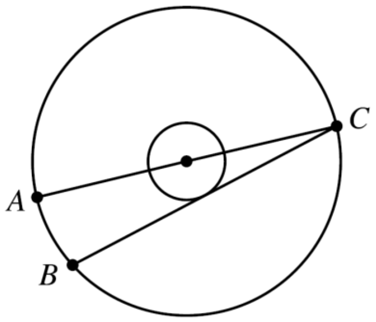
Lasketaan erotus:

$$29 - 2 = f\left(f\big(f(1)\big)\right) - f\left(f\big(f(0)\big)\right) = a^3 \cdot 1 + a^2b + ab + b - (a^3 \cdot 0 + a^2b + ab + b) = a^3.$$

Siis $27 = a^3$, eli $a = 3$. (Vakioksi b voidaan ratkaista $\frac{2}{13}$, mutta se ei ole tarpeellista.)

20.

Kahdella ympyrällä on sama keskipiste ja niiden säteiden suhde on 1 : 3.

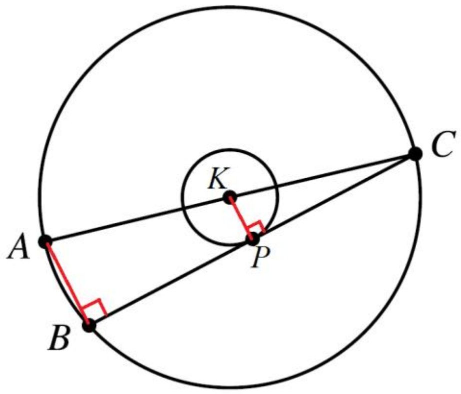


AC on suuren ympyrän halkaisija; BC on suuren ympyrän jänne ja pienen ympyrän tangentti. Lisäksi $AB = 12$. Mikä on suuren ympyrän säde?

(A) 13 **(B)** 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

Ratkaisu.

Olkoon ympyröiden keskipiste K sekä janan BC ja pienemmän ympyrän sivuamispiste P. Koska AC on ympyrän halkaisija, kulma B on kehäkulmalauseen perusteella suora. Koska BC on pienemmän ympyrän tangentti, myös kulma CPK on suora.



Yhdenmuotoisista kolmioista CPK ja CBA saadaan pienen ympyrän säteeksi

$KP = ½ AB = 6$. Suuren ympyrän säde on siis $3 \cdot 6 = 18$.

5 pistettä

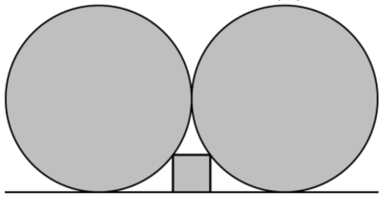
21.
Taululla on kymmenen erisuurta positiivista kokonaislukua, joista tasan viisi on jaollisia luvulla 5 ja tasan seitsemän jaollisia luvulla 7. Olkoon M suurin näistä kymmenestä luvusta. Mikä on luvun M pienin mahdollinen arvo?

(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 **(E)** jokin muu

Ratkaisu.
Seitsemän pienintä seitsemällä jaollista lukua ovat 7, 14, 21, 28, 35, 42 ja 49. Näistä vain 35 on jaollinen myös viidellä, joten ehto viidellä jaollisista luvuista ei toteudu. Mukaan tarvitaan seuraavaksi pienin viidellä ja seitsemällä jaollinen luku, 70. Sen kanssa ratkaisu on mahdollinen monella tapaa, esimerkiksi **5**, **10**, **15**, *7*, *14*, *21*, *28*, ***35***, *42*, ***70***. Vastaus on siis 70.

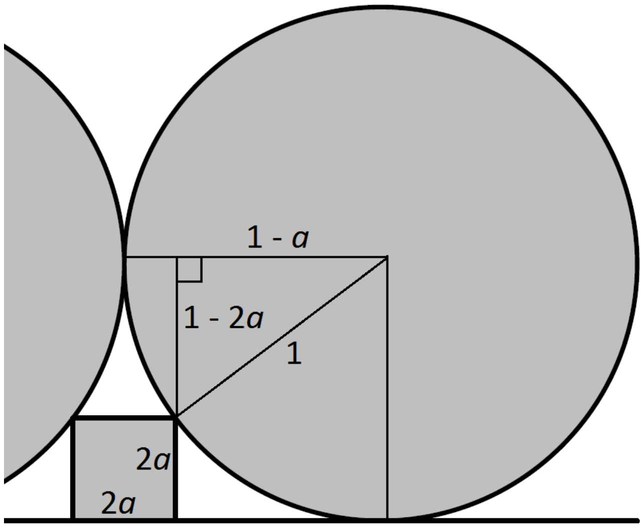
22.

Neliö mahtuu juuri ja juuri kahden toisiaan sivuavan ympyrän ja ympyröitä sivuavan suoran väliin kuvan mukaisesti. Ympyröiden säde on 1. Kuinka suuri on neliön sivu?



(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

Ratkaisu.
Klassisella geometrialla
Olkoon neliö sivu $2a$.



Ympyrän keskipisteestä neliön kärkeen kulkeva säde on hypotenuusa suorakulmaiselle kolmille, jonka kateetit ovat $1-a$ ja $1-2a$. Saadaan

$$(1-a)^2+(1-2a)^2=1^2$$
$$1-2a+a^2+1-4a+4a^2=1$$
$$5a^2-6a+1=0$$

$$a=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot1}}{2\cdot5}$$

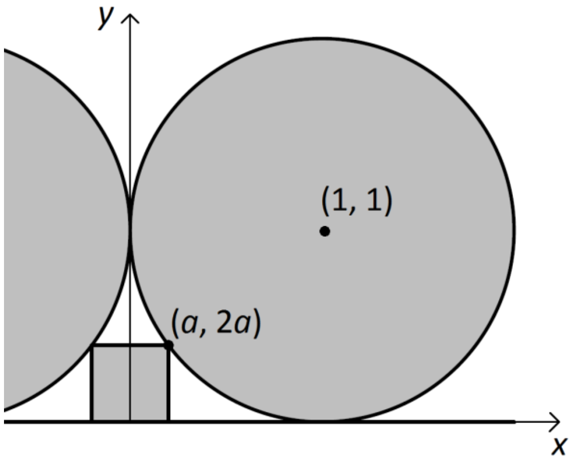
$$a=\frac{6\pm4}{10}$$

$$a=\frac{1}{5}\text{ tai }a=1.$$

Näistä $a=\frac{1}{5}$ on tilanteeseen sopiva ratkaisu. Neliö sivu on siis $2a=\frac{2}{5}$.

Analyyttisellä geometrialla

Olkoon neliön sivu taas $2a$. Sijoitetaan kuvio koordinaatistoon:



Ympyrän yhtälö on $(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$. Sijoitetaan tähän $(a,\ 2a)$ ja saadaan sama yhtälö kuin edellä: $(a-1)^2+(2a-1)^2=1^2$.

23.

Tom haluaa kirjoittaa paperille mahdollisimman monta erisuurta positiivista kokonaislukua, joista yksikään ei ole yli 100. Lukujen tulo ei saa olla jaollinen luvulla 54. Kuinka monta lukua Tom voi korkeintaan kirjoittaa?

(A) 8 (B) 17 (C) 68 **(D)** 69 (E) 90

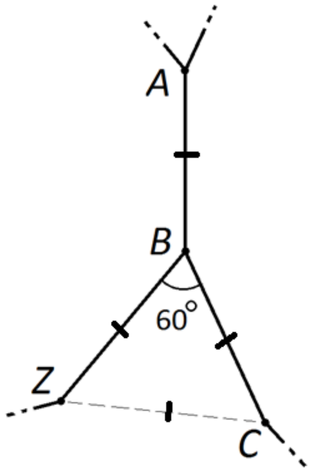
Ratkaisu.

$54=3\cdot3\cdot3\cdot2$. Kirjoitettujen lukujen joukossa ei saa olla tekijöinä kolmea kolmosta ja yhtä kakkosta. Koska 2 on yleisempi tekijä, Tomin kannattaa vältellä kolmella jaollisia lukuja. Lukujen 1 – 100 joukossa niitä on 33 kappaletta. Mukaan voidaan ottaa kaksi kolmella jaollista lukua (esimerkiksi 3 ja 6), jolloin kirjoitettavia lukuja on yhteensä 100 – 33 + 2 = 69 kappaletta.

24.
Kaksi säännöllistä monikulmiota sijaitsee yhteisen sivunsa AB eri puolilla. Toinen monikulmioista on 15-kulmio $ABCD$ … ja toinen n-kulmio $ABZY$ … . Millä luvun n arvolla *CZ* = *AB*?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

Ratkaisu.
Jotta $CZ = AB$, täytyy kolmion BZC olla tasasivuinen. Kulma ZBC on siis $60°$.



Tunnetusti n-kulmion kulmien summa on $(n-2) \cdot 180°$, joten yhden kulman suuruus on $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$. Säännöllisen 15-kulmion kulmiksi saadaan $\frac{(15-2)}{15} \cdot 180° = 156°$. Tuntemattoman n-kulmion kulmien tulee siis olla $360° - 60° - 156° = 144°$. Yhtälöstä
$\frac{(n-2)}{n} \cdot 180° = 144°$ ratkaistuna $n = 10$.

25.

Kermajuuston pakkauksessa lukee ”24 % rasvaa” sekä ”kuivasta aineesta rasvaa 64 %”. Kuinka monta prosenttia juustosta on vettä?

(A) 88 % **(B)** 62,5 % (C) 49 % (D) 42 % (E) 37,5 %

Ratkaisu.

Merkitään rasvaa, kuivia aineita yhteensä ja vettä kirjaimilla r, k ja v. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \dfrac{r}{k+v} = 0{,}24 \\ \dfrac{r}{k} = 0{,}64 \end{cases}.$$

Ratkaistaan:

$$\begin{cases} r = 0{,}24(k+v) \\ r = 0{,}64k \end{cases}.$$

Siis

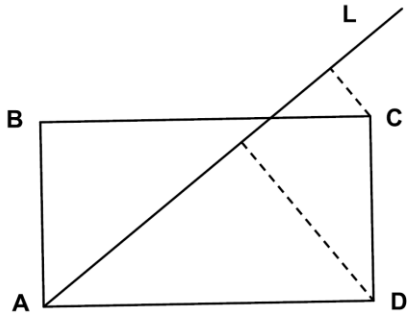
$$\begin{aligned} 0{,}64k &= 0{,}24k + 0{,}24v \\ \Leftrightarrow 0{,}24v &= 0{,}4k \\ \Leftrightarrow v &= \frac{0{,}4}{0{,}24}k = \frac{5}{3}k. \end{aligned}$$

Veden osuudeksi saadaan

$$\frac{v}{k+v} = \frac{\frac{5}{3}k}{k+\frac{5}{3}k} = \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%.$$

26.

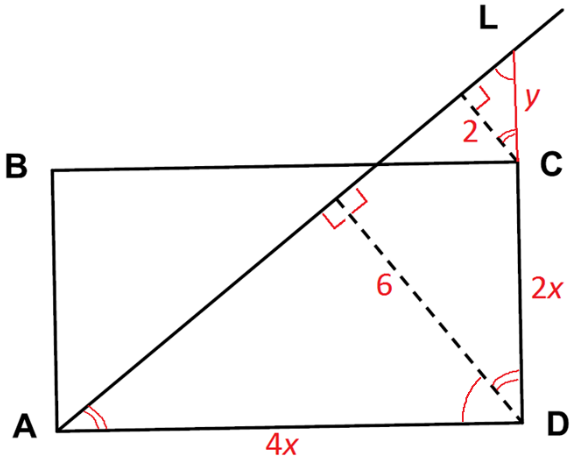
Suora L kulkee nelikulmion $ABCD$ kärjen A kautta. Pisteen C etäisyys suorasta L on 2 ja pisteen D etäisyys suorasta L on 6. Lisäksi AD = 2AB. Kuinka pitkä on AD?



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$

Ratkaisu.

Merkitään $AD = 4x$, jolloin $CD = 2x$.



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\frac{y}{2} = \frac{2x+y}{6} \Leftrightarrow 6y = 4x + 2y \Leftrightarrow y = x.$

Edelleen yhdenmuotoisista kolmioista saadaan ($y = x$)

$$\frac{4x}{6} = \frac{\sqrt{(4x)^2 + (2x+y)^2}}{2x+y}$$

$$\frac{4x}{6} = \frac{\sqrt{(4x)^2 + (3x)^2}}{3x}$$

$$\frac{4x}{6} = \frac{\sqrt{16x^2 + 9x^2}}{3x}$$

$$\frac{4x}{6} = \frac{\sqrt{25x^2}}{3} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Siis $AD = 4x = 6 \cdot \frac{5}{3} = 10.$

27.

On olemassa yhdeksän jalokengurua, jotka ovat joko kullan- tai hopeanvärisiä. Kun kolme satunnaista jalokengurua kohtaa, todennäköisyydellä 2/3 yksikään niistä ei ole hopeanvärinen. Kuinka moni jalokenguru on kullanvärinen?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 **<u>(E)</u>** 8

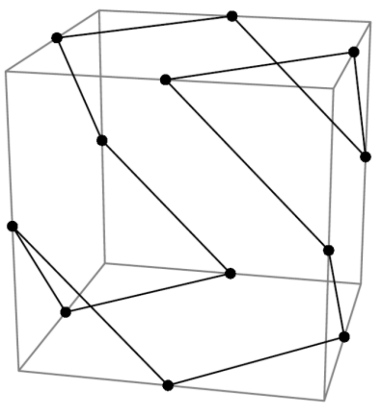
Ratkaisu.

Olkoon kultaisia jalokenguruita k kappaletta. Todennäköisyys, että kolmesta tapaavasta jalokengurusta kaikki kolme ovat kultaisia on $\frac{k}{9}\cdot\frac{(k-1)}{8}\cdot\frac{(k-2)}{7}$. Kokeilemalla huomataan, että $k=8$ toimii:

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{(8-1)}{8}\cdot\frac{(8-2)}{7}=\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

28.

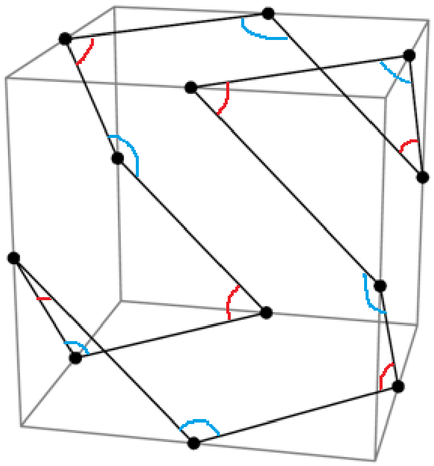
Kuvassa on kolmiulotteinen monikulmio, jonka kärjet ovat kuution sivujen keskipisteitä. Kolmiulotteisen monikulmion kulmat määritellään tavalliseen tapaan kahden vierekkäisen sivun välisenä kulmana. Mikä on kuvan monikulmion kulmien summa?



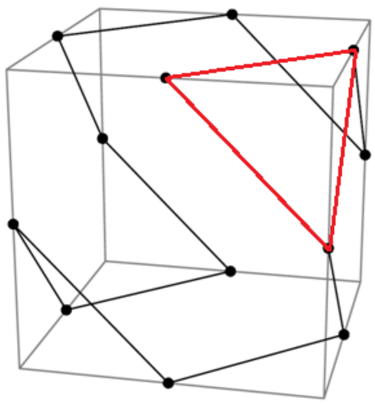
(A) $720°$ **<u>(B)</u>** $1080°$ (C) $1200°$ (D) $1440°$ (E) $1800°$

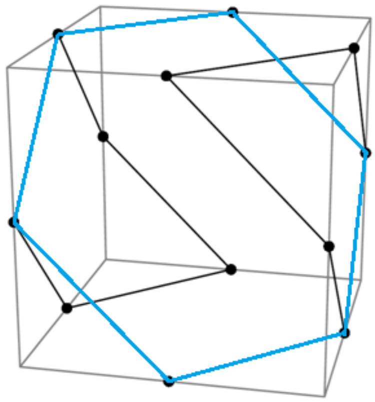
Ratkaisu.

Monikulmiossa on vain kahta eri kokoa kulmia: teräviä (merkitty punaisella) ja sinisiä (merkitty sinisellä).



Punaiset kulmat ovat $60°$ suuruisia, sillä ne ovat osa tasasivuista kolmiota. Siniset kulmat ovat osa säännöllistä kuusikulmiota, joten ne ovat $120°$ suuruisia.





Kulmien summa on siis $6 \cdot 60° + 6 \cdot 120° = 1080°$.
Jos ei löydä kuutiosta kolmiota ja kuusikulmiota, kulmat voi laskea sijoittamalla kuution kolmiulotteiseen koordinaatistoon ja käyttämällä vektoreita.

29.
Funktio $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ toteuttaa ehdot
$f(4) = 6$ ja
$xf(x) = (x-3)f(x+1)$.
Kuinka suuri on $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

(A) 2013 (B) 2014 (C) $2013 \cdot 2014$ **(D)** 2013! (E) 2014!

Ratkaisu.
Ratkaisun keksii helpoimmin laskemalla alkupään termien tuloja: $f(4)$, $f(4)f(7)$, jne.
$f(4) = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.
Annettu ehto $xf(x) = (x-3)f(x+1)$ voidaan sieventää muotoon
$f(x+1) = \frac{x}{x-3} \cdot f(x)$.
Erityisesti
$f(7) = \frac{6}{6-3} \cdot f(6) = \frac{6}{6-3} \cdot \frac{5}{5-3} \cdot f(5) = \frac{6}{6-3} \cdot \frac{5}{5-3} \cdot \frac{4}{4-3} \cdot f(4)$
$= \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot f(4)$
$= \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4$
Siis $f(4) \cdot f(7) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$
Seuraavat termit noudattavat samaa kaavaa: $f(4) \cdot f(7) \cdot f(11) = 10!$
Tästä voidaan arvata, että $f(4)f(7)f(10) \ldots f(2011)f(2014) = 2013!$.

Täsmällinen perustelu voidaan tehdä induktiotodistuksella.
Osoitetaan, että $f(1+3n) = 3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-2)$. (Tällöin $f(4)f(7) \ldots f(1+3n) = (3n)!$)

Tapaus $n = 1$ toteutuu, koska $f(4) = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Induktio-oletus: kaava toimii, kun $n = k$. Siis
$f(1+3k) = 3k \cdot (3k-1) \cdot (3k-2)$.
Käyttämällä kaavaa $f(x+1) = \frac{x}{x-3} \cdot f(x)$ kolmesti saadaan tapauksella $n = k+1$
$f(1+3(k+1)) = f(4+3k) = \frac{3k+3}{3k} \cdot \frac{3k+2}{3k-1} \cdot \frac{3k+1}{3k-2} \cdot f(1+3k)$.
Tämä sievenee induktio-oletuksen avulla muotoon
$f(4+3k) = (3k+3) \cdot (3k+2) \cdot (3k+1)$.
Induktio-oletuksesta siis seurasi, että kaava pätee, kun $n = k+1$. Väite on todistettu.

30.

Taikasaaren metsissä vaeltelee kolmenlaisia eläimiä: vuohia, susia ja leijonia. Sudet voivat syödä vuohia ja leijonat sekä vuohia että susia. Koska kyseessä on Taikasaari:

1. jos susi syö vuohen, susi muuttuu leijonaksi
2. jos leijona syö vuohen, leijona muuttuu sudeksi
3. jos leijona syö suden, leijona muuttuu vuoheksi

Nyt saarella on 17 vuohta, 55 sutta ja 6 leijonaa. Kuinka monta eläintä saarella korkeintaan on jäljellä siinä vaiheessa, kun kukaan ei voi enää syödä ketään?

(A) 1 (B) 6 (C) 17 **(D)** 23 (E) 35

Ratkaisu.

Merkitään vuohia, susia ja leijonia kirjaimilla V, S ja L. Mahdollisia muutoksia on kolme:

S + V → L
L + V → S
L + S → V

Käytännössä tilanne on symmetrinen: kussakin tapauksessa kaksi eri lajin edustajaa katoaa ja tilalle ilmestyy kolmannen lajin edustaja. Syöminen loppuu vasta, kun vain yhden lajin edustajia on jäljellä. Syömisessä jokaisen lajin määrä lisääntyy tai vähenee yhdellä. **Parilliset määrät muuttuvat siis parittomiksi ja parittomat parillisiksi.** Koska susien määrä on alussa pariton ja leijonien parillinen, niiden lukumäärät eivät voi olla yhtä aikaa 0. Saalistajia jää siis joka tapauksessa jäljelle, joten vuohet eivät voi selvitä.

Kun vuohien määrä on 0, leijonien määrä on pariton. Lopussa on siis väistämättä leijonia jäljellä. Täytyy löytää tapa maksimoida leijonien lukumäärä.

Leijonat lisääntyvät vain, kun sudet syövät vuohia. Vuohet lisääntyvät vain, jos leijonat syövät susia (L+S→V), mutta tällöin myös yksi leijona menetetään. Vuohien alkuperäinen määrä rajoittaa siis uusien leijonien syntymistä. Leijonien kokonaismäärää lopussa on siis korkeintaan alkuperäinen vuohien määrä + leijonien määrä, eli 17 + 6 = 23.

Tarkistetaan vielä, että 23 leijonaa on mahdollinen lopputulos. Ketjussa S + V → L, L + S → V vuohien ja leijonien kokonaismäärä pysyy samana, mutta susien määrä vähenee kahdella. Tätä 19 kertaa toistamalla susien määrä voidaan laskea 55 → 17. Loput 17 sutta syövät 17 vuohta ja jäljellä jää 23 leijonaa.

V	**S**	**L**	
17	55	6	(S+V→L)
16	54	7	(L+S→V)
17	53	6	
…	…	…	
17	17	6	(S+V→L seitsemäntoista kertaa)
0	0	23	