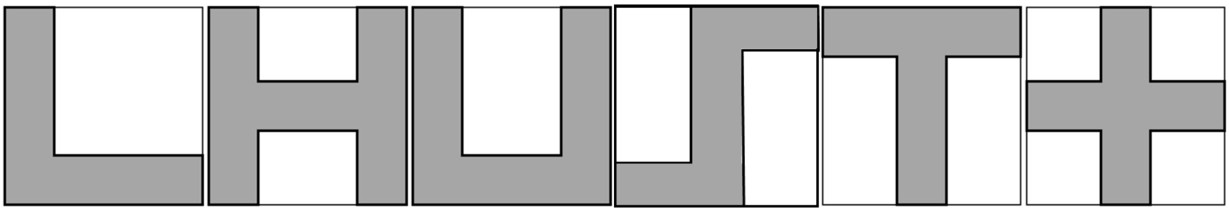
3 pistettä

1.
Mikä seuraavista luvuista on suurin?

(A) 2013 (B) 2^{0+13} **(C)** 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$

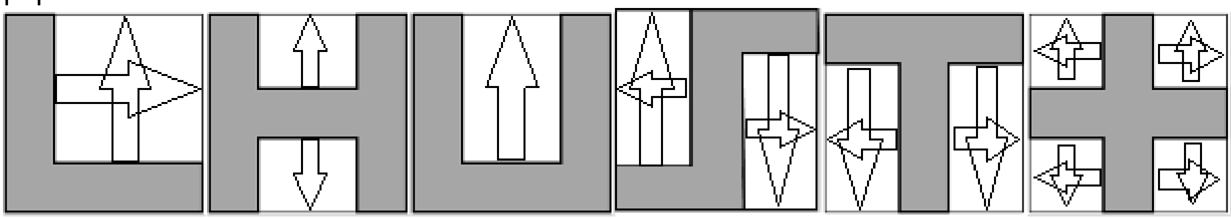
Ratkaisu:
20^{13} on ylivoimaisesti suurin, sillä $20^{13} > 2^{13}$ (suurempi kantaluku) ja jo $20^6 = 400^3$ on suurempi kuin 201^3.

2.
Mary piirsi kuvioita neliön muotoisille papereille. Kuinka monen harmaan kuvion piiri on sama kuin paperiarkilla, jolle se on piirretty?

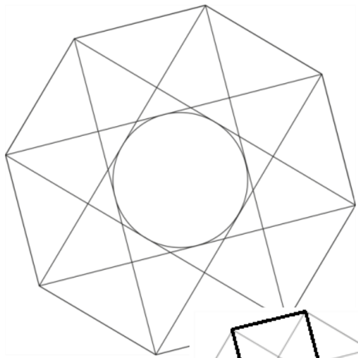


(A) 2 (B) 3 **(C)** 4 (D) 5 (E) 6

Ratkaisu:
Siirtämällä janoja nähdään, että kaikilla paitsi toisella ja kolmannella kuviolla on sama piiri kuin paperiarkilla.

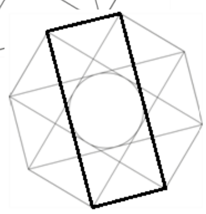


3.
Kuvassa on säännöllinen kahdeksankulmio, jonka sivun pituus on 10. Kahdeksankulmiolle on piirretty kuvan mukaiset lävistäjät ja ympyrä, joka sivuaa lävistäjiä. Mikä on ympyrän säde?



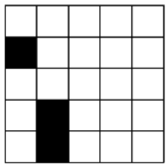
(A) 10 (B) 7,5 **(C)** 5 (D) 2,5 (E) 2

Ratkaisu:
Säännöllisen kahdeksankulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten piirretyt lävistäjät ovat sivuja vastaan kohtisuorassa. Tummennettu nelikulmio on siis suorakulmio, joten ympyrän halkaisija on sen lyhyemmän sivun mittainen, eli 10. Säde on siis 5.



4.

Pyry pelaa ystävänsä kanssa laivastonupotusta 5×5 –laudalla. Pyry on asettanut laudalle jo kaksi laivaa kuvan mukaisesti. Kuinka monella tavalla hän voi asettaa viimeisen 3×1 –laivansa? Laivat eivät saa koskea toisiinsa, eivät edes nurkittain.



(A) 5 (B) 6 (C) 7 **(D)** 8 (E) 9

Ratkaisu:

Laivan voi sijoittaa pystyyn kahteen oikeanpuolimmaiseen sarakkeeseen kumpaankin 3 eri kohtaan tai vaakasuoraan oikeaan ylänurkkaan 1. tai 2. riville. Tapoja on siis 8.

5.

Kuusi supersankaria sai kiinni 20 pahista. Ensimmäinen supersankari sai kiinni yhden pahiksen, toinen kaksi ja kolmas kolme. Neljäs supersankari sai kiinni enemmän pahiksia kuin kukaan muu. Kuinka monta pahista hän vähintään sai kiinni?

(A) 7 **(B)** 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

Ratkaisu:

Ensimmäisen kolmen supersankarin jäljitä pahiksia jäi $20 - 1 - 2 - 3 = 14$. Nämä jakautuvat kolmelle jäljellä olevalle supersankarille. Tasaisin jako on 5, 5, 4, mutta silloin neljäs supersankari ei olisi saanut kiinni enemmän kuin kaikki muut. Seuraava vaihtoehto on 6, 4, 4 (tai 6, 5, 3), joten vastaus on 6.

6.

Vuosiluvulla 2013 on se miellyttävä ominaisuus, että sen numerot 0, 1, 2 ja 3 ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Kuinka monta vuotta sitten vuosiluku viimeksi koostui peräkkäisistä kokonaisluvuista?

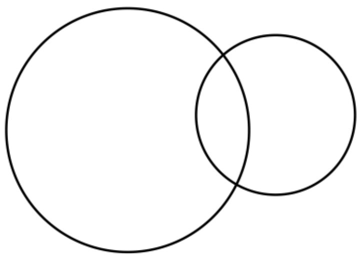
(A) 467 (B) 527 **(C)** 581 (D) 693 (E) 990

Ratkaisu:

Edelliset ehdon täyttävät vuoden ovat 1432, 1423, 1342 ja niin edelleen. 2013 – 1432 = 581.

7.

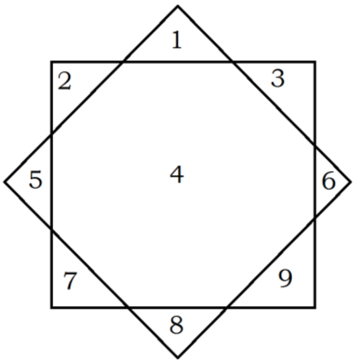
Olga piirsi kaksi ympyrään ja sai aikaan kuvion, jossa on kolme osaa.



Jos hän olisi käyttänyt ympyröiden sijaan neliöitä, kuinka monta osaa kuvioon olisi korkeintaan tullut?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 **(E)** 9

Ratkaisu:
Kuviosta nähdään, että alue voi koostua yhdeksästä kuviosta.



Todistetaan vielä, että yhdeksän on suurin mahdollinen määrä.

Jokaisen alueen reunalla on keskimmäistä aluetta lukuun ottamatta yksi kärki, joka ei ole minkään muun alueen reunalla. Siten keskimmäistä aluetta lukuun ottamatta jokaista aluetta kohti tarvitaan yksi kärki. Koska kärkiä on käytössä 4 + 4 = 8, on suurin mahdollinen alueiden määrä 9.

8.
Särmiöllä on 2013 tahkoa. Montako särmää sillä on?

(A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 **<u>(E)</u>** 6033

Ratkaisu:
Kaksi tahkoista ovat särmiön pohjat, loput 2011 muodostavat vaipan. Pohjat ovat siis 2011-kulmioita, ja niitä yhdistää 2011 särmää. Särmiä on yhteensä $3 \cdot 2011 = 6033$.

9.
Luvun 3^{3^3} kuutiojuuri on

(A) 3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} **<u>(D)</u>** 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

Ratkaisu:
$3^{3^3} = 3^{27}$, eli $\sqrt[3]{3^{3^3}} = \sqrt[3]{3^{27}} = 3^{27\cdot\frac{1}{3}} = 3^9 = 3^{3^2}$.

10.
Jos $2 < x < 3$, kuinka moni seuraavista väitteistä on totta?

$4 < x^2 < 9$ $\quad 4 < 2x < 9$ $\quad 6 < 3x < 9$ $\quad 0 < x^2 - 2x < 3$

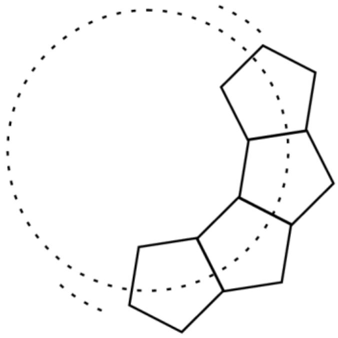
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Ratkaisu:
Kaikki väitteet ovat totta:
Ensimmäinen, sillä neliöön korottaminen säilyttää positiivisten lukujen järjestyksen.
Toinen, sillä kertomalla kahdella saadaan $4 < 2x < 6$, ja $6 < 9$.
Kolmas saadaan kertomalla alkuperäinen epäyhtälö kolmella.
Neljäs saadaan vähentämällä toisistaan 1. epäyhtälö ja epäyhtälö $4 < 2x < 6$:

$$4 - 4 < x^2 - 2x < 9 - 6 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2x < 3.$$

4 pistettä

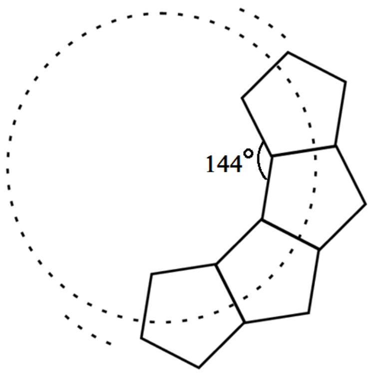
11.



Minnalla on keskenään samanlaisia säännöllisen viisikulmion muotoisia muovinpaloja. Hän haluaa tehdä paloista renkaan liimaamalla palat yhteen sivu sivua vasten kuten kuvassa. Kuinka monta viisikulmiota valmiissa renkaassa on?

(A) 8 (B) 9 **(C)** 10 (D) 12 (E) 15

Ratkaisu:



Monikulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$, eli viisikulmiolle $3\cdot 180° = 540°$. Säännöllisen viisikulmion yhden kulman suuruus on siis $540° : 5 = 108°$. Renkaan sisäpinnalle jäävät kulmat ovat siis suuruudeltaan $360° - 2\cdot 108° = 144°$. Sisäkehä kaareutuu siis $180° - 144° = 36°$ jokaisesta uudesta viisikulmiosta. Viisikulmioita tarvitaan siis $\frac{360°}{36°} = 10$ kappaletta. Tämä täsmää, sillä 10-kulmion kulmien summa on $(10-2)\cdot 180° = 1440°$.

12.

Kun tietty metalli sulaa, sen tilavuus kasvaa $\frac{1}{12}$ aiemmasta tilavuudesta. Kuinka suuren osan sulan metallin tilavuus vähenee, kun se taas jähmettyy?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

Ratkaisu:

Jos alkuperäinen tilavuus on V, lisäys on $\frac{1}{12}V$ ja uusi tilavuus $\frac{13}{12}V$. Jähmettyessä tilavuus pienenee taas $\frac{1}{12}V$. Suhteellinen muutos on $\frac{1}{12}V : \left(\frac{13}{12}V\right) = \frac{1}{13}$.

13.

Kuinka monta positiivista kokonaislukua n on olemassa, joille sekä $\frac{n}{3}$ että $3n$ ovat kolminumeroisia kokonaislukuja?

(A) 12 (B) 32 (C) 34 (D) 100 (E) 300

Ratkaisu:

Pienin mahdollinen luku on 300 ja suurin 333. Näistä 34 luvusta vain 12 kappaletta on kolmella jaollisia, nimittäin luvut 300, 303, …, 333.

14.
Funktio f määritellään reaalilukujen joukossa seuraavasti:
1. f on jaksollinen, ja sen jakso on 5
2. välillä $[-2, 3[$ pätee $f(x) = x^2$.

Kuinka suuri on $f(2013)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 **(D)** 4 (E) 7

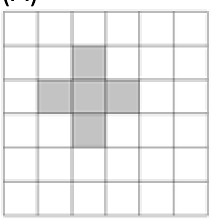
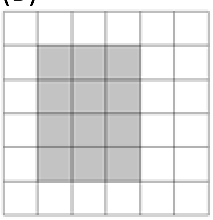
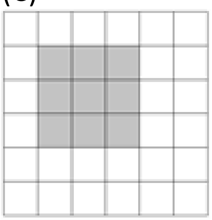
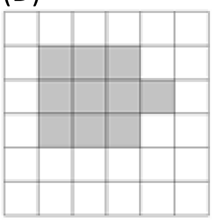
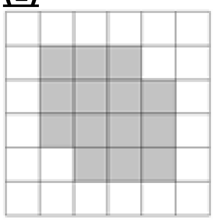
Ratkaisu:
Koska jakso on 5, $f(2013) = f(2010 + 3) = f(3)$. Luku 3 ei kuitenkaan ole annetulla välillä, joten siirrytään vielä yhden jakson verran: $f(3) = f(3 - 5) = f(-2) = (-2)^2 = 4$.

15.
Einari ja Pauliina riitelivät eräästä kokonaislukujen joukossa määritellystä funktiosta f, joka saa vain kokonaislukuarvoja.
Einari väitti: "Kun n on parillinen, $f(n)$ on parillinen."
Kävi ilmi, että Einari oli väärässä. Minkä seuraavista täytyy olla totta?

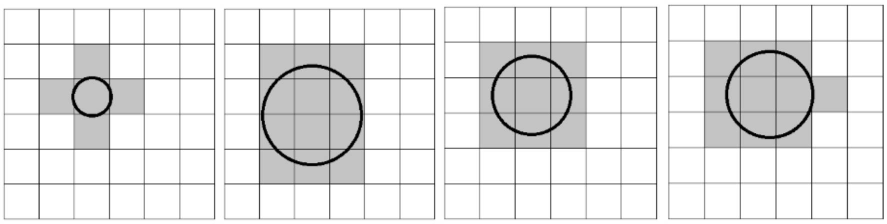
(A) Kun n on parillinen, $f(n)$ on pariton
(B) Kun n on pariton, $f(n)$ on parillinen
(C) Kun n on pariton, $f(n)$ on pariton
(D) On olemassa parillinen n, jolle $f(n)$ on pariton
(E) On olemassa pariton n, jolla $f(n)$ on pariton

Ratkaisu:
Väite D on oikein, sillä yksikin vastaesimerkki kaataa Einarin väitteen. Parittomista muuttujan n arvoista Einari ei sano mitään, joten niistä ei voida päätellä mitään.

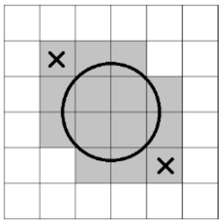
16.
Vessan neliöistä koostuvalla kaakelilattialla on pyöreä matto. Aikansa kuluksi pieni kenguru painaa mieleensä, minkä laattojen päällä matto on edes osittain (enemmän kuin yksi päällekkäinen piste), ja värittää myöhemmin nämä laatat harmaiksi. Mikä seuraavista ei ole mahdollinen lopputulos?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)


Ratkaisu:
A – D onnistuvat:

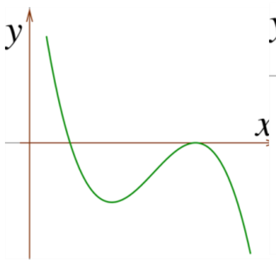


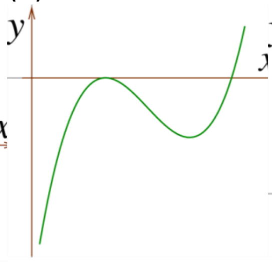
E puolestaan on mahdoton:

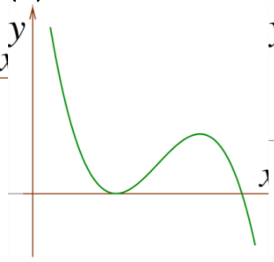


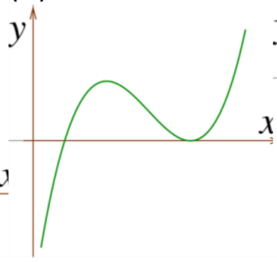
Jos ympyrän keskipiste on ruutujen leikkauspisteessä kuvan mukaisesti, ympyrä ei ylety merkittyihin nurkkaruutuihin. Jos keskipistettä siirretään kohti jompaakumpaa nurkkaruutua, kauimmaiseen nurkkaruutuun ei silti ylety.

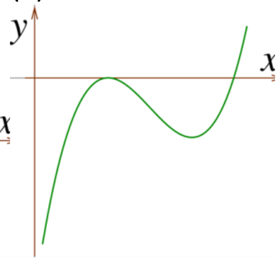
17.
Tutkitaan funktiota $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, missä $a < b$. Funktion kuvaaja on jokin seuraavista. Mikä?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


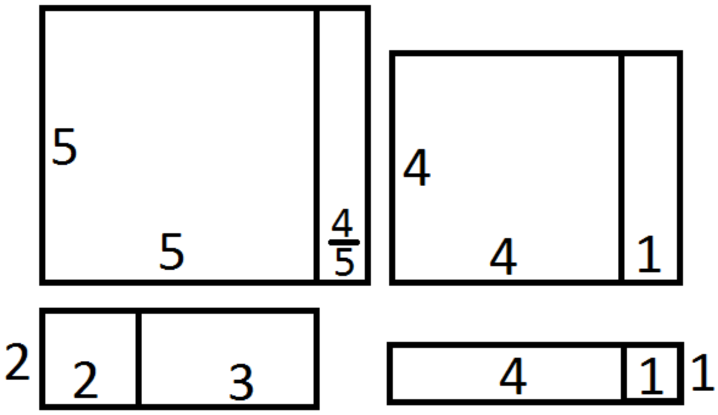
Ratkaisu:
Tulon nollasäännön perusteella funktiolla on kaksi nollakohtaa, a ja b. Funktion derivaatalle pätee $W'(x) = -(b - x)^2 - 2(b - x)(a - x)$. Koska $W'(b) = -(b - b)^2 - 2(b - b)(a - b) = 0$, on b sekä funktion W että sen derivaattafunktion nollakohta. Koska $b > a$, mahdollisia olisivat kuvaajat A ja D. Toisaalta $W'(a) = -(b - a)^2 - 0 < 0$, eli W on vähenevä nollakohdan a ympäristössä. Siis kuvaaja A on oikea.

TAI:
Korkeimman asteen termi on $-x^3$, joten vain A ja C ovat mahdollisia. Koska $(b - x)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, tekijä $a - x$ määrää polynomin merkin. Siis $W(x) > 0$, kun $a - x > 0$ eli $x < a$. Siis kuvaaja A on oikea.

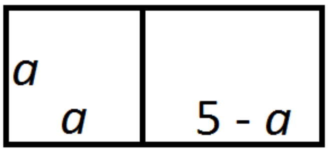
18.
Suorakulmion toisen sivun pituus on 5. Lisäksi tämän suorakulmion voi jakaa neliöksi ja suorakulmioksi, joista toisen pinta-ala on 4. Kuinka monta tällaista suorakulmiota on olemassa?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 **<u>(D)</u>** 4 (E) 5

Ratkaisu:
Mahdolliset suorakulmiot ovat seuraavat:

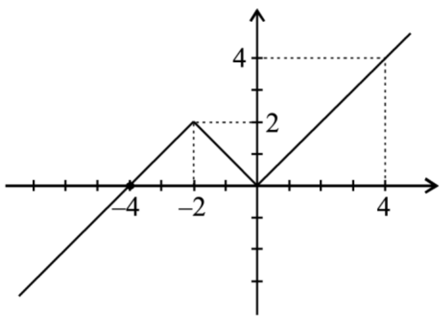


Jos 5 mittaista sivua ei jaeta, neliön sivu on 5 ja ainoa vaihtoehto on yllä ensimmäisenä esitetty. Muussa tapauksessa viiden mittainen sivu jaetaan. Jos neliön pinta-ala on 4, sen sivu on 2 ja saadaan vasemman alakulman kuvio. Jos neliön ala ei ole 4, suorakulmion on. Saadaan seuraava kuvio:



Suorakulmion alaksi saadaan $a(5-a) = 4$, josta ratkaistuna $a = 4$ tai $a = 1$, jolloin saadaan kaksi oikeanpuoleista kuviota. Suorakulmioita on siis yhteensä 4 erilaista.

19.
Pauli on piirtänyt funktion $f: R \longrightarrow R$ kuvaajan, joka koostuu kuvan mukaisesti janasta ja kahdesta puolisuorasta. kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $f(f(f(x))) = 0$ on?



<u>(A)</u> 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

Ratkaisu:
Kuvaajan avulla: $f\left(f\big(f(x)\big)\right) = 0$, kun $f\big(f(x)\big) = 0$ tai $f\big(f(x)\big) = -4$. Jatketaan:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & f\big(f(f(x))\big) = 0 \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
 & & f(f(x)) = 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & f(f(x)) = -4. \arrow[d] \\
 & f(x) = 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & f(x) = -4 \arrow[d] & & & f(x) = -8 \arrow[d] \\
x = 0 & & x = -4 & x = -8 & & & x = -12
\end{tikzcd}$$

Ratkaisuja on siis neljä.

20.

Laatikossa on 900 korttia, joissa on kussakin yksi luvuista 100 – 999. Maria ottaa laatikosta nipun kortteja ja laskee kunkin kortin luvusta sen numeroiden summan. Kuinka monta korttia täytyy vähintään ottaa, jotta hän saisi varmasti saman summan ainakin kolme kertaa?

(A) 51 (B) 52 **(C)** 53 (D) 54 (E) 55

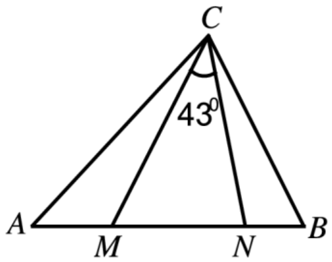
Ratkaisu:

Suurin mahdollinen pistesumma on 9 + 9 + 9 = 27 ja pienin 1 + 0 + 0 = 1. Nämä summat voi kuitenkin saada vain yhdellä tavalla. Summat 2 – 26 voi saada monella tavalla. Sama summa tulee siis kolmannen kerran viimeistään sen jälkeen, kun summat 2 – 26 ovat jo tulleet kahdesti ja 1 sekä 27 kumpikin kerran. Ennen kolmatta samaa summaa voi siis tulla $1 + 1 + 2 \cdot 25 = 52$ korttia, joten vastaus on 53.

5 pistettä

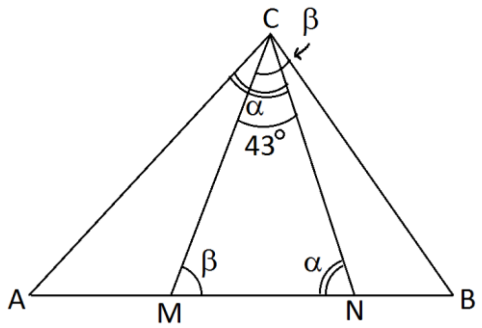
21.

Kolmiossa ABC sivun AB pisteille M ja N pätee $AN = AC$ ja $BM = BC$.
Kuinka suuri on $\measuredangle ACB$, kun $\measuredangle MCN = 43°$?



(A) $86°$ (B) $89°$ (C) $90°$ (D) $92°$ **<u>(E)</u>** $94°$

Ratkaisu:



Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, kuten kuvaan on merkitty. Kolmiosta *CMN* saadaan $\alpha + \beta + 43° = 180°$, eli $\alpha + \beta = 137°$. Kysytty kulma $\measuredangle ACB = \alpha + \beta - 43° = 137° - 43° = 94°$.

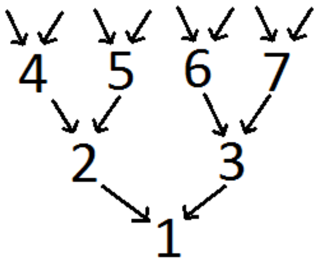
22.

Olkoon f kokonaislukujen joukossa määritelty funktio, jolle pätee $f(n) = \frac{n}{2}$, kun n on parillinen ja $f(n) = \frac{n-1}{2}$, kun n on pariton. Merkinnällä $f^k(n)$ tarkoitetaan lauseketta $f(f(\ldots f(n)\ldots)))$, missä f esiintyy k kertaa. Kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $f^{2013}(n) = 1$ on?

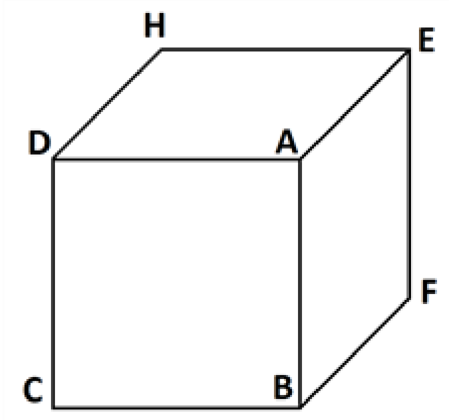
(A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} **<u>(D)</u>** 2^{2013} (E) äärettömän monta

Ratkaisu:

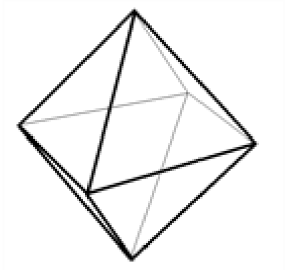
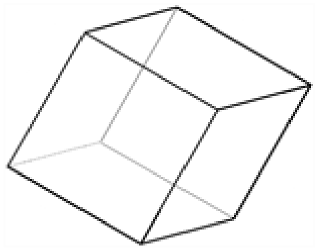
Yhtälöllä $f(n) = k$ on aina kaksi ratkaisua: parillinen ratkaisu $n = 2k$ ja pariton ratkaisu $n = 2k + 1$. Eri k:n arvoilla saadaan eri ratkaisut n, sillä kun $k_1 \neq k_2$, $2k_1 \neq 2k_2$ ja $2k_1 + 1 \neq 2k_2 + 1$. Yhtälöllä $f^{2013}(n) = 1$ on siis 2^{2013} ratkaisua.

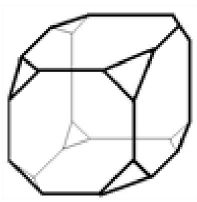
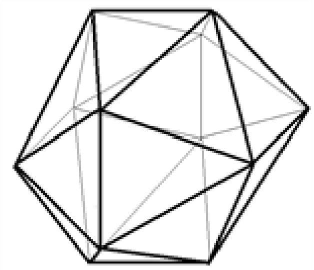


23.



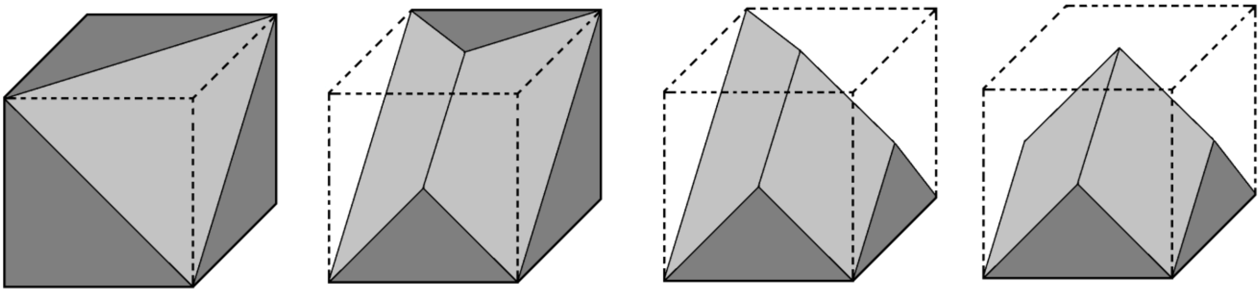
Kuvan kuutio leikataan tasolla, joka kulkee kärjen A ”naapurikärkien” D, E ja B kautta. Tämän jälkeen kuutio leikataan myös muiden seitsemän kärjen ”naapureiden” kautta kulkevilla tasoilla. Kun kaikki leikkaukset on tehty ja palat irrotetaan toisistaan, miltä näyttää kuution keskipisteen sisältävä pala?

(A) 
(B) 

(C) 
(D) 

(E) Keskipiste kuuluu useampaan palaan.

Ratkaisu:
Alla kuvasarja, jossa leikataan vuorollaan kärkien A, D, E ja H naapurikärkien kautta kulkevalla tasolla. Kun vastaavat leikkaukset tehdään alakärjille, saadaan kappale A.



24.
Kun n ensimmäistä positiivista kokonaislukua lasketaan yhteen, saadaan kolminumeroinen luku, jonka kaikki numerot ovat keskenään samoja. Mikä on luvun n numeroiden summa?

(A) 6 **<u>(B)</u>** 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

Ratkaisu:
Aritmeettinen summa: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Kolminumeroinen luku, jonka numerot ovat keskenään samoja, on muotoa $a\cdot 111$. Siis

$$\frac{n(n+1)}{2}=a\cdot 111$$
$$\Rightarrow n(n+1)=2\cdot a\cdot 111=2\cdot a\cdot 3\cdot 37.$$

Kahden peräkkäisen kokonaisluvun tulo on siis $2\cdot a\cdot 3\cdot 37$. Koska $a<10$ ja 37 on alkuluku, luvun 37 täytyy olla toinen näistä peräkkäisistä luvuista. Koska 38 ei ole jaollinen kolmella, täytyy olla $2\cdot a\cdot 3=36$, eli $a=6$. Siis $n=36$ ja kysytty numerosumma on $3+6=9$.

25.
Kasper laskee keksimänsä lukujonon alkioita seuraavilla kaavoilla:

$$a_1=1, \qquad a_{m+n}=a_m+a_n+mn,$$

missä m ja n ovat luonnollisia lukuja. Kuinka suuri on a_{100}?

(A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 **<u>(E)</u>** 5050

Ratkaisu:
Lasketaan hieman lukujonon alkua:
$a_1=1$
$a_2=a_1+a_1+1\cdot 1=3$
$a_3=a_2+a_1+1\cdot 2=6$
yleisesti
$a_n=a_{n-1}+a_1+1\cdot(n-1)=a_{n-1}+1+n-1$
$a_n=a_{n-1}+n$
Lukujonon alkiot kasvavat siis aina oman indeksilukunsa verran edelliseen nähden. Siispä

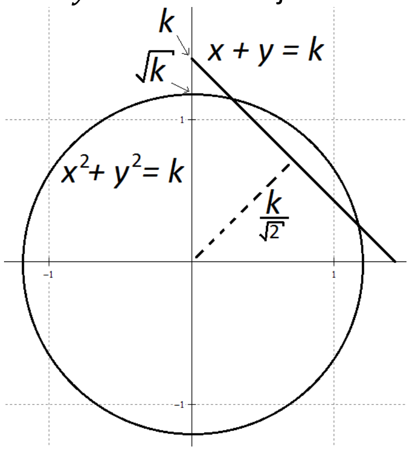
$$a_{100}=1+2+3+\cdots+100=100\cdot\frac{100+1}{2}=5050.$$

26.
Kuinka monta ratkaisua (x,y) yhtälöllä $x^2+y^2=|x|+|y|$ on reaalilukujen joukossa?

(A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 **<u>(E)</u>** äärettömästi

Ratkaisu:
Ratkaisuja on äärettömän monta, ja sen osoittamiseksi riittää tarkastella positiivisia lukujen x ja y arvoja. Kun x ja y ovat positiivisia, $x+y>0$. Merkitään $x+y=k$. Tämän yhtälön

ratkaisujoukko on laskeva suora $y = -x + k$. Suoran etäisyys origosta on $\frac{k}{\sqrt{2}}$. Yhtälön $x^2 + y^2 = k$ ratkaisujoukko on $\sqrt{k}$-säteinen origokeskinen ympyrä.

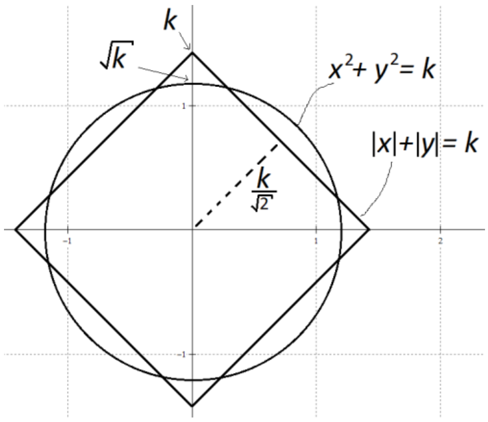


Suoralla ja ympyrällä on ainakin yksi yhteinen piste, kun $k \geq \sqrt{k}$ (eli $k \geq 1$) ja $\frac{k}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{k}$,

eli $\frac{k^2}{2} \leq k \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \leq 2k \quad \Leftrightarrow \quad k(k-2) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq 2$.

Leikkauspisteitä on siis silloin, kun $1 \leq k \leq 2$. Tällä välillä on äärettömän monta lukua k, joten ratkaisupareja (x, y) on myös äärettömän monta.

Edellä tarkasteltiin vain tapausta $x > 0$, $y > 0$. Yleisesti tilanne näyttää tältä:



Yhtä vakion k arvoa kohden on siis enintään 8 eri ratkaisua.

Tehtävän voi ratkaista myös algebrallisesti:

Tarkastellaan tapausta $x > 0, y > 0$ ja olkoon $+y = k$ kuten edellä. Nyt $x^2 + y^2 = x + y = k$, eli $x^2 + (k-x)^2 = k$, josta ratkaistuna $x = \frac{k \pm \sqrt{2k - k^2}}{2}$. Näiden kahden juuren summa on k, joten kun $x = \frac{k + \sqrt{2k-k^2}}{2}$, $y = \frac{k - \sqrt{2k-k^2}}{2}$ ja päinvastoin. Riittää siis tarkistaa, millä k:n arvoilla neliöjuuri on määritelty ja juurista pienempikin on positiivinen.

Neliöjuuri on määritelty: Vaaditaan $2k - k^2 > 0$, eli $k(2-k) > 0$, eli $0 < k < 2$.

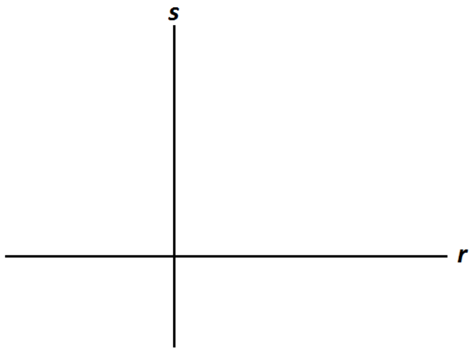
Positiiviset juuret: $k - \sqrt{2k - k^2} > 0$, eli $k^2 > 2k - k^2$, eli $k^2 > k$, eli $k > 1$.

Nämä yhdistämällä nähdään, että kaikki k:n arvon välillä $]1, 2[$ tuottavat positiivisia ratkaisuja, joten ratkaisuja on äärettömän monta.

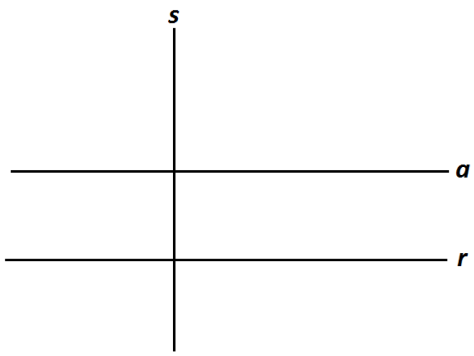
27.
Tasoon on piirretty joitakin suoria. Suora r leikkaa tasan kolmea muuta suoraa ja suora s leikkaa tasan neljää muuta suoraa. Suora t leikkaa tasan n muuta suoraa, missä $3 \neq n \neq 4$. Kuinka monta suoraa tasoon on piirretty?

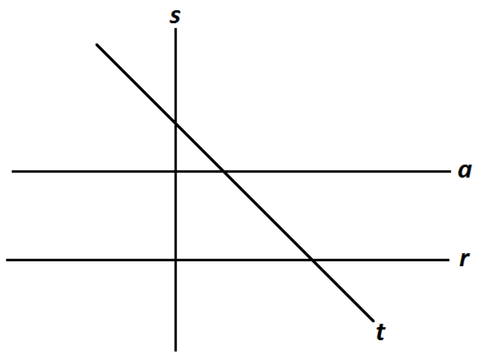
(A) 4 (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) jokin muu lukumäärä

Ratkaisu:
Suorat r ja s eivät voi olla yhdensuuntaisia, sillä muuten ne leikkaisivat yhtä montaa suoraa. Niillä on siis leikkauspiste.

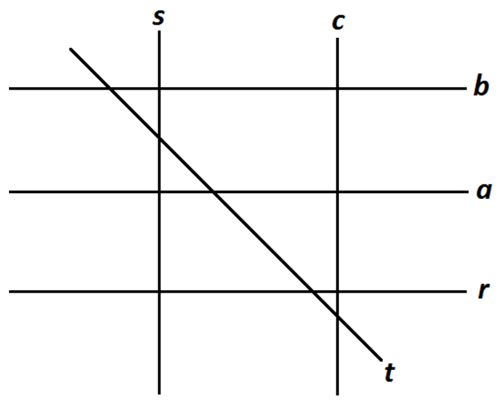


Mallikuvissa r ja s on piirretty kohtisuoriksi, mutta sillä ei ole merkitystä. Koska suora s leikkaa yhtä suoraa enemmän kuin suora r, ainakin yhden suoraa s leikkaavista suorista on oltava suoran r suuntainen. Olkoon tämä a.





Suora t puolestaan ei voi olla yhdensuuntainen suorien s tai r kanssa, sillä se leikkaa eri määrän suoria. Suora t leikkaa siis suorat s, r ja a. Koska sen piti leikata yli neljää, tarvitaan vielä vähintään kaksi suoraa lisää. Suorat r ja s tarvitsevat kumpikin enää yhden niitä leikkaavan suoran, joten lisättävien suorien täytyy kummankin olla niistä toisen kanssa yhdensuuntaisia. Olkoot ne b ja c.



Suoria ei voi enää lisätä leikkaamatta suoraa r tai s, ja niitä leikkaa jo vaadittu määrä suoria. Suora t leikkaa siis 5 suoraa ja suoria on yhteensä 6 kappaletta.

28.
Kuinka monelle kokonaislukuparille (x, y), missä $x \leq y$, lukujen tulo on 5 kertaa lukujen summa?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Ratkaisu:
Halutaan siis $xy = 5(x + y)$. Koska tulo xy on jaollinen viidellä, ainakin toinen luvuista x ja y on viidellä jaollinen. Olkoon se $y = 5k$. (Mietitään lukujen x ja y suuruusjärjestystä myöhemmin.) Tästä voidaan ratkaista:

$$x \cdot 5k = 5(x + 5k)$$
$$xk = x + 5k$$
$$xk - x = 5k$$
$$x(k - 1) = 5k$$
$$x = \frac{5k}{k - 1}.$$

Jotta x olisi kokonaisluku, jaon täytyy mennä tasan. Peräkkäisillä luvuilla k ja $k - 1$ ei voi olla ykköstä suurempia yhteisiä tekijöitä, joten jaon $\frac{5}{k-1}$ täytyy mennä tasan. On neljä vaihtoehtoa:

1. $k - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad k = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5k}{k-1} = 6, \;\; y = 5k = 30,$
2. $k - 1 = -5 \quad \Rightarrow \quad k = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5k}{k-1} = 4, \;\; y = 5k = -20$
3. $k - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5k}{k-1} = 10, \;\; y = 5k = 10$
4. $k - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5k}{k-1} = 0, \;\; y = 5k = 0$

Ratkaisut ovat siis (6, 30), (4, -20), (10, 50) ja (0,0) sekä näiden kanssa symmetriset (30, 6), (-20, 40), (10, 10). Näistä ehto $x \leq y$ toteutuu neljässä: (6, 30), (-20, 4), (10, 10) ja (0,0).

29.
Kelmien ja ritarien saarella asuu vain kahdenlaisia ihmisiä: Kelmit valehtelevat aina, ritarit puhuvat aina totta. Tapasin saarella asuvat veljekset, ja kysyin heistä pidemmältä, olivatko he molemmat ritareita. Sain vastauksen, mutta en osannut päätellä, kumpaa ryhmää he olivat. Kysyin sitten lyhyemmältä, oliko pidempi ritari. Vastauksen saatuani osasin päätellä, kumpaan ryhmään veljekset kuuluivat.

Olivatko veljekset kelmejä vai ritareita?

(A) Molemmat olivat ritareita.
(B) Molemmat olivat kelmejä.
(C) Pidempi oli ritari ja lyhyempi kelmi.
(D) Pidempi oli kelmi ja lyhyempi ritari.
(E) Ei voida ratkaista näillä tiedoilla.

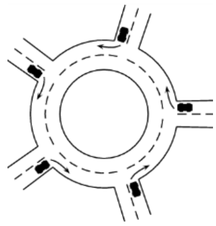
Ratkaisu:
Vaihtoehtoja on neljä:

Tapaus	**Pidempi**	**Lyhyempi**	**Vastaus 1. kysymykseen**	**Vastaus toiseen kysymykseen**
1	Ritari	Ritari	kyllä	kyllä
2	Ritari	Kelmi	ei	-
3	Kelmi	Ritari	kyllä	ei
4	Kelmi	Kelmi	kyllä	kyllä

Ensimmäisen vastauksen jälkeen oli yhä epäselvää, mikä tapaus on kyseessä, joten vastaus oli ”kyllä”. Tapaus 2 ei siis käy. Toisen kysymyksen jälkeen oli selvää, mitä veljekset olivat. Vastauksen täytyi siis olla ”ei”, joten tapaus 3 on oikein: Pidempi on kelmi ja lyhyempi ritari.

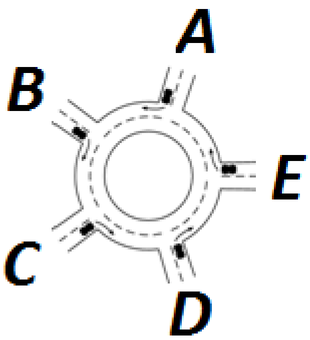
30.

Kuvan liikenneympyrään saapuu viisi autoa samaan aikaan, kukin omasta suunnastaan. Jokainen auto poistuu liikenneympyrästä eri suuntaan kuin mistä tuli, eikä kahta autoa poistu samaan suuntaan. Kuinka monella eri tavalla autot voivat poistua liittymästä?



(A) 24 **(B)** 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120

Ratkaisu:
Nimetään liittymät (ja samalla niistä tulevat autot) ja tarkastellaan autoa A.



Autolla A on 4 mahdollista poistumisliittymää. Nämä tapaukset ovat symmetrisiä, joten tarkastellaan niistä yksi ja kerrotaan lopulta vaihtoehtojen määrä neljällä.

Nimetään se liittymä, josta A poistuu liittymäksi B. Yllä oleva kuva on siis vain yksi esimerkki nimeämisestä.

Nyt tapauksia on oleellisesti ottaen kaksi:
1. Auto B poistuu liittymästä A. Autoille C, D, E jää vain **2 vaihtoehtoa**. (C valitsee liittymien D ja E välillä ja muille jää vain yksi mahdollinen liittymä.)
2. B poistuu jostakin muusta liittymästä (**3 vaihtoehtoa**), *nimetään* se liittymäksi C. Nyt
   a. Auto C voi poistua liittymästä A. D ja E vaihtavat päittäin (**1 vaihtoehto**)
   b. Auto C poistuu liittymästä D tai E (**2 vaihtoehtoa**). Autoille D ja E ei jää kuin yksi mahdollinen liittymä kummallekin.

Vaihtoehtoja on yhteensä $2 + 3 \cdot (1 + 2) = 11$ kappaletta. Koska tämä oli yksi tapaus alkuperäisestä neljästä, tapoja on yhteensä $4 \cdot 11 = 44$.