Ratkaisut on kirjoitettu kunkin tehtävän perään; oikea vaihtoehto on alleviivattu. Useimmat tehtävät voi ratkaista monella tavalla. Tässä on pyritty esittämään tyylikkäitä ratkaisuja.

Oikea rivi on seuraava:

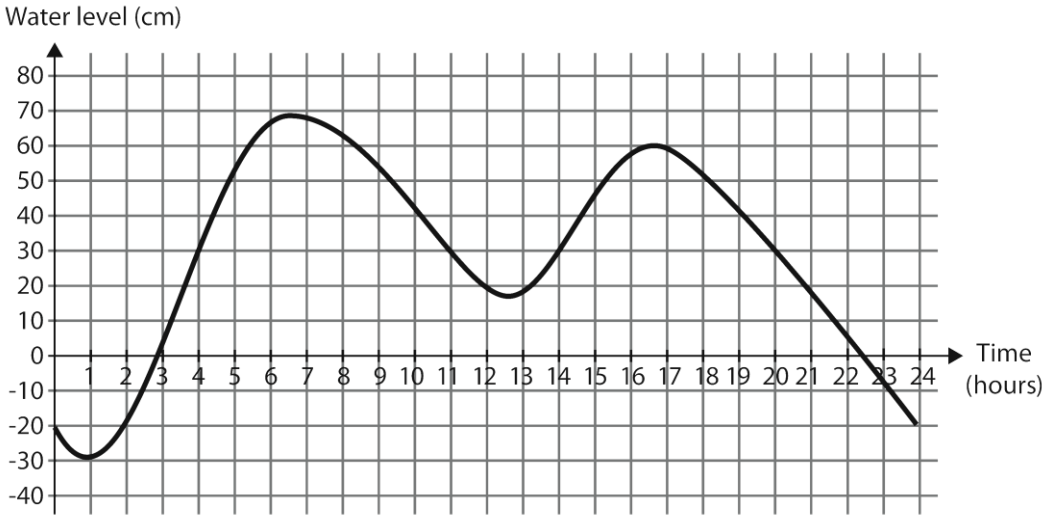
TEHTÄVÄ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VASTAUS	E	A	C	A	D	A	E	E	C	C

TEHTÄVÄ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
VASTAUS	A	D	D	D	A	C	C	C	B	E

TEHTÄVÄ	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
VASTAUS	E	D	E	B	D	D	B	A	D	B

3 pistettä

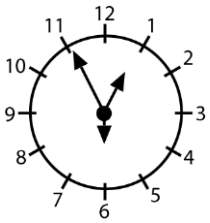
1.
Satamakaupungin vedenkorkeus vaihtelee erään päivän aikana oheisen kuvaajan mukaisesti. Kuinka monta tuntia vesi oli +30 cm tason yläpuolella tuon päivän aikana?



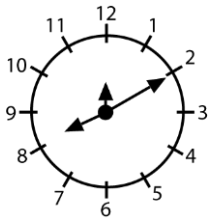
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9 **(E)** 13

Ratkaisu: Väleillä 4 h … 11 h ja 14 h … 20 h on 13 tuntia.

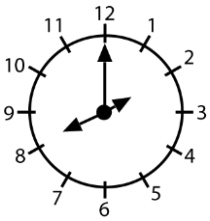
2.
Kuvan kellolla on kolme erimittaista viisaria (tunneille, minuuteille ja sekunneille). Kello toimii normaalisti, mutta emme tiedä, mikä viisari on mikä. Oikealla kello näyttää aikaa 12:55:30. Missä kuvassa sama kello näyttää aikaa 8:10:00?



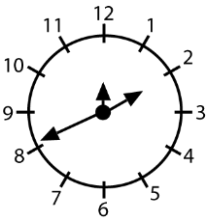
(A)



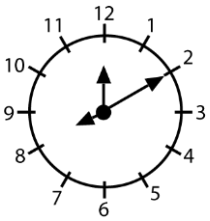
(B)



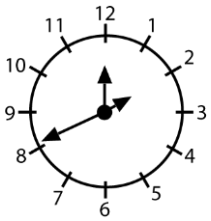
(C)



(D)



(E)



Ratkaisu: Mallikuvan perusteella lyhyt viisari on sekuntiviisari, pisin minuuttiviisari ja keskimmäinen tuntiviisari.

3.

Viiden luvun listassa ensimmäinen luku on 2 ja viimeinen 12. Kolmen ensimmäisen luvun tulo on 30, kolmen keskimmäisen tulo 30 ja kolmen viimeisen 120. Mikä on keskimmäinen luku?

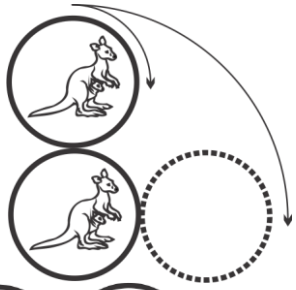
2				12

(A) 3 (B) 4 **(C)** 5 (D) 6 (E) 10

Ratkaisu: Koska vasemmanpuoleisten ja keskimmäisten lukujen tulo on sama, myös neljännessä ruudussa on luku 2. Keskimmäisessä täytyy olla 5, jotta oikeanpuoleisten tulo olisi 120. Luvut ovat 2, 3, 5, 2 ja 12.

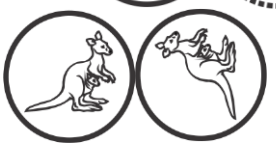
4.

Kuvan alempi kolikko pysyy paikoillaan ja ylempää kieritetään sen ympäri liukumatta kuvan mukaisesti. Mikä on lopputulos?



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) ei mikään edellisistä

Ratkaisu: Loppuasemassa sivuamispiste on siirtynyt kummankin kolikon reunalla neljännesympyrän.

5.

Neljässä alla olevista laskuista numerot 8 voitaisiin korvata jollakin toisella positiivisella luvulla ilman, että tulos muuttuisi. Millä alla olevista laskuista ei ole tätä ominaisuutta?

(A) $(8+8-8):8$ (B) $8+(8:8)-8$ (C) $8:(8+8+8)$
(D) $8-(8:8)+8$ (E) $8\cdot(8:8):8$

Ratkaisu: Nollasta poikkeavalle luvulle a pätee

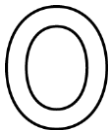
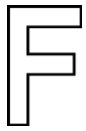
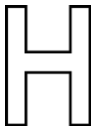
$(a+a-a):a=1$ $a+(a:a)-a=1$ $:(a+a+a)=\frac{1}{3}$
$a-(a:a)+a=2a-1$ $a\cdot(a:a):a=1.$

6.
Yhdeksännumeroisen luvut numeroiden summa on 8. Mikä on sen numeroiden tulo?

(A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) 5040

Ratkaisu: Koska summa on pienempi kuin numeroiden määrä, ainakin yksi numeroista on nolla.

7.
Marilla on sakset ja viisi pahvikirjainta. Hän leikkaa jokaisen kirjaimen poikki suoraa viivaa pitkin niin, että kirjain hajoaa mahdollisimman moneen palaseen. Mistä kirjaimesta tulee eniten paloja?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Ratkaisu:

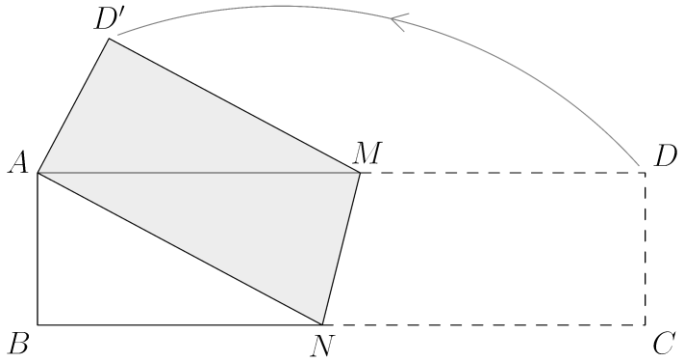
8.
Reaaliluvulle x pätee $x^3 < 64 < x^2$. Mikä seuraavista on varmasti totta?

(A) $0 < x < 64$ (B) $-8 < x < 4$ (C) $x > 8$ (D) $-4 < x < 8$ **(E)** $x < -8$

Ratkaisu: Koska $64 < x^2$, täytyy olla $|x| > 8$. Lisäksi $x^3 < x^2$, joten x on negatiivinen. Siis $x < -8$.

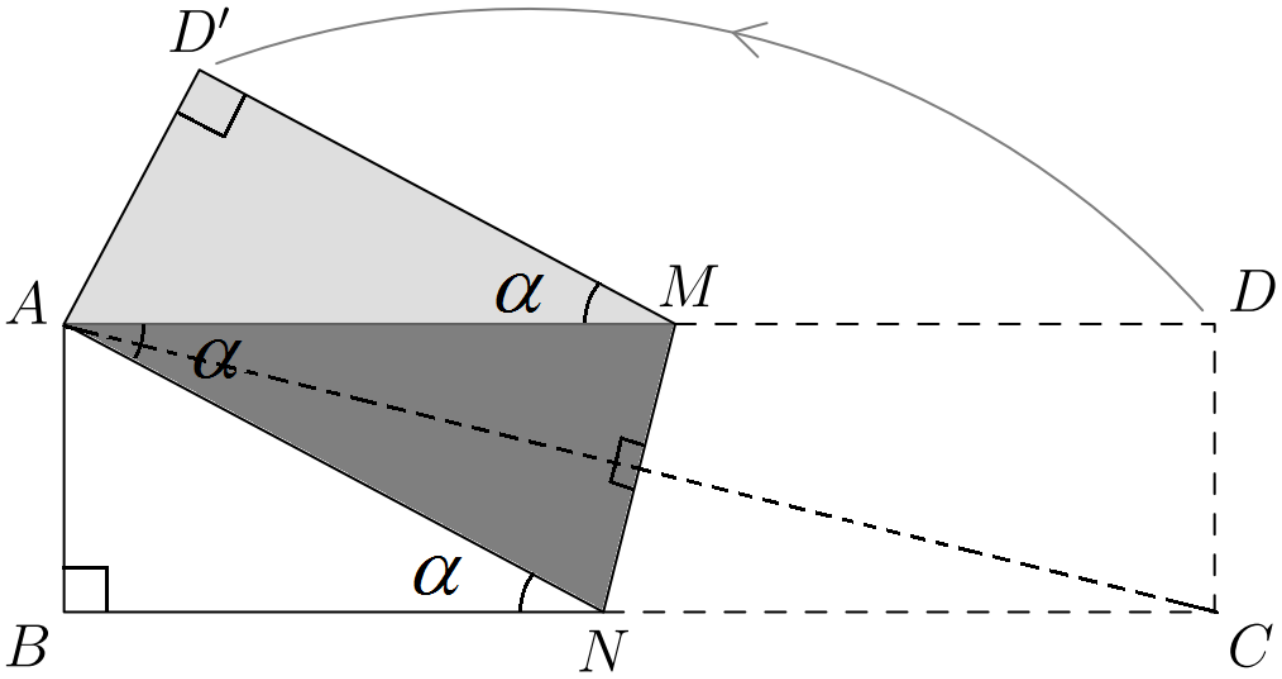
9.

Suorakulmion muotoinen paperinpala $ABCD$ on mitoiltaan 4 cm × 16 cm. Se taitetaan janaa MN pitkin niin, että kulma C kohtaa kulman A kuvan mukaisesti. Mikä on nelikulmion $ANMD'$ ala?

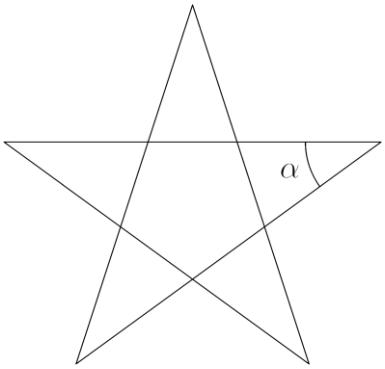


(A) 28 cm^2 (B) 30 cm^2 **(C)** 32 cm^2 (D) 48 cm^2 (E) 56 cm^2

Ratkaisu: Varjostettu alue on tasan puolet paperin pinta-alasta, koska nelikulmiot $ANMD'$ ja $AMNB$ ovat yhtenevät (symmetria lävistäjän AC suhteen). Alojen yhtäsuuruuden näkee myös siitä, että nelikulmioiden yhteisen osan (kuvan tumma harmaa) ulkopuolelle jäävät osat ovat yhtenevät kolmiot ABN ja $AD'M$.

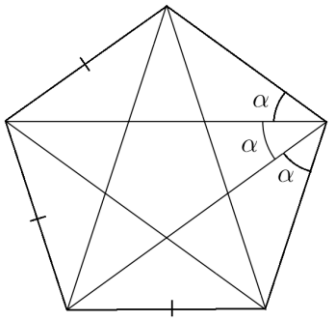


10.
Tähden kärjet muodostavat säännöllisen viisikulmion. Kuinka suuri on kulma α?



(A) $24°$ (B) $30°$ **(C)** $36°$ (D) $45°$ (E) $72°$

Ratkaisu: Viisikulmion kulmien summa on $540°$, joten yhden kulman suuruus on $540°: 5 = 108°$. Kehäkulmalauseen nojalla lävistäjät jakavat kulman kolmeen, koska lävistäjien väliset kulmat katsovat yhtä pitkiä kaaria (säännöllisen monikulmion kärjet ovat samalla ympyrällä). Siis $\alpha = 108°: 3 = 36°$.



4 pistettä

11.
Ikäni on kaksinumeroinen luku, joka on luvun 5 potenssi. Serkkuni ikä on kaksinumeroinen luku, joka on luvun 2 potenssi. Kun ikiämme kuvaavien lukujen kaikki numerot lasketaan yhteen, summa on pariton. Mikä on ikiemme numeroiden tulo?

(A) 240 (B) 2010 (C) 60 (D) 50 (E) 300

Ratkaisu: Luvun 5 potensseista kaksinumeroinen on vain $5^2 = 25$. Kahden potensseista käyvät 16, 32 ja 64. Koska luvussa 25 on yksi pariton numero, vain 64 käy. Tulo on siis $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 240$.

12.
Mikä seuraavista funktioista toteuttaa yhtälön
$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

(A) $f(x) = \frac{2}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ **(D)** $f(x) = \frac{1}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Ratkaisu: Suora sijoitus näyttää, että yksikertaisin vaihtoehto D toimii: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \frac{1}{f(x)}$.
Vastaavasti muut eivät toimi. Vastaamista nopeuttaa tieto siitä, että vain yksi vaihtoehto on oikein.

13.
Matkatoimisto järjesti Sisilian-matkalla neljä vapaaehtoista päiväretkeä. Kuhunkin retkeen osallistui 80 % matkalaisista. Mikä on kaikkiin retkiin osallistuneiden pienin mahdollinen prosenttiosuus?

(A) 80 % (B) 60 % (C) 40 % **(D)** 20 % (E) 16 %

Ratkaisu: Kultakin retkeltä jäi pois 20 %. Mikäli joka retkeltä jäi pois eri henkilöt, jonkin retken jätti väliin $4 \cdot 20\ \% = 80\ \%$ retkeläisistä.

14.
Mikä on suurin kokonaisluku n, jolle pätee $n^{200} < 5^{300}$?

(A) 5 (B) 6 (C) 8 **(D)** 11 (E) 12

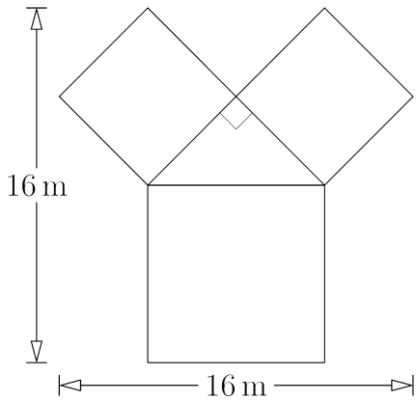
Ratkaisu: Otetaan puolittain 100. juuri, jolloin saadaan $n^2 < 5^3 = 125$. Nyt $11^2 = 121$ ja $12^2 = 144$, joten $n = 11$.

15.
Mikä on epäyhtälön $|x| + |x - 3| > 3$ ratkaisu?

(A) $x < 0$ tai > 3 (B) $-3 < x < 3$ (C) $x < 3$ (D) $-3 < x$ (E) Epäyhtälö toteutuu kaikilla reaaliluvuilla.

Ratkaisu: Ratkaisujoukon muodostavat lukusuoran pisteet, joiden etäisyys luvuista 0 ja 3 on yhteensä enemmän kuin 3.

16.
Kuvassa on suunnitelma ruusutarhaa varten. Kahteen samanlaiseen neliöön tulee valkoisia ruusuja, suorakulmaiseen kolmioon keltaisia ja suureen neliöön punaisia ruusuja. Mikä on ruusutarhan kokonaispinta-ala, kun sen pituus ja leveys ovat kumpikin 16 m kuvan osoittamalla tavalla?



(A) 114 m^2 (B) 130 m^2 **(C)** 144 m^2 (D) 160 m^2 (E) 186 m^2

Ratkaisu: Pienien neliöiden lävistäjä on 8 m, ja tämä on myös suuren neliön sivu. Sen ala on siis 64 m^2. Pythagoraan lauseen nojalla pienten neliöiden yhteenlaskettu ala on samat 64 m^2. Kolmion ala on puolet pienestä neliöstä, eli 32 : 2 m^2 = 16 m^2. Yhteensä 64 m^2 + 64 m^2 + 16 m^2 = 144 m^2.

17.

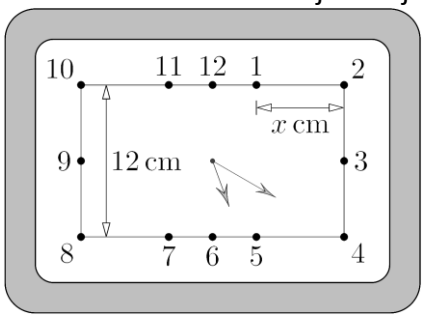
Slovakiassa käytetään kouluarvosanoja 1 – 5, joista 1 on paras. Eräässä koulussa kokeet eivät menneet kovin hyvin. Koko luokan keskiarvo oli 4. Poikien keskiarvo oli 3,6 ja tyttöjen 4,2. Mikä seuraavista on totta?

(A) poikia oli kaksi kertaa niin paljon kuin tyttöjä
(B) poikia oli 4 kertaa niin paljon kuin tyttöjä
(C) tyttöjä oli kaksi kertaa niin paljon kuin poikia
(D) tyttöjä oli 4 kertaa niin paljon kuin poikia
(E) tyttöjä ja poikia oli yhtä paljon

Ratkaisu: Poikien keskiarvo poikkeaa koko luokan keskiarvosta kaksi kertaa niin paljon kuin tyttöjen, joten tyttöjä on kaksinkertainen määrä. Ratkeaa myös yhtälöllä.

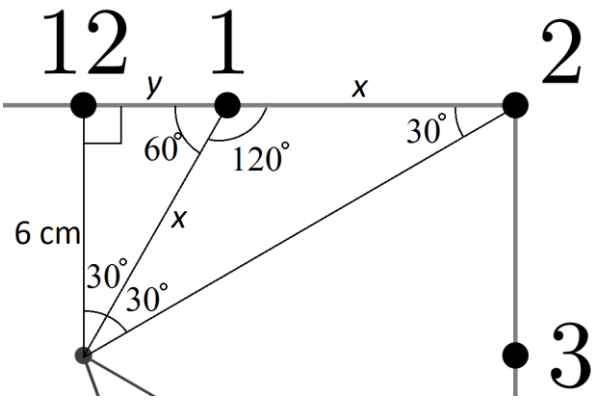
18.

Kuvan kello on erikoisen muotoinen, mutta sen viisarit liikkuvat tavalliseen tapaan koko ajan samalla nopeudella. Tästä syystä luvut 1 – 12 on täytynyt sijoitella epätasaisesti. Lukujen 8 ja 10 välinen matka on 12 cm ja lukujen 1 ja 2 välinen x cm. Kuinka suuri on x?

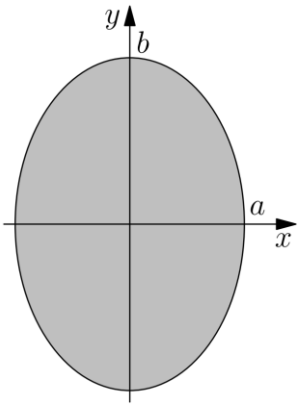


(A) $3\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ **(C)** $4\sqrt{3}$ (D) $2+\sqrt{3}$ (E) $12-3\sqrt{3}$

Ratkaisu: Tuntien välinen kulma on $360° : 12 = 30°$. Saadaan oheinen kuvio. Nopea tapa: $x = \frac{6}{\cos 30°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$. Ratkeaa myös yhtälöparista $\begin{cases} \frac{6}{y} = \frac{x+y}{6} \\ 6^2 + y^2 = x^2. \end{cases}$



19.



Olkoon $b > a$. Jos kuvan ellipsi pyörähtää x-akselin ympäri, se rajaa avaruudesta ellipsoidin E_x, jonka tilavuus on V_x. Jos ellipsi pyörähtää y-akselin ympäri, syntyy ellipsoidi E_y, jonka tilavuus on V_y. Mikä seuraavista on totta?

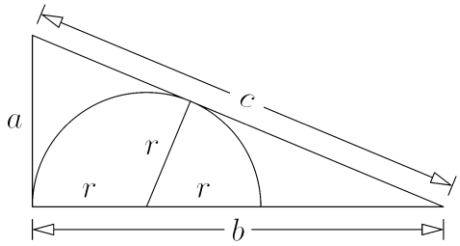
(A) $E_x \neq E_y$ ja $V_x < V_y$
(B) $E_x \neq E_y$ ja $V_x > V_y$
(C) $E_x \neq E_y$ mutta $V_x = V_y$
(D) $E_x = E_y$ ja $V_x = V_y$
(E) $E_x = E_y$ mutta $V_x \neq V_y$

Ratkaisu: Ellipsoidi E_y on kokonaisuudessaan ellipsoidin E_x sisällä.

Vaihtoehto (E) on mielenkiintoinen.

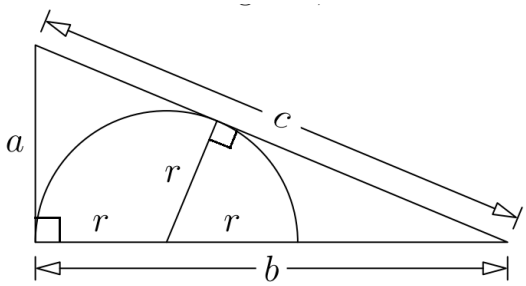
20.

Suorakulmaisen kolmion sivut ovat a, b ja c. Mikä on kuvan mukaisesti kolmion sisään piirretyn puoliympyrän säde?



(A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ (B) $\frac{ab}{a+b+c}$ (C) $\frac{ab}{b+c}$ (D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ **(E)** $\frac{ab}{a+c}$

Ratkaisu: Kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk). Saadaan verranto $\frac{a}{c} = \frac{r}{b-r} \Leftrightarrow r = \frac{ab}{a+c}$.

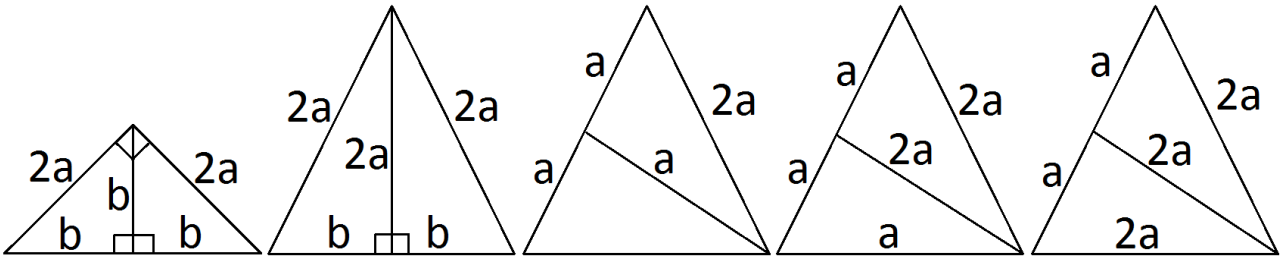


5 pistettä

21.
Tasakylkisellä kolmiolla ABC on mediaani (eli jonkin kärjen ja sen vastaisen sivun keskipisteen yhdistävä jana), joka jakaa kolmion kahteen tasakylkiseen kolmioon. Mikä on kolmion ABC pienin mahdollinen kulma?

(A) $15°$ (B) $22{,}5°$ (C) $30°$ (D) $36°$ **(E)** $45°$

Ratkaisu: Mediaani voidaan piirtää kannalle (kuvat 1 ja 2) tai toiselle kyljistä (kuvat 3 – 5). Näistä viidestä vaihtoehdosta vain ensimmäinen on mahdollinen, jolloin kolmion kulmat ovat 45°, 45° ja 90°. Toisen ja viidennen kolmion kieltää Pythagoraan lause, kolmas ja neljäs sisältävät ”kolmion”, jonka pisin sivu on kahden muun pituuden summa.



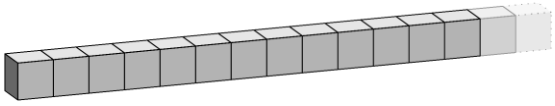
22.
Tarkastellaan kahta eri muunnosta, jotka voidaan tehdä murtoluvulle:
1) osoittajaan lisätään 8
2) nimittäjään lisätään 7
Kun tällaisia muunnoksia on tehty yhteensä n kappaletta, murtoluvusta $\frac{7}{8}$ on saatu yhtä suuri kuin alun perin. Mikä on luvun n pienin mahdollinen positiivinen arvo?

(A) 56 (B) 81 (C) 109 **(D)** 113 (E) Kuvattu tilanne on mahdoton.

Ratkaisu: Vaaditaan siis $\frac{7+8k}{8+7m} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 64k = 49m$. Koska luvuilla $64 = 8^2$ ja $49=7^2$ ei ole yhteisiä tekijöitä, pienin ratkaisu on $k = 49, m = 64$. Siis $n = k + m = 113$.

23.

Kenguru tahtoo liimata pötkön tavallisista nopista (joiden vastakkaisten tahkojen silmälukujen summa on 7). Hän liimaa yhteen vain tahkoja, joilla on sama silmäluku. Kenguru haluaa, että pötkön ulkopintaan jää yhteensä 2012 täplää. Kuinka monta noppaa pitää liimata?

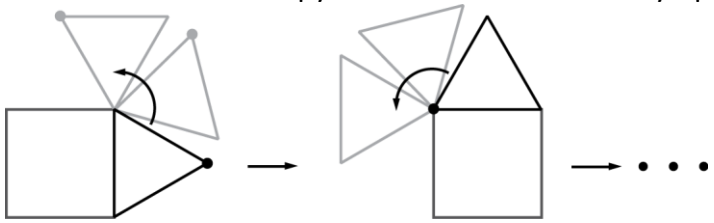


(A) 70 (B) 71 (C) 142 (D) 143 **(E)** On mahdotonta saada 2012 täplää.

Ratkaisu: Kun noppia on n kpl, ”pötkön” kyljissä on yhteensä $14n$ täplää. Päätyjen täplämäärä riippuu parillisuudesta: kun n on pariton, päätyjen summa on 7. Kun n on parillinen, kummassakin päässä on sama täplämäärä ja summa on siis 2, 4, 6, 8, 10 tai 12. Kuitenkin $2012 = 143 \cdot 14 + 10$, eli noppia tarvitaan pariton määrä 143 – jolloin päätyjen summa ei voi olla 10. 2012 täplää on siis mahdotonta saada.

24.

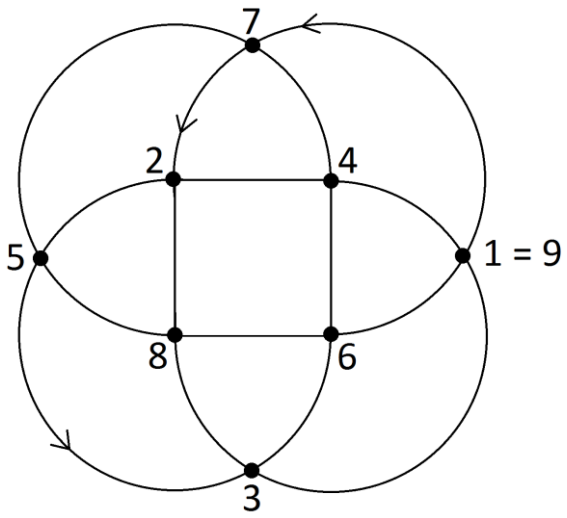
Tasasivuinen kolmio pyörii liukumatta neliön ympäri kuvan mukaisesti. Neliön sivu on 1.



Kuinka pitkän matkan kolmioon merkitty piste kulkee ennen kuin kolmio ja kyseinen piste ovat ensimmäisen kerran alkuperäisessä asemassaan?

(A) 4π **(B)** $\frac{28}{3}\pi$ (C) 4π (D) $\frac{14}{3}\pi$ (E) $\frac{21}{2}\pi$

Ratkaisu: Piste kulkee kuvaan merkityn reitin numerojärjestyksessä. Kussakin siirtymässä kolmio kääntyy $180° + 30° = 210°$ eli $\frac{210}{360} = \frac{7}{12}$ ympyrästä. Siirtymiä on 8 kpl ja ympyröiden säde on 1, joten reitin pituus on $\frac{7}{12}\pi \cdot 8 = \frac{28\pi}{3}$. Huomautettakoon, että siirtymissä 3 → 4 ja 6 → 7 piste käy alkuasemassaan, mutta kolmio on eri asennossa kuin alussa.



25.

Luvut 1, 2, 3, ja 4 nimetään jossakin järjestyksessä luvuiksi x_1, x_2, x_3 ja x_4. Kuinka monella eri tavalla nimeäminen voidaan tehdä, jos halutaan, että $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ on jaollinen kolmella?

(A) 8 (B) 12 (C) 14 **(D)** 16 (E) 24

Ratkaisu: Neljäsosassa tapauksista $x_1 = 3$. Tällöin jaollisuuden ratkaisee summa $x_2x_3 + x_3x_4$. Jos $x_3 = 1$, summaksi saadaan 6 olivat loput kaksi numeroa kummin päin vain (kaksi tapausta). Jos $x_3 = 2$, summaksi saadaan 10, ei jaollinen. Jos $x_3 = 4$, summa on 12, ja loput kaksi lukua voidaan valita kummin päin tahansa (kaksi tapausta). Suotuisia tapoja on siis 4, kun $x_1 = 3$. Yhteensä tapoja on $4 \cdot 4 = 16$.

26.

Matematiikan tunnin jälkeen taululle on jäänyt paraabelin $y = x^2$ kuvaaja sekä 2012 kappaletta suoran $y = x$ kanssa yhdensuuntaisia suoria, joista kukin leikkaa paraabelin kahdessa pisteessä. Mikä on kaikkien leikkauspisteiden x-koordinaattien summa?

(A) 0 (B) 1 (C) 1006 **(D)** 2012 (E) liian vähän tietoja annettu

Ratkaisu: Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat yhtälöparien

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + b \end{cases}$$

ratkaisuja, eli muotoa $x^2 = x + b \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$. Kunkin leikkauspisteparin summa on siis 1 ja vastaus näin ollen 2012.

27.

Lukujonossa 1, 1, 0, 1, -1, …, kaksi ensimmäistä termiä a_1 ja a_2 ovat suuruudeltaan 1. Kolmas termi on kahden edellisen erotus (eli $a_3 = a_1 - a_2$) ja neljäs kahden edellisen summa (eli $a_4 = a_2 + a_3$). Tämän jälkeen $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, ja niin edelleen. Mikä on lukujonon 100 ensimmäisen termin summa?

(A) 0 **(B)** 3 (C) -21 (D) 100 (E) -1

Ratkaisu: Lukujono alkaa (**1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0,** 1, 1, 0, 1, -1, …). Lihavoidun osion jälkeen lukujono alkaa toistaa itseään, sillä kahden ykkösen kohdalle osuus taas vähennyslasku. Lukujonolla on siis 12 termin jakso, jonka termien summa on 0. Ensimmäisen $96 = 8 \cdot 12$ termin summa on siis 0 ja termien 97 – 100 yhteensä 3.

28.
Kuution kolme kärkipistettä ovat $P(3,4,1)$, $Q(5,2,9)$ ja $R(1,6,5)$. Ne eivät ovat samalla tahkolla. Mikä on kuution keskipiste?

(A) $(4,3,5)$ (B) $(2,5,3)$ (C) $(3,4,7)$ (D) $(3,4,5)$ (E) $(2,3,5)$

Ratkaisu, tapa 1: Laskemalla pisteiden etäisyydet saadaan $PQ = 6\sqrt{2}$, $PR = 2\sqrt{6}$ ja $QR = 4\sqrt{3}$. Näistä PQ on pisin, joten se on avaruuslävistäjä. Keskipisteen koordinaatit ovat pisteiden P ja Q koordinaattien keskiarvot.
Tapa 2: Vektorit $\overline{PR}$ ja $\overline{QR}$ ovat eripituiset ja kohtisuorassa (pistetulo), joten PQ on avaruuslävistäjä. Näiden pisteiden puolivälistä löytyy keskipiste kuten edellä.

Huomattakoon, että maininta pisteiden sijainnista eri tahkoilla ei ole tehtävän kannalta oleellinen.

29.
Ioana valitsee numerot a ja b joukosta {1, 2, 3, …, 26}. Tulo ab on yhtäsuuri kuin loppujen 24 luvun summa. Kuinka suuri on $|a-b|$?

(A) 10 (B) 9 (C) 7 **(D)** 6 (E) 2

Ratkaisu: Lukujen 1 … 26 summa on aritmeettinen, joten sen arvo on $26 \cdot \frac{1+26}{2} = 351$. Saadaan
$351 - a - b = ab \Leftrightarrow$
$ab + a + b = 351 \Leftrightarrow$
$ab + a + b + 1 = 352 \Leftrightarrow$
$(a+1)(b+1) = 352 = 2^5 \cdot 11 = 16 \cdot 22$.

Siis $a = 15$ ja $b = 21$ tai toisin päin, joten $|a-b| = 6$.

30.

Jokainen Ihmemaan kissa on joko viisas tai hullu. Jos viisas kissa päätyy samaan huoneeseen kolmen hullun kanssa, sekin muuttuu hulluksi. Jos hullu kissa päätyy samaan huoneeseen kolmen viisaan kissan kanssa, se paljastuu hulluksi.

Kolme kissaa meni tyhjään huoneeseen. Pian tämän jälkeen neljäs kissa meni sisään, ja kohta ensimmäinen kissa tuli ulos. Sitten 5. kissa meni sisään, 2. tuli ulos ja niin edelleen. Näin jatkui aina siihen asti, kunnes 2012. kissa meni sisään, jolloin ensimmäistä kertaa jokin kissa paljastui hulluksi.

Mitkä kaksi kissaa saattoivat molemmat olla hulluja huoneeseen saapumisensa jälkeen?

(A) Kissat 1 ja 2011.
(B) Kissat 2 ja 2010.
(C) Kissat 3 ja 2009.
(D) Kissat 4 ja 2012.
(E) Kissat 2 ja 2011.

Ratkaisu:

Kun kissa paljastuu hulluksi, huoneessa täytyy olla kolme viisasta ja yksi hullu. Täsmälleen yksi kissoista 2009, 2010, 2011 ja 2012 on siis hullu ja loput viisaita. Vaihtoehtoja on neljä, ja niistä kukin pakottaa aiempien kissojen statuksen yksikäsitteisesti. Huoneessa ei nimitäin ole aiemmin voinut olla kolmea viisasta ja yhtä hullua (hullu olisi paljastunut) tai kolmea hullua ja yhtä viisasta (viisas olisi muuttunut hulluksi, samoin kaikki seuraavat viisaat kissat).

2012	**2011**	**2010**	**2009**	**2008**	**2007**	**2006**	**2005**	**…**	**4**	**3**	**2**	**1**
H	V	V	V	V	V	V	V	…	**V**	V	V	V
V	**H**	V	V	H	H	V	V	…	H	H	**V**	**V**
V	V	**H**	V	H	V	H	V	…	H	V	**H**	V
V	V	V	**H**	H	V	V	H	…	H	**V**	V	H

Tarjotuista vaihtoehdoista vain kissat 2 ja 2010 ovat mahdollinen yhdistelmä.