Kenguru 2014 Cadet

(8. ja 9. luokka)

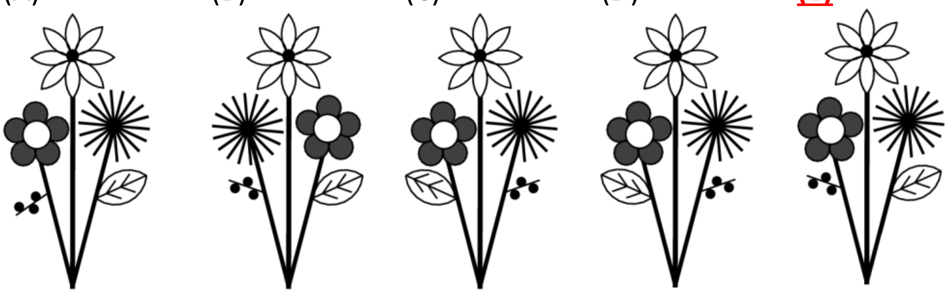
Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

3 pistettä

1.
Kauppias Koikkalainen on maalannut liikkeensä ikkunaan kukkakuvion.

Miltä kukkakuvio näyttää ikkunan toiselta puolelta katsottuna?

(A) (B) (C) (D) **(E)**



Ratkaisu:

Vasen ja oikea vaihtuvat keskenään, mutta ylhäällä olevat kuviot pysyvät ylhäällä ja alhaalla olevat pysyvät alhaalla. Lehti vaihtuu oikealle, joten C ja D ovat väärin. Ohutlehtinen kukka vaihtuu oikealle, joten B on väärin. Marjoja on kaksi oksan alapuolella, joten A on väärin. Kuvassa E kaikki on oikealla paikallaan.

2.
Kengurukilpailu pidetään joka vuonna maaliskuun kolmantena torstaina. Mikä on myöhäisin mahdollinen päivämäärä, jona Kengurukilpailu voidaan pitää?

(A) 14.3. (B) 15.3. (C) 20.3. **(D)** 21.3. (E) 22.3.

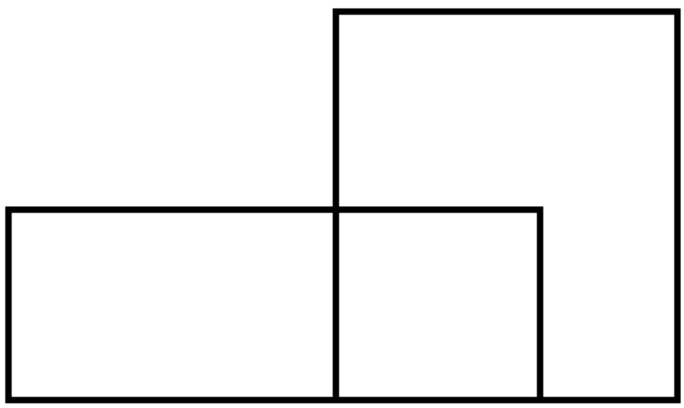
Ratkaisu:
Jos maaliskuun ensimmäinen päivä on perjantai, niin 7.3. on torstai, samoin 14.3. ja 21.3. Tällöin kilpailupäivä on 21.3. Tämä on myös viimeinen mahdollinen päivä, sillä jos 22.3. olisi torstai, niin myös 1.3. olisi torstai, jolloin 22.3. olisi maaliskuun neljäs torstai.

3.
Katja haluaa laittaa numeron 3 johonkin kohtaan lukua 2014. Mihin hänen pitäisi se laittaa, jotta syntyvä 5-numeroinen luku olisi mahdollisimman pieni?

(A) luvun 2014 eteen
(B) numeroiden 2 ja 0 väliin
(C) numeroiden 0 ja 1 väliin
(D) numeroiden 1 ja 4 väliin
(E) luvun 2014 loppuun

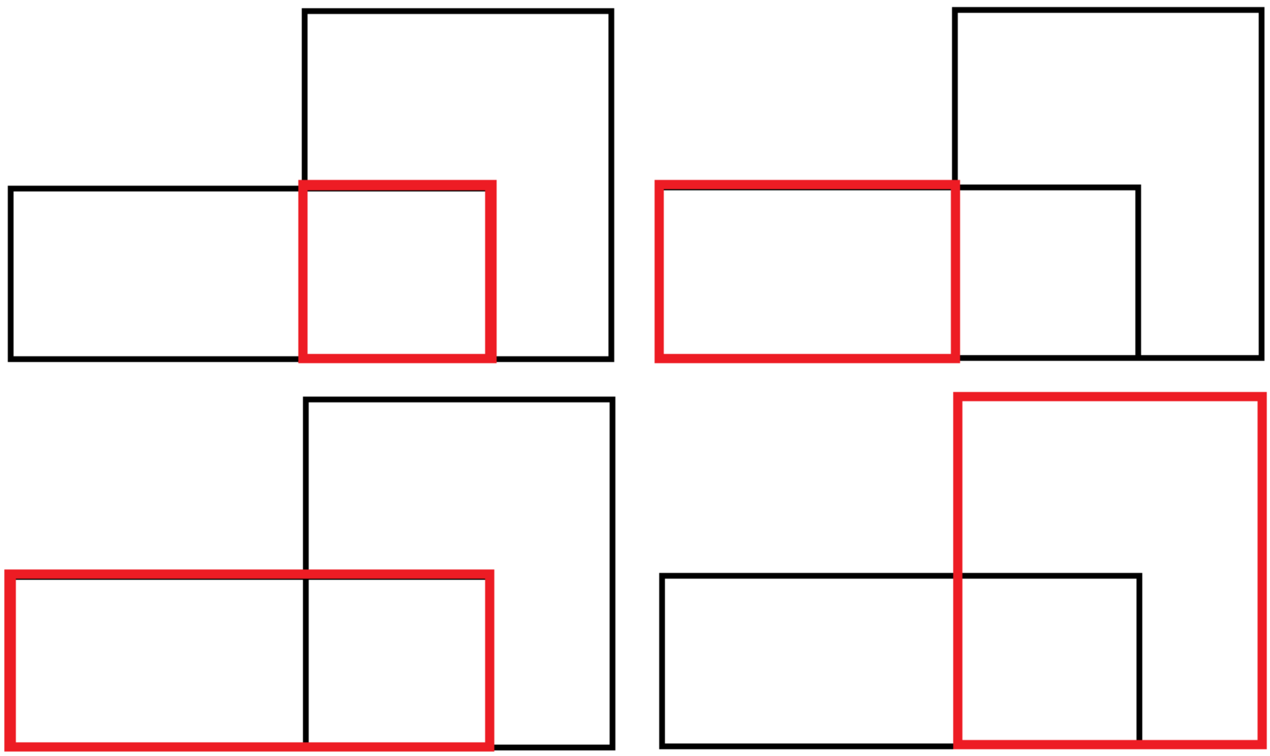
Ratkaisu:
Luvun 2014 kolme ensimmäistä numeroa ovat pienempiä kuin 3, joten lukua 3 ei pidä laittaa minkään niistä eteen. 4 on suurempi kuin 3, joten kolmosta ei pidä laittaa neljän perään. 1 on pienempi kuin 3 ja 4 suurempi kuin 3, joten kolmonen pitää laittaa niiden väliin.

4.
Kuinka monta nelikulmiota (minkä tahansa kokoisia) kuvassa on?



(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Ratkaisu:



5.
Kahden positiivisen kokonaisluvun tulo on 36 ja summa 37. Mikä on niiden erotus?

(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 26 (E) 35

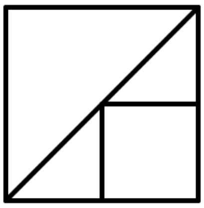
Ratkaisu:
Luku 36 voidaan kirjoittaa kahden positiivisen kokonaisluvun tulona vain seuraavilla tavoilla:

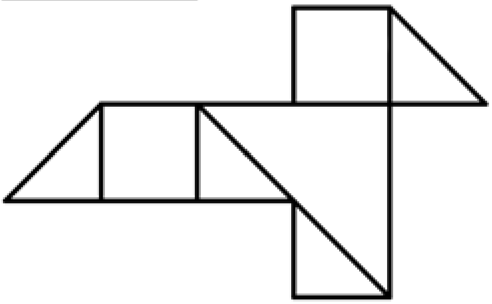
$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$$

Mahdolliset luvut ovat siten 1 ja 36, 2 ja 18, 3 ja 12, 4 ja 9, 6 ja 6. Näistä ainoat, joiden summa on 37, ovat 1 ja 36. Niiden erotus on $36 - 1 = 35$.

6.

Ifrahilla on neliönmuotoisia papereita, joista jokaisen pinta-ala on 4. Hän leikkaa niistä neliöitä ja suorakulmaisia kolmioita ensimmäisen kuvan mukaisesti. Hän ottaa osan leikkaamistaan palasista ja tekee niistä linnun toisen kuvan mukaisesti. Mikä on linnun pinta-ala?





(A) 3 (B) 4 (C) 4,5 (D) 5 (E) 6

Ratkaisu:

Paperineliön pinta-ala on 4, joten sen sivun pituus on 2, samoin leikatuista suorakulmaisista kolmioista suuremman. Siten leikatun pikkuneliön sivun pituus on 1, samoin kuin suorakulmaisista kolmioista pienemmän. Siten pikkuneliön pinta-ala on 1, suuren suorakulmaisen kolmion 2 · 2 : 2 = 2 ja pienen suorakulmaisen kolmion ½. Linnun pinta-alaksi tulee tällöin 2 + 2 · 1 + 4 · ½ = 6.

7.

Ämpäri oli puoliksi täynnä. Siivooja lisäsi ämpäriin kaksi litraa, minkä jälkeen ämpäristä 3/4 oli täynnä. Mikä on ämpärin tilavuus?

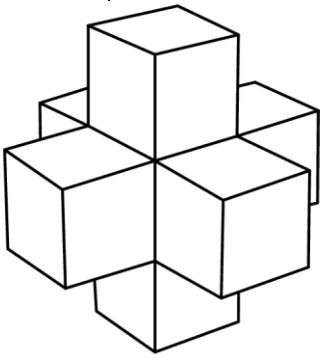
(A) 10 litraa (B) 8 litraa (C) 6 litraa (D) 4 litraa (E) 2 litraa

Ratkaisu:

$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, joten 2 l oli neljäsosa ämpärin tilavuudesta. Ämpärin tilavuus on siis $4 \cdot 2 = 8$ l.

4 pistettä

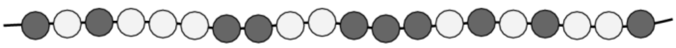
8.
Pyryllä on kuutioita, joiden särmän pituus on 1. Hän on rakentanut niistä kuvan mukaisen kappaleen. Kuinka monta kuutiota hän tarvitsee lisää, jotta hän voisi rakentaa ison kuution, jonka särmän pituus on 3?



(A) 20 (B) 18 (C) 16 (D) 14 (E) 12

Ratkaisu:
Isoon kuutioon tarvitaan $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kuutiota, joten lisää tarvitaan $27 - 7 = 20$.

9.
Kuvan kaulakorussa on harmaita ja valkoisia helmiä.



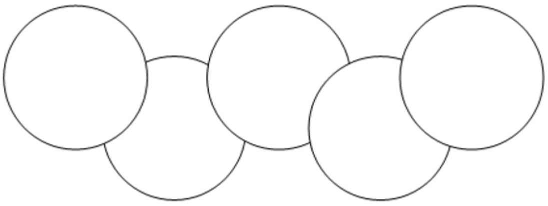
Airi ottaa korusta yhden helmen kerrallaan, aina jommastakummasta päästä. Hän lopettaa kun on ottanut viidennen harmaan helmen. Kuinka monta valkoista helmeä hän voi korkeintaan ottaa?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Ratkaisu:
Taulukoidaan mahdollisuudet:

Kuinka monta harmaata ottaa vasemmalta	Kuinka monta harmaata ottaa oikealta	Kuinka monta valkoista voi saada
5	0	6
4	1	6
3	2	7
2	3	7
1	4	5
0	5	4

10.
Kuvassa kunkin ympyrän ala on 5 cm^2. Kaksi vierekkäistä ympyrää on päällekkäin 1 cm^2 pinta-alalta. Kuinka suuren pinta-alan kaikki viisi ympyrää yhdessä peittävät?



(A) 15 cm^2 (B) 16 cm^2 (C) 18 cm^2 (D) 21 cm^2 (E) 24 cm^2

Ratkaisu:
Ala on neliösenttimetreinä $5 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 21$.

11.
Jimillä on pianotunti kahdesti viikossa aina samoina viikonpäivinä ja Tuomaksella joka toinen viikko aina samana viikonpäivänä. Tietyn ajanjakson aikana Jimillä on 15 pianotuntia enemmän kuin Tuomaksella. Kuinka monta viikkoa pitkä tuo ajanjakso on?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

Ratkaisu:
Yhdeksän viikkoa ei riitä, sillä ero olisi tuolloin korkeintaan $9 \cdot 2 - 4 = 14$ tuntia (jos Tuomaksen pianotuntia ei satu ensimmäiselle eikä viimeiselle viikolle). 11 viikkoa on liikaa, sillä ero on vähintään $11 \cdot 2 - 6 = 16$ tuntia (jos Tuomaksella on pianotunti ensimmäisellä ja viimeisellä viikolla). Jakson pituus on siis 10 viikkoa.

12.
Tänä vuonna isoäiti, hänen tyttärensä ja tyttärentyttärensä huomasivat, että heidän ikiensä summa on 100 vuotta. Jokaisen ikä on luvun 2 potenssi. Kuinka vanha tyttärentytär on?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

Ratkaisu:
Luvun 2 potenssit (eksponenttina ei-negatiivinen kokonaisluku, jotta potenssin arvo olisi kokonaisluku), jotka ovat alle 100, ovat

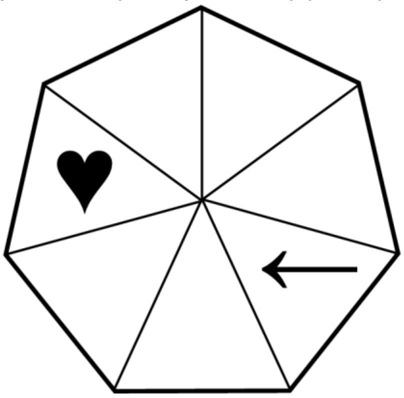
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$

$2^6 = 64$
$2^7 = 128$ on jo liian suuri.

Jos isoäidin ikä olisi 32 vuotta, olisi ikien summa korkeintaan $32 + 16 + 8 = 56$ eli selvästi alle 100. Jos isoäiti olisi nuorempi (tämä on vain matemaattinen mahdollisuus), olisi ikien summa vieläkin pienempi. Siten isoäidin iän täytyy olla 64. Siten tyttären ja tyttärentyttären ikien summa on $100 - 64 = 36$. Jos tytär olisi 16-vuotias tai nuorempi, olisi tuo summa korkeintaan $16 + 8 = 24$ eli alle 36. Siten tytär on 32-vuotias. Tyttärentyttären ikä on $36 - 32 = 4$ vuotta.

Lyhyempi tapa:
$100 = 64 + 32 + 4 = 1100100_2$, ja koska luvun binääriesitys on yksikäsitteinen, ovat iät 64, 32 ja 4 vuotta.

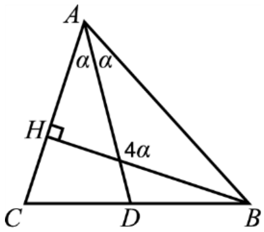
13.
Sydän ja nuoli ovat kuvan mukaisissa paikoissa. Samanaikaisesti sydän ja nuoli alkavat liikkua. Nuoli siirtyy kolme paikkaa myötäpäivään ja sydän neljä paikkaa vastapäivään, minkä jälkeen molemmat pysähtyvät. Sitten sama liike toistuu uudestaan ja uudestaan. Kuinka monen liikkeen jälkeen sydän ja nuoli pysähtyvät samaan paikkaan ensimmäistä kertaa?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 **(E)** Ei koskaan

Ratkaisu:
Alkutilanteessa sydän on kolme paikkaa myötäpäivään nuolesta. Yhden liikkeen jälkeen sydän on edelleen kolme paikkaa myötäpäivään nuolesta. Koska sydämen ja nuolen keskinäinen asema on yhden liikkeen jälkeen sama kuin alun perin ja liike on aina samanlainen, on niiden keskinäinen asema aina sama. Siten sydän ja nuoli eivät koskaan pysähdy samaan paikkaan.

14.
Kuvassa on kolmio ABC, jossa BH on korkeusjana ja AD kulman A puolittaja. Janojen BH ja AD välinen tylppä kulma on neljä kertaa niin suuri kuin kulma DAB (ks. kuva). Kuinka suuri on kulma CAB?



(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75° (E) 90°

Ratkaisu:
Kuvaan muodostuneen suorakulmaisen kolmion kolmas kulma on $180° - 4\alpha$. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, saadaan yhtälö $180° - 4\alpha + 90° + \alpha = 180°$, jonka ratkaisu on $\alpha = 30°$. Kysytty kulma on $2\alpha = 60°$.

5 pistettä

15.
Kuusi poikaa käyttää yhdessä kahta kylpyhuonetta joka aamu kello 7.00 alkaen. Kummassakaan kylpyhuoneessa ei koskaan ole kerrallaan enempää kuin yksi henkilö. Pojat käyttävät aamutoimiinsa kylpyhuoneessa 8, 10, 12, 17, 21 ja 22 minuuttia keskeytyksettä. Milloin kaikkien poikien aamutoimet aikaisintaan ovat valmiit?

(A) 7:45 (B) 7:46 (C) 7:47 (D) 7:48 (E) 7:50

Ratkaisu:
Poikien aamutoimet kestävät yhteensä 90 minuuttia. Koska kylpyhuoneita on kaksi, kestää niiden käyttö vähintään $90 : 2 = 45$ minuuttia. Jos haluttaisiin saada aamutoimet valmiiksi 45 minuutissa, olisi 17 minuutin ja 21 minuutin poikien oltava eri kylpyhuoneissa, koska ne ovat ainoat parittomat aamutoimien kestot, ja summien olisi oltava parittomia. 21 minuutin perään olisi siten samassa kylpyhuoneessa peseydyttävä niiden poikien, joiden aamutoimien kesto on yhteensä $45 - 21 = 24$ minuuttia. Luvuista 8, 10, 12 ja 22 ei kuitenkaan voi muodostaa lukujoukkoa, jonka lukujen summa olisi 24, joten ei ole mahdollista päästä 45 minuuttiin.

46 minuuttiin päästään yhdistelmillä $22 + 10 + 12 = 44$ ja $21 + 17 + 8 = 46$. Kello on siis vähintään 7:46, kun kaikkien aamutoimet ovat valmiit.

16.

Kapteeni Sparrow ja hänen merirosvomiehistönsä ovat kaivaneet maasta kultakolikoita. He jakavat kolikot keskenään tasan niin, että jokainen saa yhtä monta kolikkoa. Jos merirosvoja olisi 4 vähemmän, niin jokainen merirosvo saisi 10 kolikkoa enemmän. Jos kolikoita olisi 50 vähemmän, niin jokainen merirosvo saisi 5 kolikkoa vähemmän. Kuinka monta kolikkoa he ovat kaivaneet maasta?

(A) 80 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 250

Ratkaisu:

Jos kolikoita olisi 50 vähemmän, niin jokainen saisi 5 kolikkoa vähemmän. $50 : 5 = 10$, joten merirosvoja on 10 (kapteeni mukaan lukien). Jos merirosvoja olisi 4 vähemmän eli 6, niin jokainen saisi 10 kolikkoa enemmän, eli yhteensä $6 \cdot 10 = 60$ kolikkoa enemmän. Nämä 60 kolikkoa saataisiin neljältä merirosvolta, joten kullakin noista neljästä merirosvosta on $60 : 4 = 15$ kolikkoa. Siis kullakin merirosvolla on 15 kolikkoa. Koska merirosvoja on 10, niin kolikoita on yhteensä kaivettu $10 \cdot 15 = 150$.

Tehtävä voidaan ratkaista myös yhtälöparin avulla. Jos merirosvoja (kapteeni mukaan lukien) on m kpl ja kolikoita k kpl, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \dfrac{k}{m-4} = \dfrac{k}{m} + 10 \\ \dfrac{k-50}{m} = \dfrac{k}{m} - 5 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $k = 150, m = 10$.

17.

Sampo kirjoittaa kaikki numerot 1:stä 9:ään 3 x 3 -ruudukkoon, täsmälleen yhden numeron jokaiseen ruutuun. Hän on jo kirjoittanut numerot 1, 2, 3 ja 4 kuvan mukaisesti. Kaksi numeroa ovat ”naapureita” jos ruuduilla, joissa numerot ovat, on yhteinen sivu. Kirjoitettuaan loput numerot Sampo huomaa, että numeron 9 naapureiden summa on 15. Mikä on numeron 8 naapureiden summa?

1		3
2		4

(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 26 (E) 27

Ratkaisu:
Kirjoittamatta ovat kokonaisluvut 5-9. Niiden summa on 35. Jos 9 tulisi ruudukon keskelle, olisivat loput näistä luvuista sen naapureita, jolloin naapureiden summa olisi $35 - 9 = 26$, mikä ei käy. Siten luku 9 tulee johonkin sellaiseen ruutuun, jolla on kolme naapuria, joista kaksi on jo kirjoitettu valmiiksi ruudukkoon. Sen naapureiden summa on 15. Koska suurin mahdollinen naapuri on 8, on kahden valmiiksi ruudukkoon kirjoitetun numeron 9 naapurin summan oltava vähintään $15 - 8 = 7$. Siten ainoa mahdollinen paikka luvulle 9 on lukujen 3 ja 4 välissä, ja luvun 8 on tultava ruudukon keskelle. Nyt luvun 8 naapurit ovat 5, 6, 7 ja 9, joiden summa on 27.

18.
Vanha vaaka näyttää painon grammoina, mutta ei toimi aivan oikein. Jos jokin painaa alle 1000 g, vaaka näyttää oikean luvun. Kuitenkin, jos jokin painaa vähintään 1000 g, vaaka voi näyttää minkä tahansa lukua 1000 suuremman luvun. Punnitaan painot A, B, C, D ja E kaksi kerrallaan, jolloin vaaka näyttää seuraavaa:

$B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$.

Mikä painoista on raskain?

(A) *A* (B) *B* (C) *C* (D) *D* (E) *E*

Ratkaisu:
$A + E = 700 < 800 = B + E$, joten $A < B$.

$B + E = 800 < 900 = B + C$, joten $E < C$.

$B + C = 900 < 1000 \leq B + D$, joten $C < D$.

$A + E = 700 < 1000 \leq C + E$, joten $A < C$.

$B + E = 800 < 1000 \leq C + E$, joten $B < C$.

Edellisten perusteella $A < B < C < D$ ja $E < C < D$. Siten D on raskain.

19.
Samuel ja Elias kilpailevat ongelmanratkaisussa. Molemmille annetaan sama sadan ongelman lista. Kustakin ratkaisusta ongelmasta ensimmäinen ratkaisija saa 4 pistettä ja toinen ratkaisija yhden pisteen. Samuel ratkaisi 60 ongelmaa, samoin Elias ratkaisi 60 ongelmaa. Yhteensä he saivat 312 pistettä. Kuinka moni ongelmista oli sellaisia, että molemmat ratkaisivat ne?

(A) 53 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

Ratkaisu:
Jos kukin pojista ratkaisee yhden ongelman, jota toinen poika ei ratkaise, he saavat näistä kahdesta ongelmasta yhteensä 8 pistettä. Jos taas molemmat pojat ratkaisevat saman ongelman, he saavat kahdesta ratkaistusta ongelmasta (sama ongelma ratkaistu kahdesti) yhteensä vain 5 pistettä. Siten, vaikka ratkaistujen ongelmien kokonaismäärä on vakio 120, riippuvat yhteispisteet siitä, kuinka monta ongelmista oli molempien ratkaisemia; mitä vähemmän molempien ratkaisemia ongelmia, sitä enemmän pisteitä yhteensä.

Jos he olisivat ratkaisseet täsmälleen samat ongelmat, niin he olisivat saaneet yhteensä $60 \cdot 5 = 300$ pistettä. Pisteitä on kuitenkin 12 enemmän. Kun yksi molempien ratkaisema ongelma (siis kaksi ongelmaa yhteensä) vaihdetaan kahteen erilliseen ongelmaan, tulee pisteitä lisää $8 - 5 = 3$. Koska $12 : 3 = 4$, on 4 molempien ratkaisemaa ongelmaa vaihdettava kahdeksaan erilliseen ongelmaan. Molempien ratkaisemia ongelmia jää siis $60 - 4 = 56$.

Tehtävä voidaan ratkaista myös yhtälön avulla. Jos molempien poikien ratkaisemia ongelmia on x kpl, on ongelmia, jotka vain toinen on ratkaissut, $2 \cdot 60 - 2x = 120 - 2x$ kpl. Saadaan yhtälö $5x + 4(120 - 2x) = 312$ tai yhtä hyvin $60 \cdot 8 - 3x = 312$, joiden ratkaisu on $x = 56$.

20.
Linnassa asuu vain ritareita, kelmejä ja klovneja. Jokainen ritari puhuu aina totta, jokainen kelmi valehtelee aina ja jokainen klovni puhuu joka toinen kerta totta ja valehtelee joka toinen kerta.
Kun kaikilta linnan asukkailta kysyttiin: ”Oletko ritari?”, 17 vastasi ”Kyllä.”
Sen jälkeen kaikilta linnan asukkailta kysyttiin: ”Oletko klovni?”, ja 12 vastasi ”Kyllä.”
Sen jälkeen kaikilta linnan asukkailta kysyttiin: ”Oletko kelmi?”, ja 8 vastasi ”Kyllä.”
Kuinka monta ritaria linnassa asuu?

(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

Ratkaisu:
Ensimmäiseen kysymykseen vastaavat myöntävästi kaikki ritarit (he puhuvat totta) ja kaikki kelmit (he valehtelevat) sekä osa klovneista, siis ne klovnit, jotka valehtelevat ensimmäisellä kerralla. Näissä kolmessa ryhmässä on yhteensä 17 henkilöä.

Toiseen kysymykseen vastaavat myöntävästi kaikki kelmit (he valehtelevat) ja ne klovnit, jotka puhuvat toisella kerralla totta, eli ne klovnit jotka valehtelivat ensimmäisellä kerralla. Näissä kahdessa ryhmässä on yhteensä 12 henkilöä.

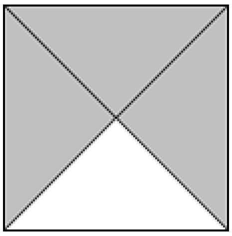
Siis ensimmäiseen ja toiseen kysymykseen myöntävästi vastaavat henkilöt ovat muuten samat, mutta ritarit eivät vastaa myöntävästi toiseen kysymykseen. Myöntävästi toiseen kysymykseen vastaavien henkilöiden määrä oli $17 - 12 = 5$ pienempi kuin ensimmäiseen kysymykseen myöntävästi vastanneiden henkilöiden määrä, joten ritareita on 5.

Tehtävä voidaan ratkaista myös yhtälöryhmän avulla. Jos ritareita on r kpl, kelmejä k kpl ja ensimmäiseen kysymykseen vastatessa valehtelevia klovneja v kpl, niin toiseen kysymykseen vastatessa totta puhuvia klovneja on myös v kpl. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} r + k + v = 17 \\ k + v = 12 \\ v = 8 \end{cases}$$

Vähentämällä toinen yhtälö ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $r = 5$.

21.
5 x 5 -neliö tehdään 1 x 1 -laatoista, jotka kaikki on väritetty kuvan mukaisesti. Vierekkäisten laattojen yhteisen sivun täytyy olla molemmissa laatoissa samanvärinen. Kuinka suuri osuus 5 x 5 -neliön ulkoreunasta vähintään on mustaa?

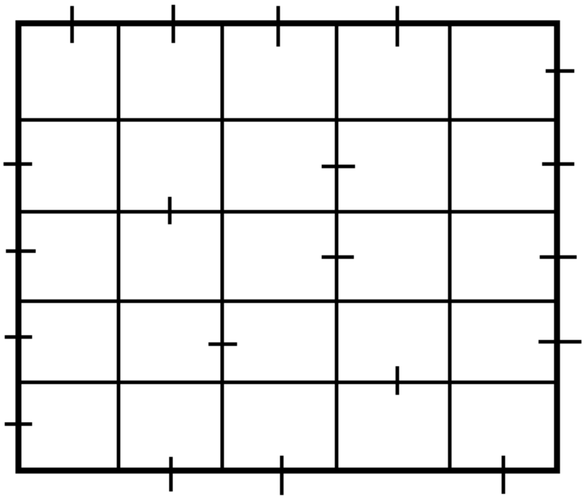


(A) 1/5 (B) 1/4 (C) 3/10 (D) 7/20 (E) 2/5

Ratkaisu:
Jokaisessa 1 x 1 -laatassa on vain yksi valkoinen sivu, joten 5 x 5 -neliön jokaisessa nurkassa on laatta, jossa vähintään toinen neliön ulkoreunassa olevista sivuista on musta. Siten mustaa on varmasti vähintään 4/20 eli 1/5.

Jos mustan osuus olisi tasan 1/5, niin kaikissa 5 x 5 -neliön ulkoreunassa olevissa laatoissa valkoinen sivu olisi ulkoreunassa. Tällöin keskelle jäävän 3 x 3 -neliön ulkoreuna olisi musta. Siis 3 x 3 -neliössä olisi yhdeksän laatta, joiden valkoisten sivujen pitäisi olla 3 x 3 -neliöön sisäänpäin. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska jokainen valkoinen sivu tarvitsee itselleen parin, ja valkoisia sivuja on yhteensä 9, joka on pariton määrä. Siten 1/5 eli 4/20 on liian pieni mustan osuus.

Mustan osuus 5/20 onnistuu ainakin seuraavalla tavalla (valkoiset sivut on merkitty poikkiviivalla):



Edellisen perusteella 5/20 = 1/4 on pienin mahdollinen mustan osuus.