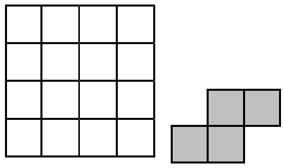
Kenguru 2013 Cadet
(8. ja 9. luokka)

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

Ratkaisut

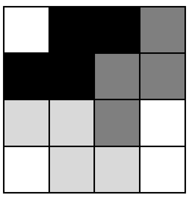
3 pistettä

1.
Annalla on neliöistä koostuva ruutupaperiarkki. Hän leikkaa paperista ruutujen viivoja pitkin mahdollisimman monta oikeanpuoleisessa kuvassa näkyvää kuviota. Kuinka monta ruutua jää jäljelle?



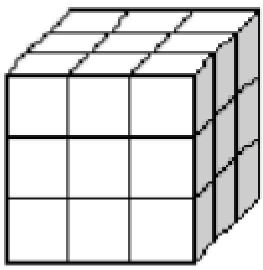
(A) 0 (B) 2 **(C)** 4 (D) 6 (E) 8

Ratkaisu:

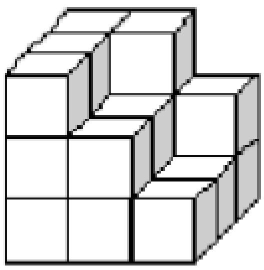


Ruutuja jää neljä kappaletta. Vähempää ruutuja ei voi jäädä, sillä yhden kuvion leikkaaminen poistaa käytöstä aina neljä ruutua. Seuraavassa vaiheessa paperiarkkiin ei jäisi siis yhtään ruutua jäljelle. Neljättä kuviota ei voida kuitenkaan leikata, koska leikattavan kuvion muodosta johtuen jäljelle jäävät 4 ruutua ovat paperiarkin nurkissa.

2.
Nelli haluaa rakentaa samanlaisen kuution kuin Tiina (kuva 1). Nellin kuutio jäi kuitenkin vajaaksi, koska rakennuspalikat loppuivat kesken (kuva 2). Kuinka monta palikkaa Nelli vielä tarvitsee saadakseen kuutionsa valmiiksi?



Kuva 1



Kuva 2

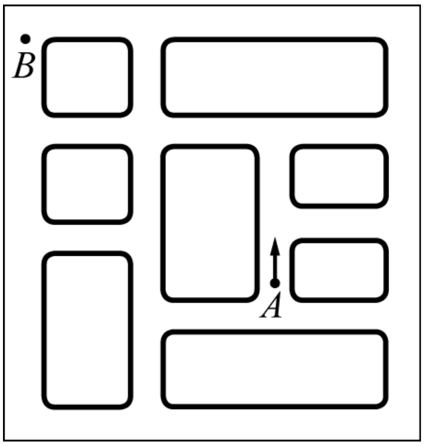
(A) 5 (B) 6 **(C)** 7 (D) 8 (E) 9

Ratkaisu: Ylimmältä tasolta puuttuu 5 palikkaa ja keskimmäiseltä 2 palikkaa, yhteensä 7 palikkaa.

Ratkaisut

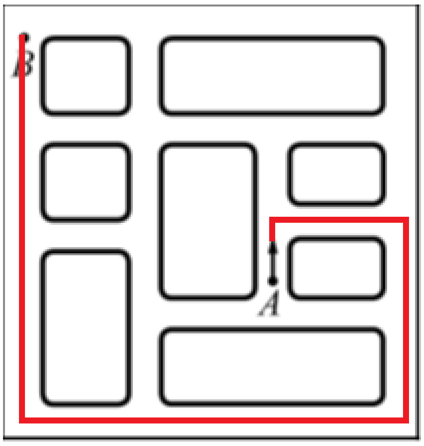
3.

Nils opettelee ajamaan mopolla. Hän **osaa** kääntyä jo oikealle, mutta hän **ei osaa** kääntyä vasemmalle. Kuinka monta käännöstä hän vähintään tarvitsee päästäkseen paikasta A paikkaan B?



(A) 3 **(B)** 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Ratkaisu: Nilsin suunta on aluksi ylöspäin, ja hän on vielä pisteen *B* alapuolella, kun hän joutuu kääntymään oikealle. Koska hän voi kääntyä vain 90° kerrallaan ja aina oikealle, on oikealle käännyttävä yhteensä vähintään 4 kertaa, jotta hän kääntyisi yhteensä 360° ja kulkisi taas ylöspäin ja voisi päästä pisteen *B* korkeudelle. Neljä käännöstä myös riittää, esimerkiksi seuraavalla tavalla.



4.

Laukku sisältää viiden värisiä palloja. Kaksi niistä on punaisia, kolme sinisiä, kymmenen valkoisia, neljä vihreitä ja kolme mustia. Palloja nostetaan laukusta niin, että niitä ei katsota eikä palauteta laukkuun takaisin. Kuinka monta palloa laukusta on vähintään otettava, jotta niiden joukossa on varmasti ainakin kaksi samanväristä palloa?

(A) 2 (B) 12 (C) 10 (D) 5 **(E)** 6

Ratkaisu:

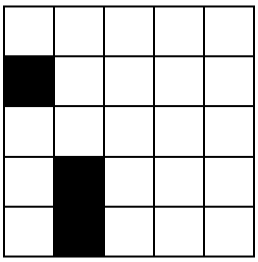
Nostetaan ensin viisi palloa. Huonoimmalla tuurilla kaikki pallot ovat erivärisiä. Sitten nostetaan vielä yksi pallo. Riippumatta siitä, minkä värinen pallo on, voidaan olla nyt varmoja, että on saatu kaksi samanväristä palloa. Pitää nostaa siis kuusi palloa.

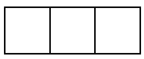
5.
Aleksi sytyttää kynttilän kymmenen minuutin välein. Jokainen kynttilä palaa 40 minuuttia ja sammuu. Kuinka monta kynttilää palaa 55 minuutin kuluttua siitä, kun Aleksi sytytti ensimmäisen kynttilän?

(A) 2 (B) 3 **<u>(C)</u>** 4 (D) 5 (E) 6

Ratkaisu:
Kun aikaa on kulunut 55 minuuttia, kynttilöitä on sytytytetty yhteensä kuusi kappaletta. 40 minuutin kohdalla ensimmäinen kynttilä sammuu. 50 minuutin kohdalla sammuu toinen kynttilä. Siis kun aikaa on kulunut 55 min, palaa yhteensä neljä kynttilää.

6.
Kaarina ja hänen ystävänsä pelaavat laivanupotuspeliä 5×5-ruudukolla. Kaarina on jo sijoittanut kaksi laivoistaan kuvan osoittamalla tavalla. Hänen täytyy sijoittaa ruudukkoon vielä 3×1-laiva. Laiva on laitettava ruudukkoon siten, että se peittää vain kokonaisia ruutuja. Kahdella laivalla ei saa olla yhtään yhteistä pistettä eli ne eivät saa koskettaa toisiaan edes nurkasta. Kuinka monta paikkaa ruudukossa on hänen 3×1-laivalleen?

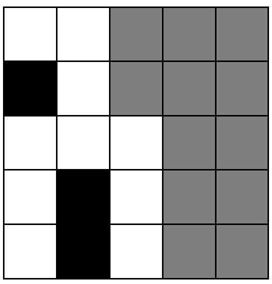




3×1-laiva

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 **<u>(E)</u>** 8

Ratkaisu:



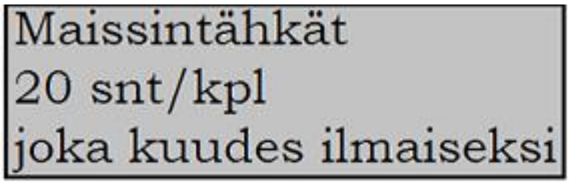
Laivat voivat olla vain harmaalla alueella. Tällä alueella on yhteensä kahdeksan erilaista paikkaa laivoille, kaksi paikkaa vaakatasossa ja kuusi paikkaa pystysuunnassa.

Kenguru 2013 Cadet
(8. ja 9. luokka)

Ratkaisut

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

7.
Rouva Loikkanen osti kullekin nelihenkisen perheensä jäsenelle neljä maissintähkää. Kaupassa hän sai kyltin mukaisen alennuksen. Kuinka paljon maissit maksoivat?

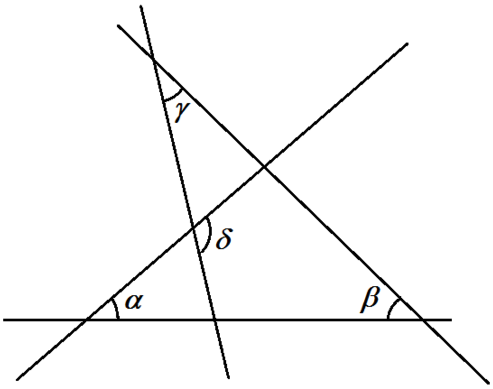


(A) 0,80 € (B) 1,20 € **(<u>C</u>)** 2,80 € (D) 3,20 € (E) 3,40 €

Ratkaisu:
Rouva Loikkanen osti yhteensä 16 tähkää. Ensimmäiset viisi tähkää maksoivat $0{,}20€ \cdot 5 = 1€$. Kuudes tähkä oli ilmainen. Jälleen seuraavat viisi tähkää maksoivat $0{,}20€ \cdot 5 = 1€$. Kahdestoista tähkä oli ilmainen. Loput neljä tähkää maksoivat $0{,}20€ \cdot 4 = 0{,}80€$. Siis maissintähkät maksoivat yhteensä $1€ + 1€ + 0{,}80€ = 2{,}80€$.

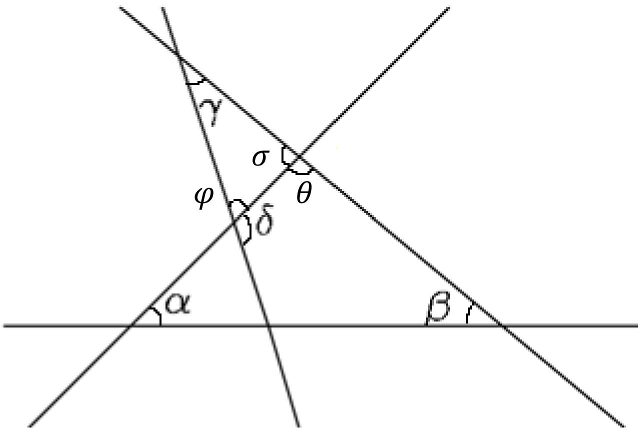
4 pistettä

8.
Kuviossa α = 55°, β = 40° ja γ = 35°.
Kuinka suuri on kulma δ?



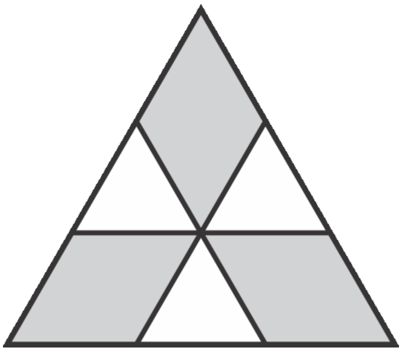
(A) 100° (B) 105° (C) 120° (D) 125° **(<u>E</u>)** 130°

Ratkaisu:



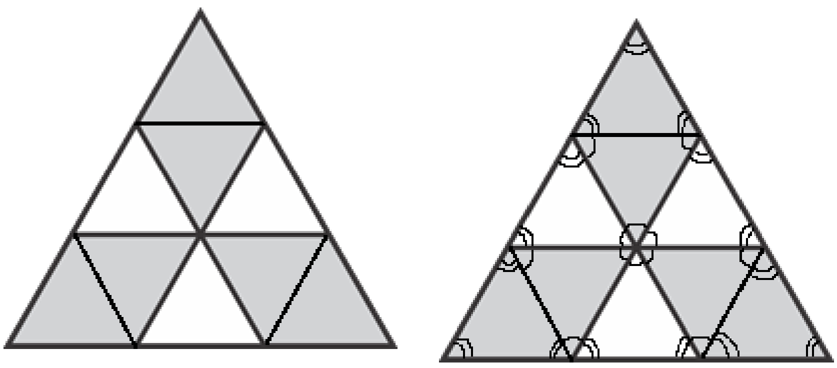
Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan kulma θ= 180°- α - β= 180°- 55°- 40°= 85°.
Koska kulmat θ ja σ ovat toistensa vieruskulmia, saadaan kulma σ = 180° - θ = 180°- 85°= 95°.
Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan kulma φ = 180° - σ - γ= 180°- 95°- 35°= 50°.
Koska kulmat φ ja δ ovat toistensa vieruskulmia, saadaan kulma δ= 180°- φ = 180°- 50°= 130°.

9.
Kuvan suuri kolmio on tasasivuinen ja sen pinta-ala on 9. Kolmion sisällä olevat janat ovat yhdensuuntaisia sivujen kanssa ja jakavat sivut kolmeen yhtä suureen osaan. Mikä on varjostettujen alueiden pinta-ala?



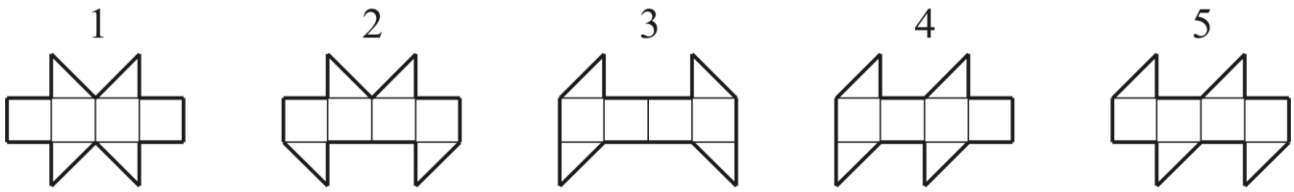
(A) 1 (B) 4 (C) 5 **(D)** 6 (E) 7

Ratkaisu:



Kolmio on tasasivuinen, joten kulmat ovat suuruudeltaan 60°. Kolmioon merkityt - kulmat ovat myös suuruudeltaan $60°$, sillä ne ovat kaikki samankohtaisia kulmia. Samoin kaikki - kulmat ovat $60°$, koska $180° - 2 \cdot 60° = 60°$. Koska jokaisessa kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa ja yksi samanmittainen sivu, kaikki kolmiot ovat yhteneviä.
Kolmion sisällä on siis yhteensä 9 pientä yhtenevää kolmiota. Yhden kolmion pinta-ala on $9 : 9 = 1$.
Varjostettuja kolmioita on yhteensä 6 kappaletta, joten $6 \cdot 1 = 6$.

10.
Yhdestä seuraavista kuvioista ei voida taitella kuutiota. Mikä tämä kuvio on?



(A) kuvio 1 (B) kuvio 2 **(C)** kuvio 3 (D) kuvio 4 (E) kuvio 5

Ratkaisu:

Voidaan ajatella, että kuvioissa keskellä olevat neliöt muodostavat kuution vaipan. Neljä suorakulmaisen kolmion muotoista osaa muodostavat taas kuution pohjaosat. Kuviossa 3 toisen pohjan kolmiot taittuvat päällekkäin, jolloin niistä ei muodostu neliötä ja kuviosta ei voida siis taitella kuutiota.

11.
Ruu haluaa kertoa Kengulle luvun, jonka numeroiden tulo on 24. Mikä on pienimmän tällaisen luvun numeroiden summa?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 **(E)** 11

Ratkaisu:

$24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, joten luvun numeroissa pitää olla luku 3 tekijänä kerran ja luku 2 kolmesti. Siten luvussa täytyy olla yhtenä numerona kolmonen tai kuutonen. Luku on mahdollisimman pieni, jos numeroita on kaksi. Mahdolliset kaksinumeroiset luvut ovat 38, 83, 46 ja 64, muita ei ole. Pienin luku on siis 38 ja tämän luvun numeroiden summa on 3 + 8 = 11.

12.
Antti, Petra, Kati, Daniel ja Eerik ovat syntyneet 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 ja 23/04/2001 (päivä/kuukausi/vuosi), mutta eivät välttämättä tässä järjestyksessä. Antti ja Eerik ovat syntyneet samassa kuussa. Myös Petra ja Kati ovat syntyneet samassa kuussa. Antti ja Kati ovat syntyneet samana päivänä, mutta eri kuussa. Myös Daniel ja Eerik ovat syntyneet samana päivänä, mutta eri kuussa. Kuka näistä lapsista on nuorin?

(A) Antti **(B)** Petra (C) Kati (D) Daniel (E) Eerik

Ratkaisu:

Antti ja Eerik ovat syntyneet joko maaliskuussa tai huhtikuussa, samoin Kati ja Petra. Siten ainoa, joka voi olla syntynyt helmikuussa, on Daniel. Siis Daniel syntyi helmikuussa 20/02/2001, joten Eerik syntyi maaliskuussa 20/03/2001. Tällöin myös Antin täytyy olla syntynyt maaliskuussa 12/03/2001. Koska Antti ja Kati ovat syntyneet samana päivänä eri kuussa, täytyy Katin olla syntynyt 12/04/2000. Tällöin siis Petra on syntynyt myös huhtikuussa 23/04/2001 ja on samalla porukan nuorin.

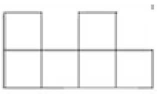
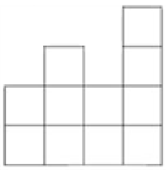
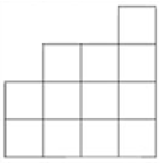
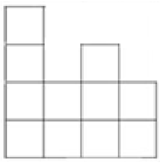
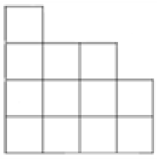
13.

TAKAA

4	**2**	**3**	**2**
3	**3**	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**1**
1	**2**	**1**	**2**

EDESTÄ

Johannes on rakentanut kuutioista rakennelman 4×4-ruudukolle. Jokaisen kuution tahko on yhden ruudun kokoinen. Kaavio esittää, kuinka monta kuutiota kussakin ruudussa on päällekkäin. Mitä Johannes näkee, kun hän katsoo takaa?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

Ratkaisu:

Kuviossa näkyy kunkin sarakkeen korkein torni, joten kuvion täytyy olla C. Takaa katsottuna oikeassa reunassa korkein torni on 4 palikkaa korkea. Sen vieressä korkeimmassa tornissa on 3 palikkaa, samoin seuraavassa sarakkeessa. Vasemmalla korkein torni on 2 palikkaa korkea.

14.

Markku ja Liisa seisovat ympyränmuotoisen suihkulähteen vastakkaisilla puolilla. He alkavat juosta myötäpäivään suihkulähteen ympäri. Markun nopeus on 9/8 Liisan nopeudesta. Kuinka monta täyttä kierrosta Liisa on juossut, kun Markku saa hänet kiinni ensimmäistä kertaa?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 2 (E) 72

Ratkaisu:

Markku on puoli kierrosta Liisaa jäljessä. Koska hänen nopeutensa on $\frac{1}{8}$ suurempi kuin Liisan nopeus, hän saa jokaisella Liisan juoksemalla kierroksella $\frac{1}{8}$ kierroksen kiinni. $\frac{1}{8}$ kierroksia on juostava 4, jotta tulee puolikas kierros, koska $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

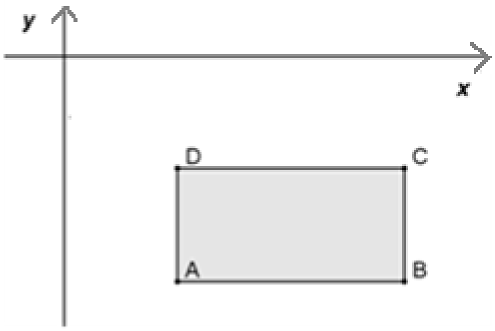
Kenguru 2013 Cadet
(8. ja 9. luokka)

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

Ratkaisut

5 pistettä

15.
Suorakulmion *ABCD* särmät ovat yhdensuuntaisia koordinaattiakseleiden kanssa. Suorakulmio *ABCD* sijaitsee x-akselin alapuolella ja y-akselin oikealla puolella alla olevan kuvan mukaisesti. Jokaiselle neljälle pisteelle lasketaan lausekkeen y-koordinaatti ÷ x-koordinaatti arvo. Mille pisteelle saadaan pienin arvo?

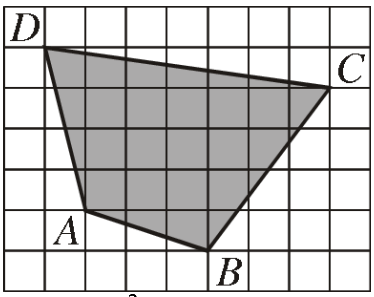


(A) A (B) B (C) C (D) D

(E) Se riippuu suorakulmiosta.

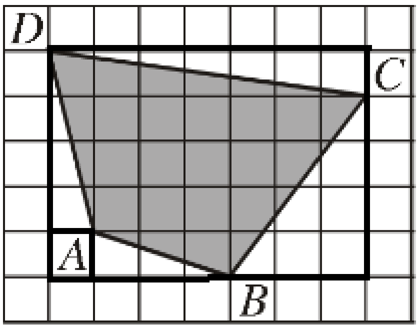
Ratkaisu:
Kuvassa x-koordinaattien arvot ovat koko ajan positiivisia. Mentäessä x-akselia pitkin oikealle lukuarvot kasvavat. Vastaavasti y-koordinaattien arvot ovat negatiivisia. Mentäessä y-akselia alaspäin lukuarvot pienenevät. Tehtävässä kysytty pienin arvo saadaan, kun mahdollisimman negatiivinen y-koordinaatin arvo jaetaan mahdollisimman pienellä positiivisella x-koordinaatin arvolla. Kuvasta katsottuna pisteelle *A* saadaan siis pienin arvo.

16.
Kuvassa on piirrettynä ruudukkoon nelikulmio *ABCD*. Ruudukossa jokaisen ruudun sivun pituus on 2 cm. Mikä on nelikulmion *ABCD* pinta-ala?



(A) 96 cm^2 **(B)** 84 cm^2 (C) 76 cm^2 (D) 88 cm^2 (E) 104 cm^2

Ratkaisu:



Täydennetään kuvio suorakulmioksi, jonka pinta-ala on 14 cm · 10 cm = 140 cm^2. Suorakulmion varjostamattomalle alueelle syntyy neljä suorakulmaista kolmiota ja yksi neliö. Näiden pinta-alat ovat $14\,cm \cdot 2\,cm : 2 = 14\,cm^2$, $8\,cm \cdot 6\,cm : 2 = 24\,cm^2$, $6\,cm \cdot 2\,cm : 2 = 6\,cm^2$, $8\,cm \cdot 2\,cm : 2 = 8\,cm^2$ sekä $2\,cm \cdot 2\,cm = 4\,cm^2$. Yhteenlaskettu pinta-ala on $14\,cm^2 + 24\,cm^2 + 6\,cm^2 + 8\,cm^2 + 4\,cm^2 = 56\,cm^2$. Vähennetään tämä suorakulmion pinta-alasta, jolloin saadaan selville nelikulmion *ABCD* pinta-ala: $140\,cm^2 - 56\,cm^2 = 84\,cm^2$.

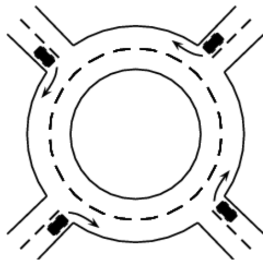
17.
Riia leipoo peräkkäin kuusi vadelmapiirakkaa numeroiden ne järjestyksessä 1:stä 6:een, siten että ensimmäiseksi leivottu kakku saa numeron 1. Hänen lapsensa juoksevat toisinaan keittiöön ja syövät kuumimman piirakan. Mikä seuraavista ei voi olla se järjestys, missä piirakat on syöty?

(A) 123456 (B) 125436 (C) 325461 **(D)** 456231 (E) 654321

Ratkaisu:

Järjestys 456231 ei voi olla mahdollinen. Kuvitellaan, että Riia on ehtinyt leipoa neljä piirakkaa, kun joku lapsista tulee ensimmäistä kertaa syömään kuumimman neljännen piirakan. Samoin käy viidennelle ja kuudennelle piirakalle. Kun neljäs, viides ja kuudes piirakka on syöty, lapset eivät voi syödä toisena leivottua piirakkaa, koska tehtävän mukaan pitää syödä aina kuumin piirakka. Tässä tapauksessa pitäisi siis syödä kuudennen piirakan jälkeen kolmantena leivottu piirakka.

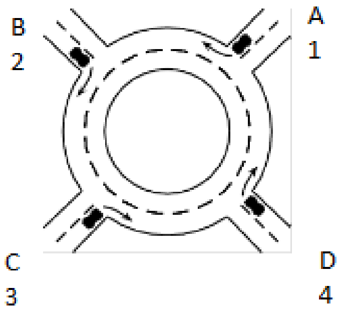
18.
Kuvan liikenneympyrään saapuu neljä autoa samaan aikaan, kukin omasta suunnastaan. Jokainen auto poistuu liikenneympyrästä eri suuntaan kuin mistä tuli, eikä kahta autoa poistu samaan suuntaan. Kuinka monella eri tavalla autot voivat poistua liittymästä?

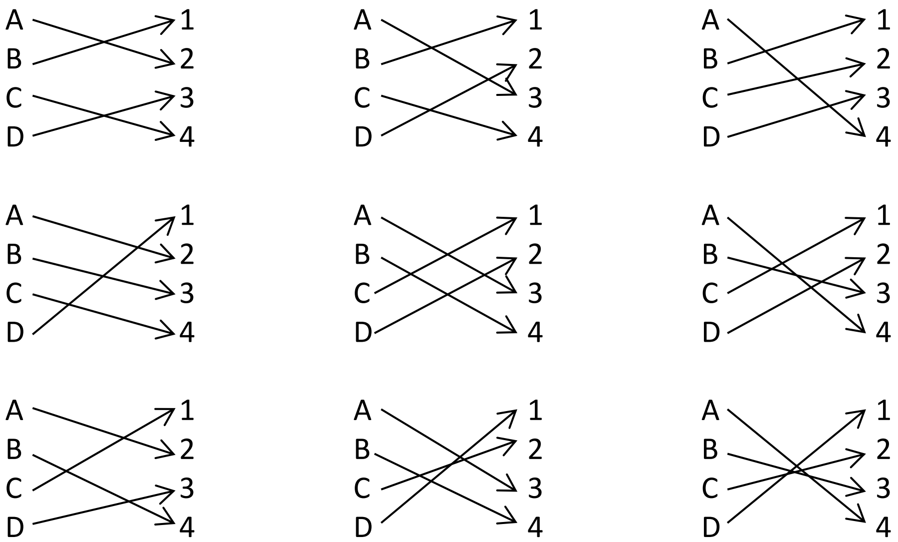


(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 24 (E) 81

Ratkaisu:

Tutkitaan erilaisia tapoja lähteä liikenneympyrästä. Kirjaimilla on merkitty autoja ja numeroilla autojen poistumisliittymiä.





Kun auto A poistuu liittymästä 2, yllä olevasta kaaviosta nähdään, että muille autoille jää kolme erilaista tapaa poistua liittymästä. Samoin käy, kun auto A poistuu liittymästä 3 ja 4. Erilaisia tapoja lähteä liikenneympyrästä on siis yhteensä $3 + 3 + 3 = 9$ kappaletta.

19.
Jono alkaa 1, -1, -1, 1, -1. Viidennen termin jälkeen jokainen termi on yhtä suuri kuin kahden edellisen termin tulo. Esimerkiksi kuudes termi on yhtä suuri kuin neljännen ja viidennen termin tulo. Mikä on 2013 ensimmäisen termin summa?

(A) -1006 **<u>(B)</u>** -671 (C) 0 (D) 671 (E) 1007

Ratkaisu:

Kun lasketaan säännön mukaan termejä eteenpäin, huomataan että jono toistaa termejä 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1… Lasketaan kolmen ensimmäisen termin summa $1 - 1 - 1 = -1$. Lasketaan sitten, kuinka montaa kertaa tällainen kolmen termin pituinen jono mahtuu lukuun 2013.
$2013 : 3 = 671$. Siis $-1 \cdot 671 = -671$.

20.
Johannes valitsee 5-numeroisen positiivisen kokonaisluvun ja poistaa yhden numeron saadakseen 4-numeroisen luvun. Tämän 4-numeroisen luvun ja alkuperäisen 5-numeroisen luvun summa on 52713. Mikä on alkuperäisen 5-numeroisen luvun numeroiden summa?

(A) 26 (B) 20 **(<u>C</u>)** 23 (D) 19 (E) 17

Ratkaisu:

Merkitään 5-numeroista lukua kirjainyhdistelmällä ABCDE. 4-numeroinen luku täytyy olla ABCD, sillä summissa

$$\begin{array}{r} \text{ABCDE} \\ +\ \text{BCDE} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{ABCDE} \\ +\ \text{ACDE} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{ABCDE} \\ +\ \text{ABDE} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{ABCDE} \\ +\ \text{ABCE} \\ \hline \end{array}$$

viimeinen numero on parillinen, vaikka tehtävänannon perusteella sen pitää olla pariton luku (3).

Tutkitaan nyt summaa

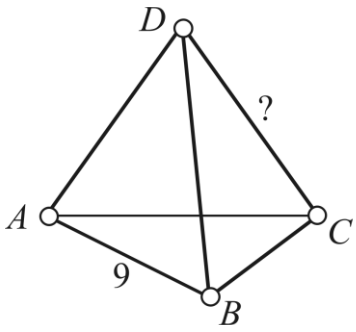
$$\begin{array}{r} \text{A B C D E} \\ +\ \text{A B C D} \\ \hline \text{5 2 7 1 3} \end{array}$$

A:n paikalla täytyy olla numero 5 tai 4. Se ei voi olla kuitenkaan 5, koska summan B + A täytyy olla 12, jolloin tapahtuu kymmenylitys. Siis 1 + A = 5 eli A = 4. Summista B + 4 = 12 ja C + B = 7 voidaan päätellä, että B = 7. B = 8 ei käy. Tällöin summassa numeron 2 paikalle tulisi 3, sillä summassa C + B tapahtuu kymmenylitys, jolloin 1 + 4 + 8 = 13. Summista C + 7 = 17 ja D + C = 1 voidaan päätellä, että C:n täytyy olla 9, koska numeroa 10 ei voida sijoittaa yhteenlaskussa C:n paikalle. Jos C = 9, täytyy summassa D + C = 1 tapahtua kymmenylitys eli D + 9 = 11 ja D = 2. Summasta E + 2 = 3 saadaan E = 1. Siis A = 4, B = 7, C = 9, D = 2 ja E = 1, jolloin 5-numeroisen luvun summa on
4 + 7 + 9 + 2 + 1 = 23.

Ratkaisut

21.

Jokainen tetraedrin neljästä kärjestä ja kuudesta särmästä merkitään yhdellä kymmenestä luvusta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 11 (luku 10 jätetään pois). Jokaista lukua käytetään vain yhdesti. Minkä tahansa kahden kärjen lukujen summa on yhtä suuri kuin särmän luku, joka yhdistää näitä kahta kärkeä. Särmä *AB* on merkitty luvulla 9. Mikä on särmän *CD* luku?



(A) 4 **(<u>B</u>)** 5 (C) 6 (D) 8 (E) 11

Ratkaisu:

Särmien ja kärkien lukujen summa on $1 + 2 + \cdots + 8 + 9 + 11 = 56$. Merkitään x:llä särmää *CD*.

Jokaisesta kärjestä lähtee kolme särmää, joten laskettaessa särmiin tulevia lukuja jokainen kärjessä oleva luku lasketaan kolmeen särmään. Siksi särmissä olevien lukujen summa on kolme kertaa kärjissä olevien lukujen summa.

Toisaalta särmissä olevien lukujen summa on 56 – kärjet.

Saadaan yhtälö
särmät = 3 · kärjet = 56 – kärjet eli
$3(9 + x) = 56 - 9 - x$,
jonka ratkaisu on $x = 5$.

Särmän *CD* luvuksi saadaan siis 5.

Kuva osoittaa, että numerointi on ylipäänsä mahdollinen.