

**3 pistettä**

1.

Kello laitetaan pöydälle viisaripuoli ylöspäin juuri silloin, kun minuuttiviisari osoittaa etelään. Kuinka monen minuutin kuluttua minuuttiviisari seuraavan kerran osoittaa itään?

- (A) 45                      (B) 40                      (C) 30                      (D) 20                      (E) 15

*Ratkaisu:*

Minuuttiviisari kääntyy 60 minuutissa täyden kierroksen. Etelästä itään on käännyttävä  $\frac{3}{4}$  kierrosta, joten aikaa kuluu 45 minuuttia.

2.

Neljä suklaapatukkaa maksaa 6 euroa enemmän kuin yksi suklaapatukka. Kuinka paljon maksaa yksi suklaapatukka?

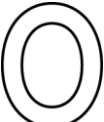
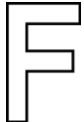

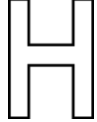

- (A) 1 EUR                      (B) 2 EUR                      (C) 3 EUR                      (D) 4 EUR                      (E) 5 EUR

*Ratkaisu:*

Tehtävänannon perusteella kolme suklaapatukkaa maksaa 6 euroa, joten yksi suklaapatukka maksaa 2 euroa.

3.

Marilla on sakset ja viisi pahvikirjainta. Hän leikkaa jokaisen kirjaimen poikki suoraa viivaa pitkin niin, että kirjain hajoaa mahdollisimman moneen palaseen. Mistä kirjaimesta tulee eniten paloja?

- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

*Ratkaisu:*



Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

4.

Lohikäärmeellä on viisi päätä. Aina kun yksi pää katkaistaan, viisi uutta kasvaa tilalle. Jos kuusi päätä leikataan poikki yksi kerrallaan, kuinka monta päätä lohikäärmeellä lopuksi on?

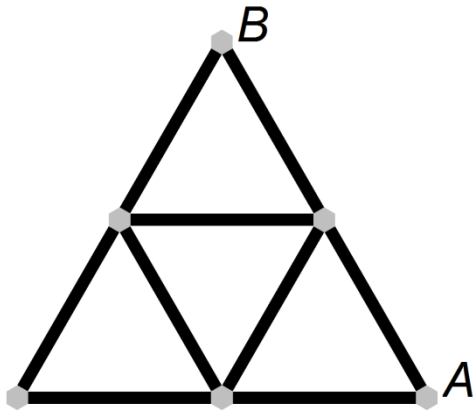
- (A) 25                      (B) 28                      **(C) 29**                      (D) 30                      (E) 35

*Ratkaisu:*

Jokaisessa pään katkaisussa päiden määrä kasvaa neljällä, joten kuudessa katkaisussa päiden määrä kasvaa 24:llä. Lopuksi päitä on  $5 + 24 = 29$ .

5.

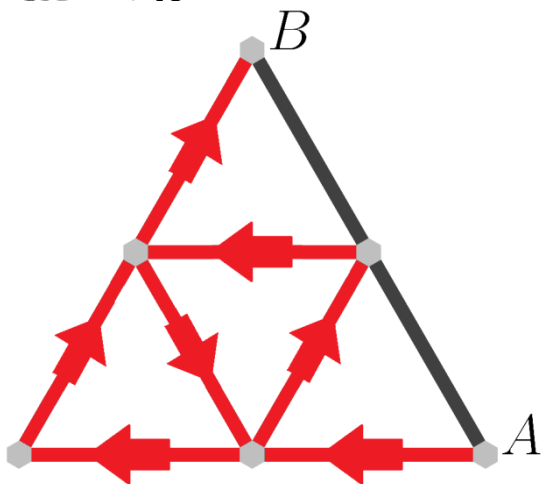
Jokainen yhdeksästä polusta on 100 m pitkä. Anna haluaa mennä paikasta *A* paikkaan *B* kulkematta mitään polkua pitkin useammin kuin kerran. Kuinka pitkä on pisin reitti, jonka hän voi valita?



- (A) 900 m                      (B) 800 m                      **(C) 700 m**                      (D) 600 m                      (E) 400 m

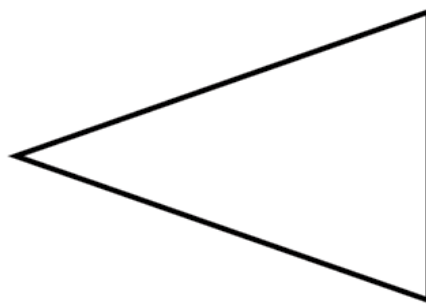
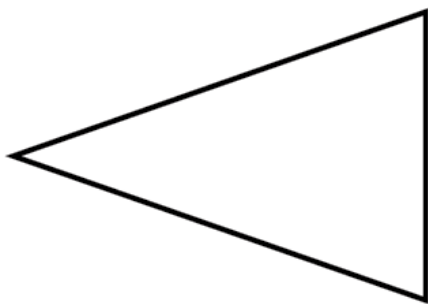
*Ratkaisu:*

Kärkeen *A* on vain kaksi reittiä, joten lähdettyään *A*:sta Anna ei voi enää palata sinne. Samoin tultuaan kärkeen *B* Anna ei voi enää lähteä takaisin, koska on jo perillä. Siten vähintään kaksi 100 metrin pituisista poluista jää kulkematta, eli reitin pituus on korkeintaan 700 m. On mahdollista kävellä tasan 700 m pitkä reitti esimerkiksi kuvan mukaisesti, joten pisin mahdollinen reitti on 700 m pitkä.



6.

Kuinka monella tavalla kuvan kahdesta kolmiosta voidaan valita sellaiset kaksi kärkeä, yksi kustakin kolmiosta, että kärkien kautta piirretty suora ei leikkaa kumpaakaan kolmiota?



(A) 1

(B) 2

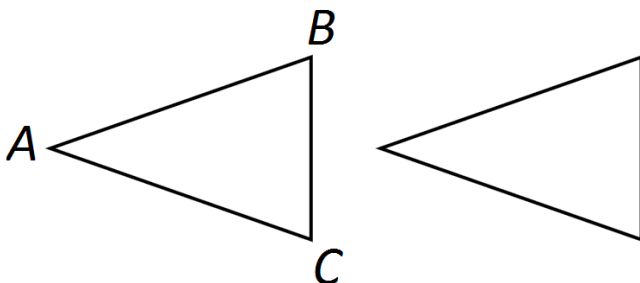
(C) 3

(D) 4

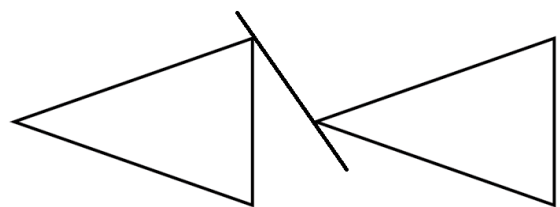
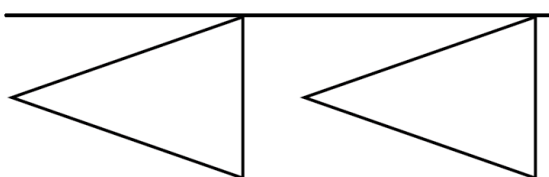
(E) useammalla kuin neljällä

*Ratkaisu:*

Merkitään toisen kolmion kärkiä kuvan mukaisesti kirjaimilla  $A$ ,  $B$  ja  $C$ .

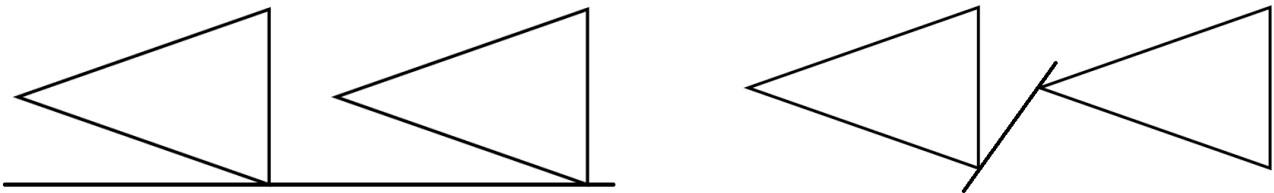


Suoran piirtäminen kärjen  $A$  kautta ei onnistu annettujen ehtojen mukaisesti. Kärjen  $B$  kautta voidaan piirtää tasan kaksi annettua ehtoa täyttävää suoraa:





Vastaavalla tavalla kärjen C kautta voidaan piirtää tasan kaksi annetut ehdot täyttävää suoraa:



Yhteensä suoria tulee siis neljä.

7.

Missä seuraavista lausekkeista jokainen kahdeksikko voidaan korvata samalla positiivisella luvulla (muulla kuin 8) ja saada sama tulos kuin luvulla 8 laskien?

- (A)  $(8 + 8) : 8 + 8$       (B)  $8 \cdot (8 + 8) : 8$       (C)  $8 + 8 - 8 + 8$   
(D)  $(8 + 8 - 8) \cdot 8$       **(E)**  $(8 + 8 - 8) : 8$

*Ratkaisu:*

Kohtien (A) – (E) laskuista saadaan tuloksiksi 10, 16, 16, 64 ja 1. Käydään vaihtoehdot läpi kirjaimilla laskien:

- (A)  $(x + x) : x + x = 2 + x = 10$  vain jos  $x = 8$   
(B)  $x \cdot (x + x) : x = 2x = 16$  vain jos  $x = 8$   
(C)  $x + x - x + x = 2x = 16$  vain jos  $x = 8$   
(D)  $(x + x - x) \cdot x = x^2 = 64$  vain jos  $x = 8$  (tai  $x = -8$ , mutta negatiivinen luku ei kelpaa)  
(E)  $(x + x - x) : x = 1$  toteutuu, olipa  $x$  mikä tahansa positiivinen luku.

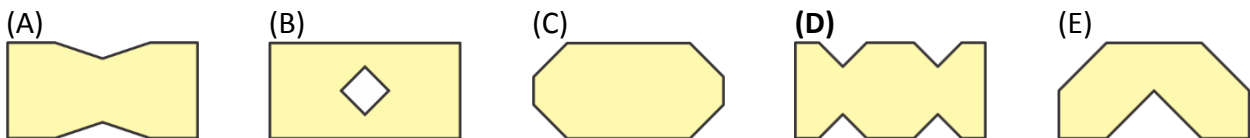
Siis vaihtoehto E on oikein.

8.

Vernerit taittaa paperinpalan kuvan mukaisesti ja leikkaa saksilla kaksi suoraa viivaa.

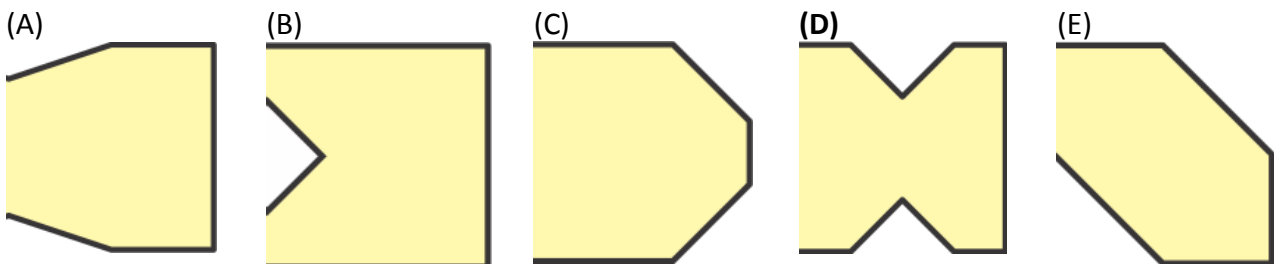


Sitten hän avaa paperin. Miltä seuraavista paperinpala ei voi lopuksi näyttää?



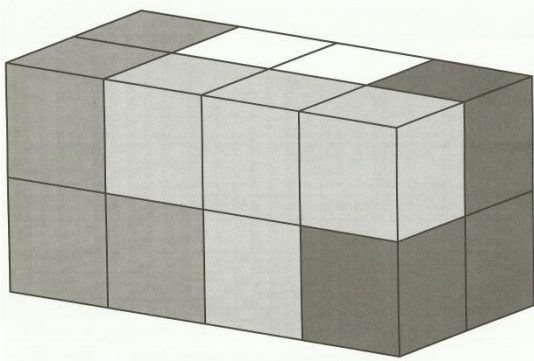
*Ratkaisu:*

Kohtien A – E lopputulokset saadaan leikkaamalla taitettu paperi seuraavin tavoin:

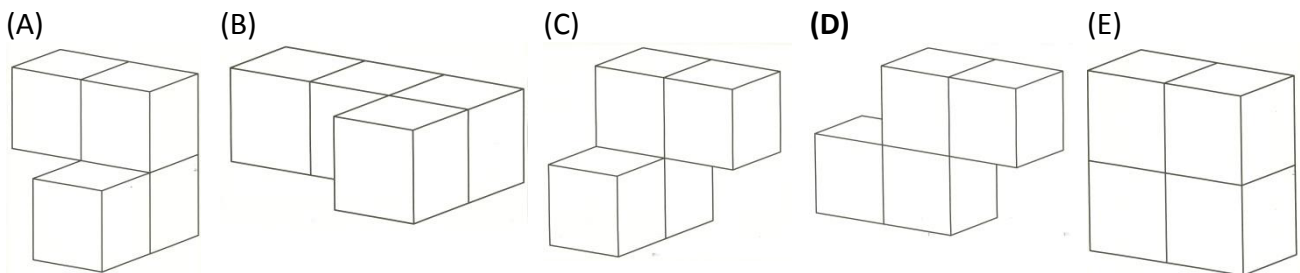


Jotta saataisiin kohdan D mukainen lopputulos, pitäisi taitettuun paperiin leikata neljä suoraa viivaa, joten vaihtoehto D on oikein.

9. Neljästä palasta tehdään suorakulmainen särmiö kuvan mukaisesti.



Kukin pala on tehty neljästä keskenään samanvärisestä kuutiosta. Minkä muotoinen on valkoinen pala?



*Ratkaisu:*

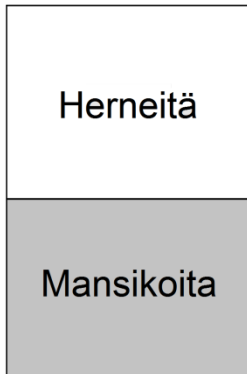
Koska jokainen pala koostuu neljästä keskenään samanvärisestä kuutiosta, ovat kaikki tummanharmaat ja vaaleanharmaat kuutiot näkyvissä. Mustista kuutioista yksi on piilossa, ja tuolle piilossa olevalle mustalle kuutiolle on vain yksi mahdollinen paikka: vaaleanharmaan kuution vieressä valkoisen kuution alapuolella. Lopuissa paikoissa on oltava valkoisia kuutioita, joten vaihtoehto D on oikein.



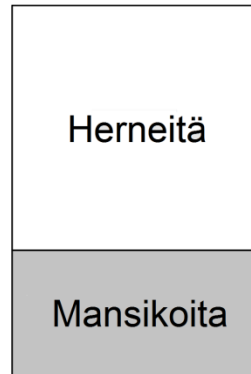
10.

Rouva Tarhanen kasvattaa herneitä ja mansikoita. Tänä vuonna hän muutti suorakulmion muotoisen herneviljelmän neliöksi pidentämällä yhtä sen sivuista kolmella metrillä. Tällöin mansikkaviljelmän pinta-ala pieneni 15 neliömetrillä. Mikä oli herneviljelmän pinta-ala ennen muutosta?

Viime vuonna

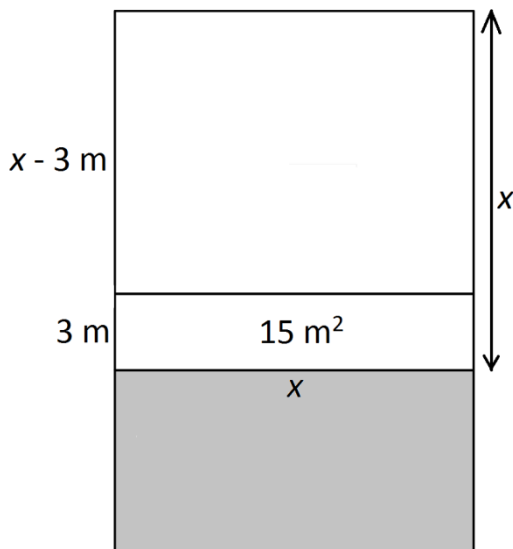


Tänä vuonna



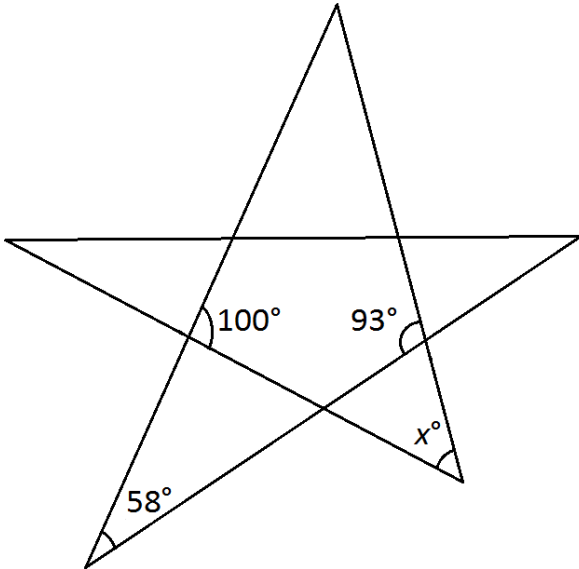
- (A)  $5 \text{ m}^2$       (B)  $9 \text{ m}^2$       **(C)  $10 \text{ m}^2$**       (D)  $15 \text{ m}^2$       (E)  $18 \text{ m}^2$

Ratkaisu:



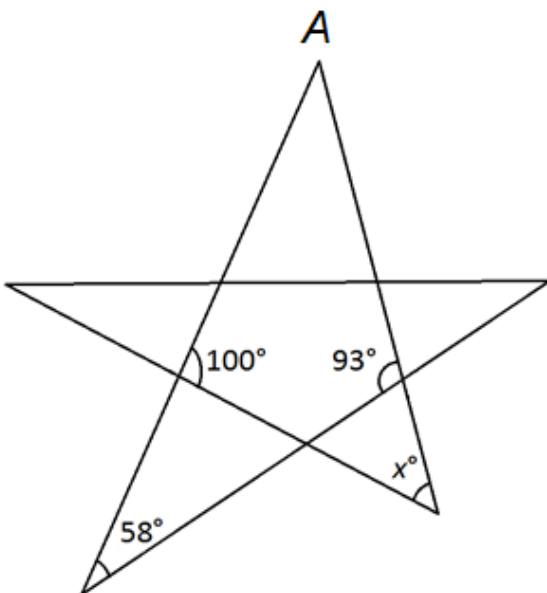
Kuvan mukaisesti toisen sivun pituus on  $x = 15 \text{ m}^2 : 3 \text{ m} = 5 \text{ m}$ . Siten alkuperäisen herneviljelmän sivujen pituudet olivat  $x = 5 \text{ m}$  ja  $x - 3 \text{ m} = 2 \text{ m}$ . Pinta-ala oli siis  $5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m}^2$ .

11. Mikä on muuttujan  $x$  arvo oheisessa kuviossa?



- (A) 35                      (B) 42                      **(C) 51**                      (D) 65                      (E) 109

Ratkaisu:



Kuvassa olevista kolmioista lasketaan, että  $\sphericalangle A = 180^\circ - 58^\circ - 93^\circ = 29^\circ$  ja kulman  $x$  asteluku on  $180^\circ - 100^\circ - \sphericalangle A = 51^\circ$ .





Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

12.

Juusto leikattiin useaan palaseen. Päivän mittaan laiska Viiru-kissa näki usean hiiren käyvän varastamassa juustonpaloja. Viiru huomasi, että yksikään hiiri ei varastanut yli yhdeksää palaa, jokainen hiiri varasti eri määrän paloja, eikä yksikään varastanut kaksinkertaista määrää paloja kuin joku toinen. Kuinka monta hiirtä Viiru korkeintaan näki juustovarkaissa?

- (A) 4                      (B) 5                      **(C) 6**                      (D) 7                      (E) 8

*Ratkaisu:*

Koska yksikään hiiri ei varastanut yli yhdeksää palaa, ovat mahdolliset varastettujen palojen määrät kokonaisluvut 1 – 9. Koska jokainen hiiri varasti eri määrän paloja, on hiiriä ollut korkeintaan 9. Kuitenkaan, koska yksikään hiiri ei varastanut kaksinkertaista määrää paloja kuin joku toinen, eivät esimerkiksi luvut 1 ja 2 voi molemmat olla varastettujen palojen määriä. Mikäli kaikki parittomat luvut 1, 3, 5, 7 ja 9 ovat määrien joukossa, voi parillisista luvuista 2, 4, 6 ja 8 vain joko luku 4 tai luku 8 olla määrien joukossa.

Jos yksi pariton luku jätetään pois, saadaan tilalle yksi parillinen luku tai ei saada yhtään. Esimerkiksi jos poistetaan luku 3, voidaan ottaa luku 6 mukaan. Jos parillisista luvuista luku 4 on joukossa, ei lukua 2 voi ottaa joukkoon mukaan, vaikka luku 1 poistettaisiin joukosta. Hiirien määrää ei siis voi kasvattaa vähentämällä parittomien lukujen määrää. Hiiriä on siis ollut korkeintaan parittomien lukujen määrä + 1 eli  $5 + 1 = 6$ .

13.

Taiotun puhuvan neliön sivun pituus on 8 cm. Jos neliö puhuu totta, sen jokaisen sivun pituus lyhenee kahdella senttimetrillä. Jos neliö valehtelee, sen piiri kaksinkertaistuu. Neliö sanoo jossain järjestyksessä neljä lausetta, joista kaksi on tosia ja kaksi epätosia. Kuinka suuri neliön piiri korkeintaan tämän jälkeen on?

- (A) 28 cm                      (B) 80 cm                      (C) 88 cm                      **(D) 112 cm**                      (E) 120 cm

*Ratkaisu:*

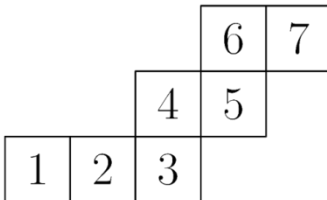
Piiri ja sivun pituus kaksinkertaistuvat aina samalla kertaa. Jos neliö haluaa sivunsa pituuden (ja samalla piirinsä) mahdollisimman suureksi, sen kannattaa ensin kaksinkertaistaa sivun pituutta ja vasta sitten vähentää sitä. Jos tehdään toisin päin, on vähemmän kaksinkertaistettavaa ja lopputulos on pienempi. Neliön kannattaa siis ensin valehdella kahdesti ja sitten puhua kahdesti totta. Tällöin sivun pituudeksi tulee  $8 \text{ cm} \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$  ja piiriksi  $4 \cdot 28 \text{ cm} = 112 \text{ cm}$ .



Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

14.

Kuutio pyörii pöydällä kääntyen särmiensä ympäri. Sen alin tahko on tällöin kuvan mukaisesti paikoissa 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7 tässä järjestyksessä.



Missä kahdessa näistä paikoista oli kuution sama tahko?

- (A) 1 ja 7                    **(B)** 1 ja 6                    (C) 1 ja 5                    (D) 2 ja 7                    (E) 2 ja 6

*Ratkaisu:*

Merkitse suorakulmaisen särmiön muotoisen pyyhekumin yhteen tahkoon luku 1. Laita tuo tahko pöytää vasten. Pyöritä kumia särmiön ympäri kuvan mukaisesti ja merkitse aina pöytää vasten olevaan tahkoon oikea luku. Yhteen tahkoon tulevat loppujen lopuksi sekä luku 1 että luku 6.

**5 pistettä**

15.

Rikulla on viisi kuutiota. Kun hän järjestää ne pienimmästä suurimpaan, on viereisten kuutioiden korkeusero aina 2 cm. Suurin kuutio on yhtä korkea kuin kaksi pienintä kuutiota yhteensä. Kuinka korkea on kaikista viidestä kuutiosta rakennettu torni?

- (A) 6 cm                    (B) 14 cm                    (C) 22 cm                    (D) 44 cm                    **(E)** 50 cm

*Ratkaisu:*

Kuutioiden korkeudet senttimetreinä ovat  $x, x + 2, x + 4, x + 6$  ja  $x + 8$ . Koska suurin kuutio on yhtä korkea kuin kaksi pienintä kuutiota yhteensä, saadaan yhtälö  $x + x + 2 = x + 8$ , josta  $x = 6$ . Nyt kuutioiden korkeuksien summa on  $x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8 = 5x + 20$ . Sijoittamalla  $x = 6$  saadaan tornin korkeudeksi 50 cm.



16.

Lentokentällä on liikkuva 500 metriä pitkä kävelytie, joka kulkee 4 kilometrin tuntinopeudella. Matti ja Maija astuvat tälle liikkuvalla kävelytielle yhtä aikaa. Maija kävelee sitä pitkin 6 kilometrin tuntinopeudella ja Matti seisoo paikallaan. Kun Maija tulee kävelytien loppuun, kuinka kaukana Mattin edellä hän on?

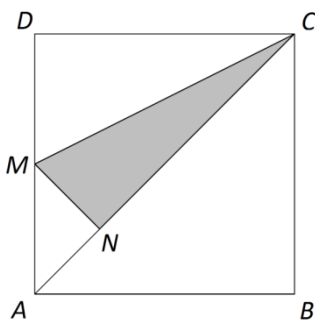
- (A) 100 m                      (B) 160 m                      (C) 200 m                      (D) 250 m                      **(E) 300 m**

*Ratkaisu:*

Maijan nopeus maan suhteen on  $4 \text{ km/h} + 6 \text{ km/h} = 10 \text{ km/h}$ . Kun hän on kulkenut kävelytien loppuun, on aikaa kulunut  $\frac{1}{2} \text{ km} : 10 \text{ km/h} = \frac{1}{20} \text{ h}$ . Maijan nopeus on  $6 \text{ km/h}$  suurempi kuin Mattin, joten matka, jonka Maija on Mattin edellä, on  $\frac{1}{20} \text{ h} \cdot 6 \text{ km/h} = \frac{6}{20} \text{ km} = \frac{3}{10} \text{ km} = 0,3 \text{ km} = 300 \text{ m}$ .

17.

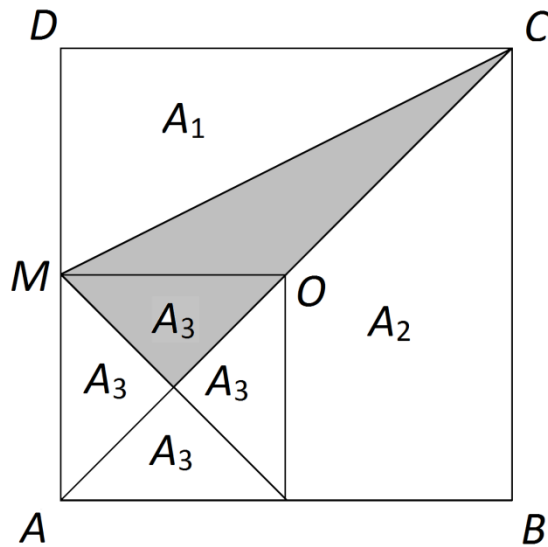
Kuviossa  $ABCD$  on neliö,  $M$  janan  $AD$  keskipiste ja  $MN$  kohtisuorassa janaa  $AC$  vastaan. Mikä on tummennetun kolmion  $MNC$  ja neliön pinta-alojen suhde?



- (A) 1 : 6                      (B) 1 : 5                      (C) 7 : 36                      **(D) 3 : 16**                      (E) 7 : 40

*Ratkaisu:*

Koska  $AC$  on neliön lävistäjä, on  $\sphericalangle MON = 45^\circ$ . Koska lisäksi  $MN$  on kohtisuorassa janaa  $AC$  vastaan, on kolmio  $MON$  tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Yhteneviä kolmioita muodostuu neliön vasempaan alanurkkaan neljä.



Kolmio  $ABC$  on puolet neliöstä, joten  $A_2 + 2A_3$  on  $\frac{1}{2}$  koko neliön alasta.

Kolmio  $MDC$  on puolet puolikkaasta neliöstä, joten  $A_1$  on  $\frac{1}{4}$  koko neliön alasta.

Kolmio  $MON$  on neljäsosa neliön neljäsosasta, joten  $A_3$  on  $\frac{1}{16}$  koko neliön alasta.

Tummennetun alueen osuus koko neliöstä on  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ .

**18.**

Joillakin kolmenumeroisilla luvuilla on seuraava ominaisuus: poistetaanpa luvun ensimmäinen tai viimeinen numero, niin jäljelle jäänyt luku on kokonaisluvun neliö. Mikä on kaikkien niiden kolmennumeroisten lukujen summa, joilla on tämä ominaisuus?

- (A) 1013      (B) 1177      (C) 1465      **(D) 1993**      (E) 2016

*Ratkaisu:*

Kaksinumeroiset kokonaisluvun neliöt ovat 16, 25, 36, 49, 64 ja 81. Luvut, joilla on tehtävänannossa mainittu ominaisuus, voidaan muodostaa näistä pareittain. Jos luvun alku on 16, on lopun oltava kuudella alkava kokonaisluvun neliö eli 64. Taulukoidaan mahdolliset alut ja loput.

Alku	Loppu
16	64
25	ei mahdollinen
36	64
49	ei mahdollinen
64	49
81	16

Luvut, joilla on mainittu ominaisuus, ovat siis 164, 364, 649 ja 816. Niiden summa on 1 993.



Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

19.

Kirjassa on 30 tarinaa, joista jokainen alkaa uudelta sivulta. Tarinoiden pituudet ovat 1, 2, 3, ..., 29 ja 30 sivua. Ensimmäinen tarina alkaa ensimmäiseltä sivulta. Kuinka monta tarinaa korkeintaan voi alkaa sivulta, jonka numero on pariton?

(A) 16

(B) 18

(C) 20

(D) 21

**(E) 23**

*Ratkaisu:*

Tarinoiden pituuksista 15 on parittomia ja 15 parillisia. Laitetaan parilliset pituudet alkuun, jolloin saadaan ne kaikki alkamaan parittomilta sivuilta.

Tarina nro	Pituus	Alkaa sivulta
1	parillinen	1 (pariton)
2	parillinen	pariton
3	parillinen	pariton
...	...	...
15	parillinen	pariton

Loppujen 15 tarinan pituudet ovat parittomia, joten tarinoista joka toinen alkaa parittomalta sivulta. Ensimmäinen alkaa parittomalta sivulta ja tarinoita on pariton määrä, joten myös viimeinen alkaa parittomalta sivulta. Siten näistä 15 tarinasta 8 alkaa parittomilta sivuilta.

Yhteensä parittomilta sivuilta alkavia tarinoita on  $15 + 8 = 23$ . Todistetaan vielä, että tämä on suurin mahdollinen määrä.

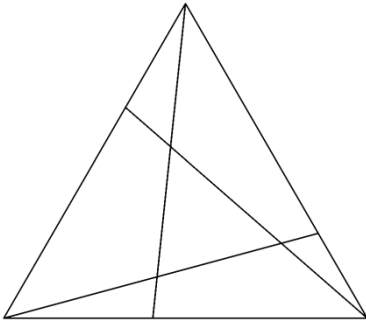
Parittoman pituinen tarina aiheuttaa sen, että seuraava tarina alkaa erityyppiseltä (pariton/parillinen) sivulta kuin edellinen. Parillisen sivun pituinen tarina taas aiheuttaa sen, että seuraava tarina alkaa samantyyppiseltä sivulta kuin edellinen. Siten tarinan alun sivutyyppi vaihtuu täsmälleen 15 kertaa, joten vähintään 7 ( $15 : 2$  pyöristetty alaspäin) tarinaa alkaa parilliselta sivulta. Siis korkeintaan  $30 - 7 = 23$  tarinaa alkaa parittomalta sivulta.



Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

20.

Ison kolmion sisään piirretään kuvan mukaisesti kolme janaa, jolloin se jakautuu neljään pieneen kolmioon ja kolmeen nelikulmioon.



Nelikulmioiden piirien summa on 25 cm ja pienten kolmioiden piirien summa 20 cm. Ison kolmion piiri on 19 cm. Mikä on ison kolmion sisään piirrettyjen janojen yhteispituus?

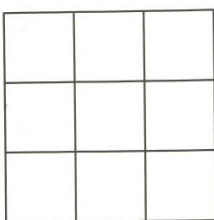
- (A) 11 cm      (B) 12 cm      (C) 13 cm      (D) 15 cm      (E) 16 cm

*Ratkaisu:*

Kun lasketaan pienten nelikulmioiden ja kolmioiden piirit yhteen ja vähennetään ison kolmion piiri, niin jäljelle jää ison kolmion sisään piirrettyjen janojen yhteispituus kaksinkertaisena (jokainen ison kolmion sisällä oleva pienen kolmion sivu tulee nimittäin laskettua myös nelikulmion sivuksi). Ison kolmion sisään piirrettyjen janojen yhteispituus on siis senttimetreinä  $(25 + 20 - 19) : 2 = 13$ .

21.

Kuvan 3 x 3 –ruudukon jokaiseen ruutuun kirjoitetaan positiivinen luku siten, että jokaisen rivin kolmen luvun tulo on 1, jokaisen sarakkeen kolmen luvun tulo on 1 ja jokaisen 2 x 2 –neliön neljän luvun tulo on 2. Mikä luku tulee keskimmäiseen ruutuun?



- (A) 16      (B) 8      (C) 4      (D)  $\frac{1}{4}$       (E)  $\frac{1}{8}$



Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

$a$	$b$	$c$
$d$	$x$	$e$
$f$	$g$	$h$

Koska  $abc = 1$  ja  $adf = 1$ , niin  $bc = df$ .

Koska lisäksi  $bcex = 2$ , niin äskeisen perusteella  $dfex = 2$ .

Koska nyt  $dfex = 2 = dfgx$ , niin  $e = g$ .

Huomataan, että luvut  $b$ ,  $e$ ,  $g$  ja  $d$  ovat ruudukossa samassa asemassa. Koska kaksi näistä on keskenään yhtä suuria, niin loputkin ovat. Saadaan siis yksinkertaistettua tilanne seuraavanlaiseksi:

$a$	$b$	$c$
$b$	$x$	$b$
$f$	$b$	$h$

Nyt  $b^2x = 1$  ja  $b^2xc = 2$ , joten  $c = 2$ . Ruudukon nurkissa olevat luvut ovat keskenään samassa asemassa, joten  $a = c = f = h = 2$ . Tilanne yksinkertaistuu taas:



Kenguru 2012 Cadet  
(8. ja 9. luokka)  
Ratkaisut.

2	$b$	2
$b$	$x$	$b$
2	$b$	2

Nyt  $4b = 1$ , joten  $b = \frac{1}{4}$ . Sijoittamalla tämä lukuarvo yhtälöön  $2b^2x = 2$  saadaan  $x = 16$ .

Oppilaat voivat toki tehdä saman tai vastaavan päättelyn ilman yhtälöitäkin.