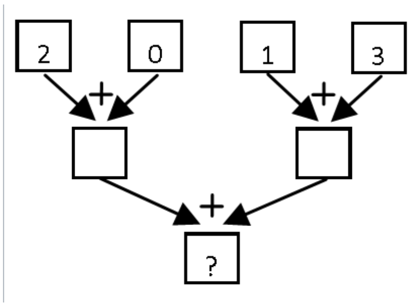
Ratkaisut

3 pistettä

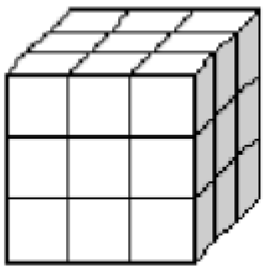
1.
Yhteenlaskukoneeseen syötetään luvut 2, 0, 1 ja 3. Mikä summa muodostuu kysymysmerkkilaatikkoon?



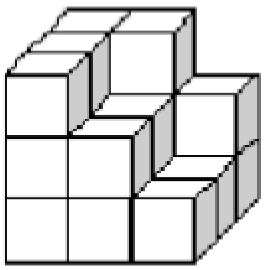
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **<u>(E)</u>** 6

Ratkaisu: $2 + 0 + 1 + 3 = 6$.

2.
Nelli haluaa rakentaa samanlaisen kuution kuin Tiina (kuva 1). Nellin kuutio jäi kuitenkin vajaaksi, koska rakennuspalikat loppuivat kesken (kuva 2). Kuinka monta palikkaa Nelli vielä tarvitsee saadakseen kuutionsa valmiiksi?



Kuva 1



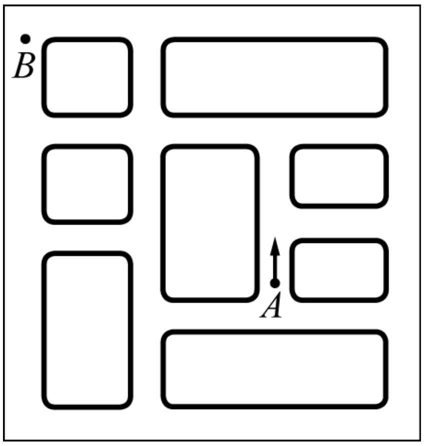
Kuva 2

(A) 5 (B) 6 **<u>(C)</u>** 7 (D) 8 (E) 9

Ratkaisu: Ylimmältä tasolta puuttuu 5 palikkaa ja keskimmäiseltä 2 palikkaa, yhteensä 7 palikkaa.

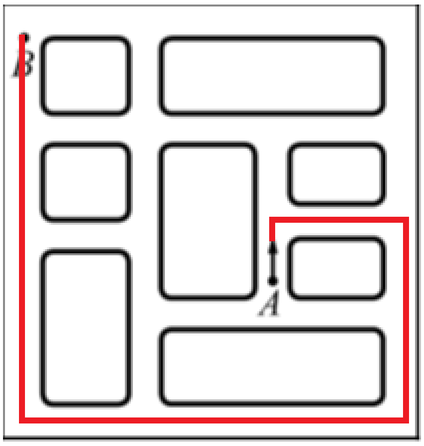
Ratkaisut

3.
Nils opettelee ajamaan mopolla. Hän **osaa** kääntyä jo oikealle, mutta hän **ei osaa** kääntyä vasemmalle. Kuinka monta käännöstä hän vähintään tarvitsee päästäkseen paikasta A paikkaan B?



(A) 3 **<u>(B)</u>** 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Ratkaisu: Nilsin suunta on aluksi ylöspäin, ja hän on vielä pisteen *B* alapuolella, kun hän joutuu kääntymään oikealle. Koska hän voi kääntyä vain 90° kerrallaan ja aina oikealle, on oikealle käännyttävä yhteensä vähintään 4 kertaa, jotta hän kääntyisi yhteensä 360° ja kulkisi taas ylöspäin ja voisi päästä pisteen *B* korkeudelle. Neljä käännöstä myös riittää, esimerkiksi seuraavalla tavalla.



4.
Artun, Brunon ja Christianin ikien summa on 31 vuotta. Mikä on heidän ikiensä summa kolmen vuoden kuluttua?

(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 37 **<u>(E)</u>** 40

Ratkaisu: Jokainen vanhenee vuodessa vuoden, joten ikien summa kasvaa kolmessa vuodessa $3 \cdot 3$ vuotta. Summaksi tulee $31 + 3 \cdot 3 = 40$ vuotta.

Ratkaisut

5.
Sama numero laitetaan jokaiseen laatikkoon. Mikä numero on kyseessä, jos kertolaskun tulos 176 on oikein?

☐☐·☐ = 176

(A) 6 **(B)** 4 (C) 7 (D) 9 (E) 8

Ratkaisu: $44 \cdot 4 = 176$. Numeroa 4 suuremmilla numeroilla kertolaskun tulos on suurempi kuin 176 ja pienemmillä numeroilla pienempi kuin 176.

6.
Luvulla 36 on seuraava ominaisuus: Sen voi jakaa tasan ykkösten paikalla olevalla numerolla, eli 36 : 6 = 6. Esimerkiksi luvulla 38 ei ole tätä ominaisuutta. Kuinka monella lukujen 20 ja 30 välillä olevalla kokonaisluvulla on tämä sama ominaisuus?

(A) 2 (B) 3 **(C)** 4 (D) 5 (E) 6

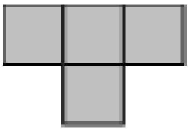
Ratkaisu:

21 on jaollinen luvulla 1, sillä 21 : 1 = 21.
22 on jaollinen luvulla 2, sillä 22 : 2 = 11.
23 ei ole jaollinen luvulla 3, sillä 23 : 3 = 7, jää 2.
24 on jaollinen luvulla 4, sillä 24 : 4 = 6.
25 on jaollinen luvulla 5, sillä 25 : 5 = 5.
26 ei ole jaollinen luvulla 6, sillä 26 : 6 = 4, jää 2.
27 ei ole jaollinen luvulla 7, sillä 27 : 7 = 3, jää 6.
28 ei ole jaollinen luvulla 8, sillä 28 : 8 = 3, jää 4.
29 ei ole jaollinen luvulla 9, sillä 29 : 9 = 3, jää 2.

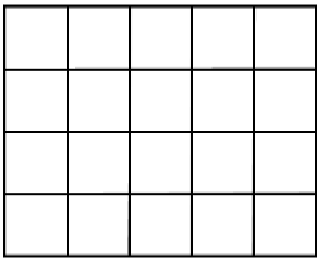
Kyseinen ominaisuus on siis luvuilla 21, 22, 24 ja 25, eli lukuja on 4. Tulos ei muutu, vaikka tulkittaisiin lukujen 20 ja 30 olevan mukana kyseisellä välillä, koska nollalla ei voi jakaa.

Ratkaisut

7.



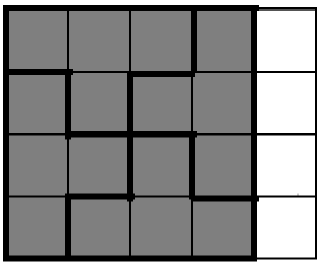
Annilla on iso kasa yllä olevan kuvan mukaisia paloja. Hän yrittää sijoittaa mahdollisimman monta niistä suorakulmion muotoiselle alustalle (kuva alla). Palat eivät saa olla päällekkäin.



Kuinka monta palaa hän saa siihen **enintään** mahtumaan?

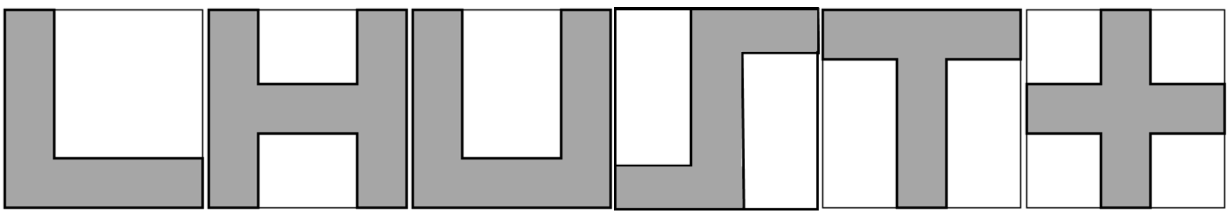
(A) 2 (B) 3 **(C)** 4 (D) 5 (E) 6

Ratkaisu: 4 palaa mahtuu esimerkiksi seuraavasti:



4 pistettä

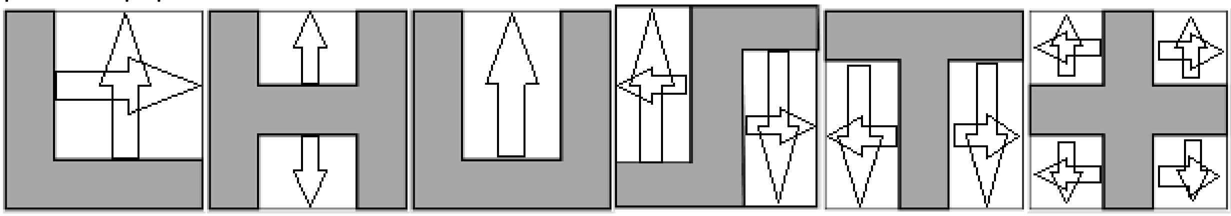
8.
Martinalla oli neliön muotoisia paperiarkkeja, joille hän piirsi kuvioita. Kuinka monella näistä kuvioista on yhtä suuri piiri kuin paperiarkilla?



(A) 2 (B) 3 **(C)** 4 (D) 5 (E) 6

Ratkaisut

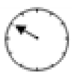
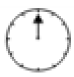
Ratkaisu: Siirtämällä janoja nähdään, että kaikilla paitsi toisella ja kolmannella kuviolla on sama piiri kuin paperiarkilla.



9.

Aaron ajelee koko iltapäivän polkupyörällään tasaista nopeutta. Hän katsoo kelloaan ajelun alkaessa ja päättyessä.

Mikä kuvista näyttää minuuttiviisarin oikeassa asennossa silloin, kun Aaron on ajanut kolmasosan matkasta?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Ratkaisu: Aaron lähti kello 13.30 ja tuli perille kello 15.30. Matka kesti 2 h = 120 min, joten kolmasosa matkasta oli 40 min. Kun Aaron oli ajanut kolmasosan matkasta, oli kello siis 14.10, joten minuuttiviisari oli numeron kaksi kohdalla.

Ratkaisut

10.
Leo rakensi palikkalinnan. Kuvassa näkyy linna ylhäältä päin katsottuna.

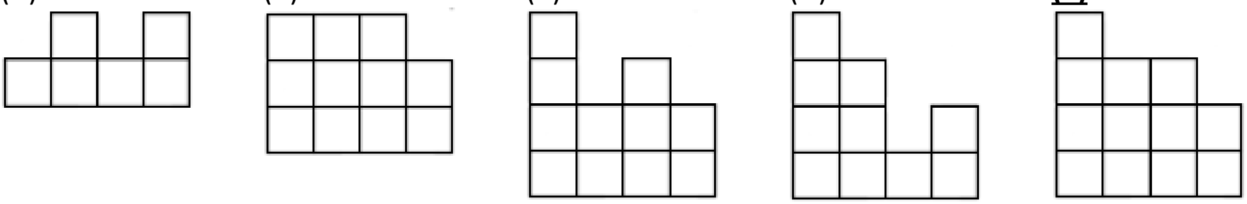
TAKAA

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

EDESTÄ

Numero ruudussa kertoo palikkatornin korkeuden kyseisessä pinossa. Miltä palikkalinna näyttää suoraan edestäpäin katsottuna?

(A) (B) (C) (D) **<u>(E)</u>**



Ratkaisu: Kuviossa näkyy kunkin sarakkeen korkein torni. Edestä katsottuna vasemmassa reunassa korkein torni on 4 palikkaa korkea. Sen vieressä korkeimmassa tornissa on 3 palikkaa, samoin seuraavassa sarakkeessa. Oikealla korkein torni on 2 palikkaa korkea. Korkeimpien tornien korkeudet vasemmalta oikealle ovat 4, 3, 3 ja 2, joten kuvion täytyy olla E.

11.
Oppilaskunnan hallituksen puheenjohtajan vaalissa oli viisi ehdokasta. Jokainen ehdokas sai eri määrän ääniä. Ääniä annettiin yhteensä 36 kappaletta. Voittaja sai 12 ääntä ja vähiten ääniä saanut sai 4 ääntä. Kuinka monta ääntä toiseksi tullut ehdokas sai?

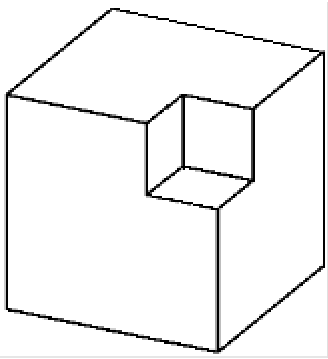
(A) 8 **<u>(B)</u>** 8 tai 9 (C) 9 (D) 9 tai 10 (E) 10

Ratkaisu: Ensimmäinen ja viimeinen ehdokas saivat yhteensä 16 ääntä, joten muille ehdokkaille jää yhteensä 20 ääntä. Neljäs sai enemmän kuin viides, joten neljäs sai vähintään 5 ääntä. Kolmas sai enemmän kuin neljäs, joten hän sai vähintään 6 ääntä. Toiseksi tulleelle ehdokkaalle jää siis korkeintaan $20 - 5 - 6 = 9$ ääntä.

Jos toiseksi tullut sai 7 ääntä tai vähemmän, niin kolmas sai korkeintaan 6 ja neljäs korkeintaan 5 ääntä. Tällöin ääniä annettiin yhteensä korkeintaan 34, mikä on mahdotonta, koska ääniä annettiin yhteensä 36.

Siis toiseksi tullut sai 8 tai 9 ääntä. Osoitetaan vielä, että molemmat ovat mahdollisia: äänimäärät paremmuusjärjestyksessä saattoivat olla 12, 8, 7, 5 ja 4 tai 12, 9, 6, 5 ja 4. Molemmissa näistä jokainen ehdokas sai eri määrän ääniä ja ääniä annettiin yhteensä 36.

12.
Puisen kuution särmä on 3 cm. Kuution jokaisesta kulmasta lohkaistaan pieni kuutio, jonka särmä on 1 cm. (Kuvassa on lohkaistu kuutio vain yhdestä kulmasta.)



Kuinka monta tahkoa näin syntyvässä monitahokkaassa on? (Aluksi tahkoja oli tietenkin kuusi.)

(A) 16 (B) 20 (C) 24 **<u>(D)</u>** 30 (E) 36

Ratkaisu: Kun kulmasta poistetaan kuutio, jonka särmä on 1 cm, syntyy kappaleeseen 3 tahkoa lisää. Kun tämä tehdään joka kulmalle, tulee tahkoja lisää $8 \cdot 3 = 24$ (pois leikattavat kuutiot eivät mene päällekkäin, koska 3 cm – 2 · 1 cm = 1 cm), joten syntyy kappale, jossa on $6 + 24 = 30$ tahkoa.

13.
Kuinka monta kaksinumeroisten positiivisten kokonaislukujen paria on olemassa, joiden erotus on 50? Tällainen pari on esimerkiksi 62 ja 12.

<u>(A)</u> 40 (B) 30 (C) 50 (D) 60 (E) 10

Ratkaisu: Pienin kaksinumeroinen luku on 10. Sen pariksi käy luku $10 + 60$. Seuraava on 11, ja sen pariksi käy $11 + 50 = 61$. Seuraava pari on 12 ja 62, sitten 13 ja 63 jne. Suurin kaksinumeroinen luku on 99, ja sen pariksi käy $99 - 50 = 49$. Pareja on siis yhtä monta kuin lukuja 10, 11, 12, …, 49 eli $49 - 9 = 40$ kpl.

Ratkaisut

14.
Junnujalkapalloturnauksen finaalissa tehtiin reippaasti maaleja. Ensimmäisellä puoliajalla tehtiin 6 maalia ja vierasjoukkue johti tauolle mentäessä. Toisella puoliajalla kotijoukkue teki 3 maalia ja voitti ottelun. Kuinka monta maalia kotijoukkue kaikkiaan teki?

(A) 3 (B) 4 **(C)** 5 (D) 6 (E) 7

Ratkaisu: Vieraiden tiedetään olleen johdossa ensimmäisen puoliajan jälkeen. Koska kotijoukkue ylitti vierasjoukkueen maalien määrän tekemällä toisella puoliajalla 3 maalia lisää, niin vieraat olivat ensimmäisen puoliajan jälkeen korkeintaan 2 maalia edellä.

Jos vieraat olivat ensimmäisen puoliajan jälkeen vain yhden maalin edellä, niin toinen joukkueista oli tehnyt parittoman ja toinen parillisen määrän maaleja, joten maalien kokonaismäärä oli ensimmäisen puoliajan jälkeen pariton. Näin ei kuitenkaan voinut olla, koska ensimmäisellä puoliajalla tiedetään tehdyn 6 maalia.

Siis vieraat olivat ensimmäisen puoliajan jälkeen kaksi maalia edellä, joten tilanne oli silloin vieraille 2-4. Kotijoukkue teki toisella puoliajalla kolme maalia lisää, joten he tekivät yhteensä 5 maalia.

5 pistettä

15.
40 poikaa ja 28 tyttöä seisoo ympyrässä käsi kädessä. Täsmälleen 18 poikaa pitää oikealla kädellään tytön kädestä kiinni. Kuinka monta poikaa pitää vasemmalla kädellään tytön kädestä kiinni?

(A) 9 (B) 14 **(C)** 18 (D) 20 (E) 28

Ratkaisu: $40 - 18 = 22$ poikaa pitää oikealla kädellään pojan vasemmasta kädestä kiinni. Tämän jälkeen poikien vasempia käsiä on jäljellä vielä $40 - 22 = 18$, ja nuo kaikki kädet pitävät kiinni tytön oikeasta kädestä.

Voidaan myös ajatella, että jokainen ”poikarivi” (joukko vierekkäin olevia poikia, yksikin poika muodostaa tällaisen rivin) pitää yhdellä oikealla ja yhdellä vasemmalla kädellä kiinni tytön kädestä.

Ratkaisut

16.

Antti, Bengt ja Carola valehtelevat aina. Jokaisella heistä on kivi, joka on joko punainen tai vihreä. Antti sanoo: ”Minun kiveni on samanvärinen kuin Bengtin kivi.” Bengt sanoo: ”Minun kiveni on samanvärinen kuin Carolan kivi.” Carola sanoo: ”Kahdella meistä on punainen kivi.” Mikä seuraavista väittämistä on totta?

(A) Antin kivi on vihreä.
(B) Bengtin kivi on vihreä.
(C) Carolan kivi on punainen.
(D) Antin ja Carolan kivet ovat erivärisiä.
(E) Mikään edellisistä ei ole totta.

Ratkaisu: Koska kaikki kolme valehtelevat, tiedetään seuraavien lauseiden olevan totta:

1) Antin ja Bengtin kivet ovat eriväriset.
2) Bengtin ja Carolan kivet ovat eriväriset.
3) Punaisia kiviä on 0, 1 tai 3.

Koska oli olemassa vain kahdenvärisiä kiviä, niin lauseiden 1 ja 2 perusteella Antin ja Carolan kivet ovat samanväriset. Tämän ja lauseen 1 perusteella Bengtillä on erivärinen kivi kuin muilla, joten punaisia kiviä ei voi olla 0 eikä 3. Siten lauseen 3 perusteella punaisia kiviä on 1. Koska Bengtillä on erivärinen kivi kuin muilla, on punainen kivi hänellä, ja muilla on vihreät kivet. Tällöin ainoa tosi lause on A.

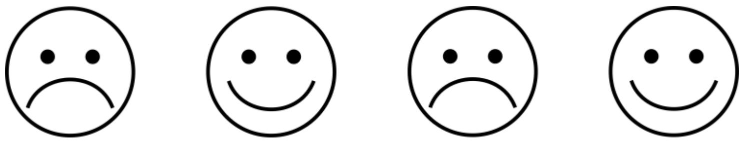
17.

66 kissaa ilmoitettiin MissCissa 2013 -kilpailuun. Ensimmäisen kierroksen jälkeen 21 kissaa pudotettiin jatkosta, koska ne eivät saaneet hiirtä napattua. Jäljelle jääneistä kilpailijoista 27:llä oli raidallinen turkki ja 32:lla oli toinen korva musta. Kaikki kissat joilla oli SEKÄ raidallinen turkki ETTÄ toinen korva musta pääsivät finaaliin. Kuinka monta kissaa vähintään pääsi finaaliin?

(A) 3 (B) 7 (C) 13 **(D)** 14 (E) 27

Ratkaisu: Semifinaaliin pääsi $66 - 21 = 45$ kissaa. Noista 45 kissasta 27:llä oli raidallinen turkki ja 32:lla toinen korva musta. Raidallisten ja mustakorvaisten yhteismäärä $27 + 32 = 59$, mikä ylittää semifinalistien määrän 14:llä. Siten vähintään 14 semifinalisteista oli sellaisia, joilla oli sekä raidallinen turkki että toinen korva musta, ja vähintään nuo 14 pääsivät finaaliin.

18.
Rivissä on kuvan mukaisesti neljä nappulaa. Kahdessa nappulassa on iloinen naama ja kahdessa surullinen. Kun nappulaa painetaan, sen ilme vaihtuu päinvastaiseksi (iloisesta tulee surullinen ja surullisesta iloinen). Tämän lisäksi vierekkäistenkin nappuloiden ilme muuttuu päinvastaiseksi. Mikä on pienin määrä painalluksia, joilla kaikki nappulat saadaan näyttämään iloisilta?



(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Ratkaisu: Jotta oltaisiin yhden painalluksen päässä siitä, että kaikki nappulat ovat iloisia, on oltava tilanteessa, jossa joko oikeassa tai vasemmassa reunassa on 2 tai 3 surunaamaa, ja loput naamat ovat iloisia. Tuohon tilanteeseen ei voida alkutilanteesta päästä yhdellä painalluksella. Siten painalluksia tarvitaan yhteensä vähintään 3.

3 painallusta myös riittää: jos painetaan esimerkiksi ensin oikeanpuoleisinta, sitten toista vasemmalta ja lopuksi toista oikealta, niin kaikki naamat ovat lopuksi hymynaamoja.

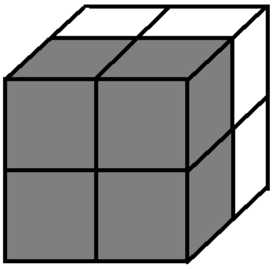
19.
2x2x2-kuutio kasataan neljästä valkoisesta ja neljästä mustasta palikasta. Kuinka monta erilaista kuutiota näistä palikoista voidaan kasata? Kaksi kuutiota on samanlaisia, jos toista kääntelemällä saa toisen.

(A) 16 (B) 9 (C) 8 **(D)** 7 (E) 6

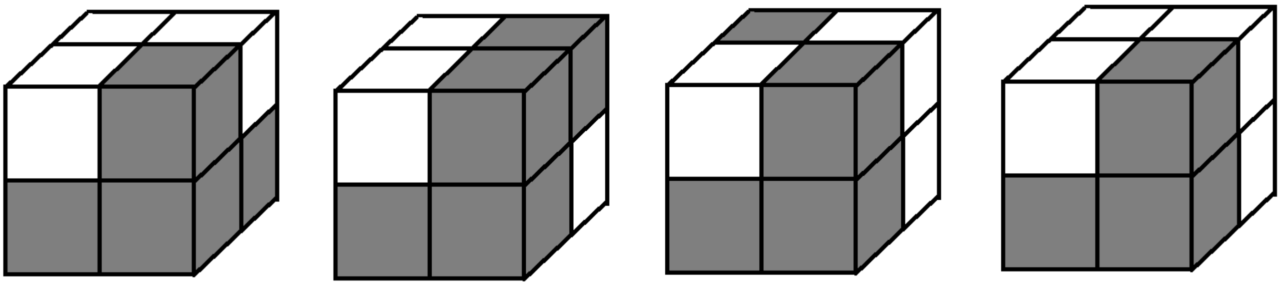
Ratkaisut

Ratkaisu: Luokitellaan kuutiot sen mukaan, kuinka monta mustaa neliötä ”mustimmalla” tahkolla on.

<u>4 mustaa/tahko</u>: 1 tapa

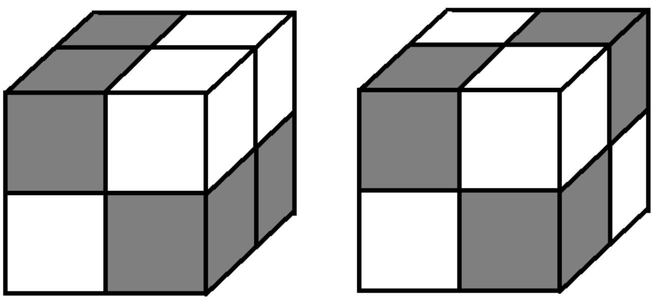


<u>3 mustaa/tahko</u>: 4 tapaa (viimeinen voi olla missä tahansa takatahkolla)



(viimeisessä kohdassa viimeinen musta kuutio piilossa)

<u>2 mustaa/ tahko</u>: 2 tapaa



(oikeanpuolimmaisessa musta kuutio piilossa)

<u>1 tai 0 mustaa/tummin tahko</u>:
ei mahdollista, koska jokaisesta pikkukuutiosta näkyy kolme tahkoa, ja $4 \cdot 3 = 12 > 6$

Erilaisia kuutioita on siis yhteensä 7.

Ratkaisut

20.
Saarella oli 2013 asukasta. Osa asukkaista oli ritareita ja loput kelmejä. Ritarit puhuivat aina totta ja kelmit valehtelivat aina. Joka päivä yksi asukkaista sanoi: ” Lähdettyäni täältä ritareiden ja kelmien lukumäärä saarella on sama.” Tämän jälkeen asukas aina poistui saarelta. 2013 päivän kuluttua saarella ei ollut enää ketään. Kuinka monta kelmiä saarella oli alun perin?

(A) 0 **(B)** 1006 (C) 1007 (D) 2013 (E) Mahdotonta tietää

Ratkaisu: Toiseksi viimeinen lähtijä, neljänneksi viimeinen lähtijä ja kuudenneksi viimeinen lähtijä jne. olivat kelmejä, koska heidän lähtönsä jälkeen asukasluku oli pariton ja näin ollen he valehtelivat.

Viimeisen asukkaan lähdön jälkeen ritareita ja kelmejä oli yhtä paljon (molempia 0 kpl), joten viimeinen lähtijä oli ritari. Sitä edellinen oli kelmi, joten kolmanneksi viimeisen asukkaan lähdön jälkeen kelmien ja ritarien määrä oli sama, joten kolmanneksi viimeinen oli ritari. Neljänneksi viimeinen oli kelmi, joten viidenneksi viimeisen asukkaan lähdön jälkeen kelmien ja ritarien määrä oli sama, joten viidenneksi viimeinen oli ritari. Näin kelmit ja ritarit lähtevät vuorotellen. Viimeinen lähtijä oli ritari ja asukkaita oli alun perin pariton määrä, joten myös ensimmäinen oli ritari. $2013:2 = 1006{,}5$, joten kelmejä oli 1006.

21.
”Vaihtosummakone” tekee lukukolmikosta uuden kolmikon siten, että jokainen uusi luku muodostuu aina kahden muun luvun summasta. Esimerkiksi lukukolmikko (3,4,6) muuttuu vaihtosummakoneessa lukukolmikoksi (10,9,7) ja tämä taas edelleen kolmikoksi (16,17,19). Vaihtosummakoneeseen syötetään lukukolmikko (20,1,3) ja konetta pyöräytetään 2013 kertaa. Mikä on suurin kahden luvun välinen erotus lopullisessa lukukolmikossa?

(A) 1 (B) 2 (C) 17 **(D)** 19 (E) 2013

Ratkaisu: Ensimmäinen lukukolmikko on muotoa $(x+19, x, x+2)$, missä *x* on jokin luku. (Tässä tapauksessa $x = 1$, mutta suurimman erotuksen kannalta luvun *x* arvolla ei ole merkitystä.) Suurin erotus ensimmäisessä lukukolmikossa on $x + 19 - x = 19$.

Toinen lukukolmikko on $(2x+2, 2x+21, 2x+19)$, ja siinäkin suurin erotus on $2x + 21 - (2x+2) = 19$.

Kolmas lukukolmikko on $(4x+40, 4x+21, 4x+23)$, joka on samaa muotoa kuin ensimmäinen; luvun *x* tilalla on nyt vain luku $4x + 21$. Koska kolmas kolmikko on samaa muotoa kuin ensimmäinen, on siinäkin suurin erotus 19, ja lukukolmikkoja tulee vain kahta tyyppiä: joka toinen on samantyyppinen kuin ensimmäinen ja loput samantyyppisiä kuin toinen. Suurin erotus on kaikissa kolmikoissa 19.

Oppilaat voivat toki keksiä muutaman kolmikon laskemalla ilman algebraakin, että suurin erotus on aina 19.