

Oikeat vastaukset on **alleviivattu ja lihavoitu**.

3 pistettä

1.

Pasi aikoo maalata seinälle iskulauseen ELÄKÖÖN KENGURU. Hän haluaa maalata eri kirjaimet aina eri väreillä, samat kirjaimet taas samalla värillä. Kuinka monta eri väriä hän tarvitsee?

- (A) 7 (B) 8 **(C) 9** (D) 10 (E) 13

Ratkaisu:

Eri kirjaimia on 9: E, L, Ä, K, Ö, N, G, U ja R. Värejäkin tarvitaan siis 9.

2.

Neljä kolikkoa mahtuu juuri ja juuri neljästä tulitikusta rakennetun neliön sisälle (katso kuva). Salli rakentaa vastaavanlaisen neliön, johon mahtuu 16 kolikkoa. Kuinka monta tulitikkua hän siihen tarvitsee?



- (A) 8** (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 16

Ratkaisu:

16 kolikkoa muodostaa 4 x 4 –neliön. Kahta kolikon halkaisijaa kohti tarvitaan neliön sivulle yksi tulitikku, joten neljää kolikon halkaisijaa kohti tarvitaan kaksi tikkua. Jokaisella sivulla on kaksi tikkua, joten yhteensä tikkuja on $4 \cdot 2 = 8$.

3.

Lentokoneessa on numeroidut rivit 1 – 25, mutta riviä 13 ei ole ollenkaan. Rivillä 15 on vain 4 matkustajapaikkaa, kaikilla muilla riveillä 6 matkustajapaikkaa. Kuinka monta matkustajapaikkaa koneessa kaikkiaan on?

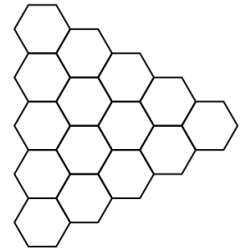
- (A) 120 (B) 138 **(C) 142** (D) 144 (E) 150

Ratkaisu:

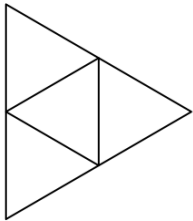
Rivejä on 24 ja paikkoja yhteensä $4 + 23 \cdot 6 = 142$.

4.

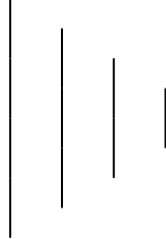
Kuvassa näkyy kuusikulmioista muodostuva kuvio. Millainen uusi kuvio syntyy, kun yhdistetään kaikkien vierekkäisten kuusikulmioiden keskipisteet? (Kuusikulmiot ovat vierekkäisiä, jos niillä on yhteinen sivu.)



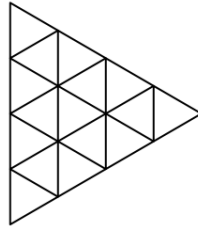
(A)



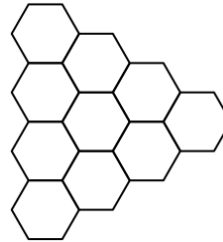
(B)



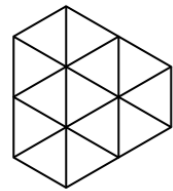
(C)



(D)



(E)



Ratkaisu:

Piirrä!

5.

Kun Lontoossa kello on 4 iltapäivällä, silloin Madridissa kello on 5 iltapäivällä ja samaan aikaan San Franciscossa kello on 8 tuon päivän aamuna. Anna meni nukkumaan San Franciscossa klo 9 eilisiltana. Kuinka paljon kello oli Madridissa tuolla hetkellä?

- (A) kello 6 eilisaamuna (B) kello 6 eilisiltana (C) kello 12 eilen keskipäivällä
(D) kello 12 keskiyöllä (E) kello 6 tänä aamuna

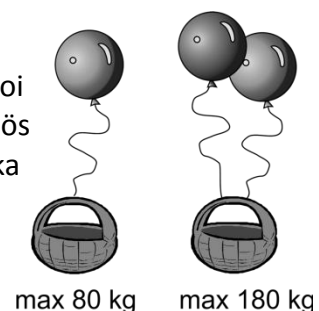
Ratkaisu:

Madridissa kello on enemmän kuin San Franciscossa. Aikaero on tunteina $17 - 8 = 9$. Eilisestä kello yhdeksältä illalla yhdeksän tunnin kuluttua kello on kuusi tänä aamuna.

6.

Yksi ilmapallo pystyy nostamaan ylös tavarakorin, jonka sisältö voi painaa korkeintaan 80 kg. Kaksi samanlaista palloa voi nostaa ylös samanlaisen korin, jonka sisältö voi painaa enintään 180 kg. Kuinka paljon itse kori painaa?

- (A) 10 kg (B) 20 kg (C) 30 kg (D) 40 kg (E) 50 kg



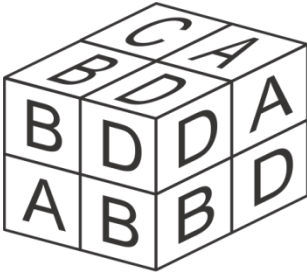
Ratkaisu:

Kun lisätään yksi pallo, kasvaa nostokyky 100 kg. Yksi pallo pystyy siis nostamaan 100 kg, joten kori painaa $100 \text{ kg} - 80 \text{ kg} = 20 \text{ kg}$.



7.

Liisalla on 8 noppaa, joissa on kirjaimia A, B, C ja D. Kussakin nopassa on vain yhtä kirjainta. Liisa rakentaa nopista kuution. Vierekkäin olevissa nopissa on aina eri kirjain, samoin päällekkäin olevissa nopissa. Mikä kirjain on nopassa, jota ei voi nähdä kuvassa?



- (A) A **(B) B** (C) C (D) D (E) mahdotonta sanoa

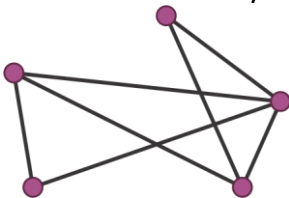
Ratkaisu:

Näkymättömissä olevan nopan yläpuolella on C ja viereisissä nopissa A ja D, joten kirjain voi olla vain B.

4 pistettä

8.

Ihmemaassa on viisi kaupunkia. Kaikki kaupungit yhdistyvät toisiinsa näkyvän tai näkymättömän tien avulla. Ihmemaan kartassa on vain seitsemän näkyvää tietä (katso kuva). Liisalla on taikalasit: kun hän katsoo niillä karttaa, hän näkee vain ne tiet, jotka ovat muuten näkymättömiä. Kuinka monta tällaista näkymätöntä tietä hän voi laseilla nähdä?



- (A) 2 **(B) 3** (C) 7 (D) 8 (E) 9

Ratkaisu:

Jokaisesta viidestä kaupungista kulkee tie neljään muuhun kaupunkiin. Teitä on siis yhteensä $5 \cdot 4 : 2 = 10$. (On jaettava kahdella, koska muuten jokainen tie tulee laskettua kahdesti.) Näkyviä teitä on 7, joten näkymättömiä teitä on $10 - 7 = 3$.

9.

Viivi ja Mika saivat isoäidiltä omenoita ja päärynöitä. Heillä oli korissa yhteensä 25 hedelmää. Kotimatalla Viivi söi yhden omenan ja 3 päärynää, Mika puolestaan söi 3 omenaa ja 2 päärynää. Kotona he huomasiivat, että heillä on omenoita ja päärynöitä yhtä monta. Kuinka monta päärynää isoäiti heille antoi?

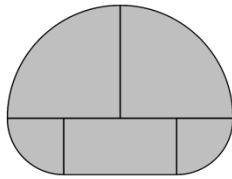
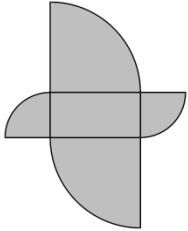
- (A) 12 **(B) 13** (C) 16 (D) 20 (E) 21

Ratkaisu:

Viivi ja Mika söivät matkalla yhteensä 4 omenaa ja 5 päärynää. Koska lopuksi omenoita ja päärynöitä oli yhtä monta, oli päärynöitä aluksi yksi enemmän kuin omenoita. $12 + 13 = 25$, joten omenoita oli 12 ja päärynöitä 13.

10.

Molemmat piirroksen kuvat on muodostettu samanlaisista viidestä palasta. Suorakulmion mitat ovat 5 cm x 10 cm, ja muut palat ovat kahden eri ympyrän neljänneksiä. Kuvioiden piirien ero on



(A) 2,5 cm

(B) 5 cm

(C) 10 cm

(D) 20 cm

(E) 30 cm

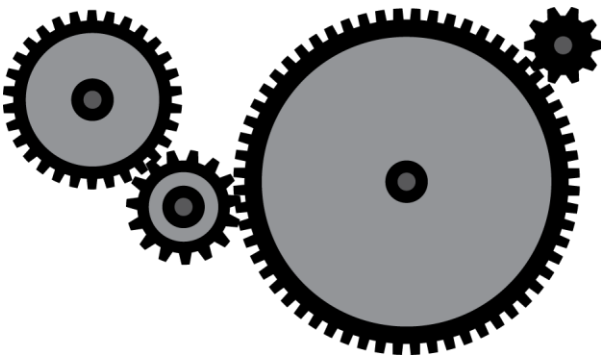
Ratkaisu:

Oikeanpuoleisen kuvion reuna muodostuu neljästä ympyränkaarista ja suorakulmion pitemmästä sivusta. Vasemmanpuoleisen kuvion reunassa on samat ympyränkaaret ja lisäksi kaksi pienen ympyräsektorin sädettä sekä kaksi ison ympyräsektorin sädettä. Ison ympyräsektorin säde on yhtä pitkä kuin suorakulmion pitempi sivu. Siten kuvioiden piirin ero on

kaksi pienen ympyräsektorin sädettä + yksi ison ympyräsektorin säde = $2 \cdot 5 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$.

11.

Neljä hammaspyörää on liitetty toisiinsa kuvan osoittamalla tavalla. Ensimmäisessä pyörässä on 30 hammasta, toisessa 15, kolmannessa 60 ja viimeisessä 10 hammasta. Kuinka monta kierrosta viimeinen hammaspyörä pyörähtää, kun ensimmäinen hammaspyörä pyörähtää yhden kierroksen?



(A) 3

(B) 4

(C) 6

(D) 8

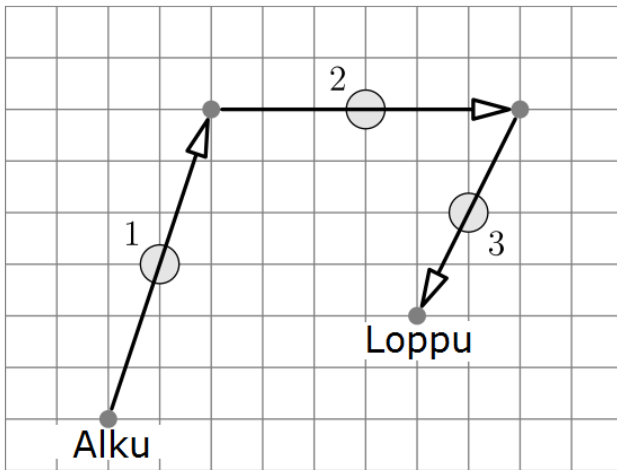
(E) 9

Ratkaisu:

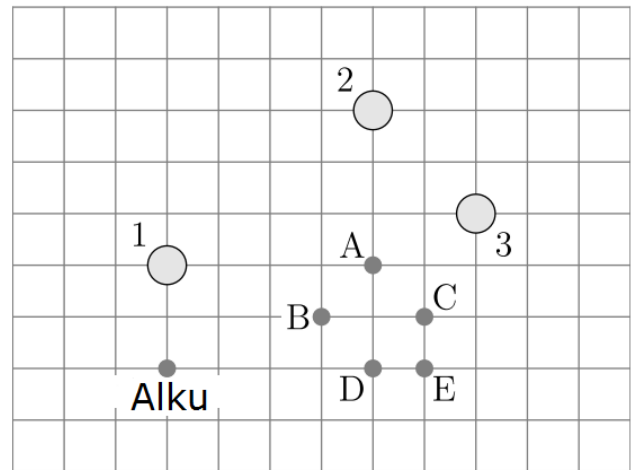
Kun ensimmäinen pyörä pyörähtää yhden kierroksen, niin 30 hammasta osuu seuraavan pyörän hampaaseen. Jokainen hampaan osuminen seuraavaan pyörään välittää vastaavasti liikkeen seuraavaan ja viimeiseenkin pyörään. Koska $30 = 3 \cdot 10$ ja viimeisessä pyörässä on 10 hammasta, on sen pyörähdettävä 3 kertaa, jotta 30 "hampaan osumaa" välittyy perille asti. Välissä olevien pyörien hammasluvuilla ei ole merkitystä.

12.

Kengurut Hip ja Hop leikkivät pomppimista kivien yli. Kengurut tömähtävät maahan pomppun jälkeen siten, että kivi jää täsmälleen hyppyradan puoleen väliin. Kuva 1 osoittaa, kuinka Hop hyppäsi kolme pomppua kivien 1, 2 ja 3 yli. Hipin hyppyradan kivet 1, 2 ja 3 (hypättävä tässä järjestyksessä) sijaitsevat samoin, mutta lähtö on eri paikassa (katso kuva 2). Missä pisteessä (A, B, C, D, E) Hip tömähtää lopuksi maahan?



Kuva 1: Hop



Kuva 2: Hip

(A) A

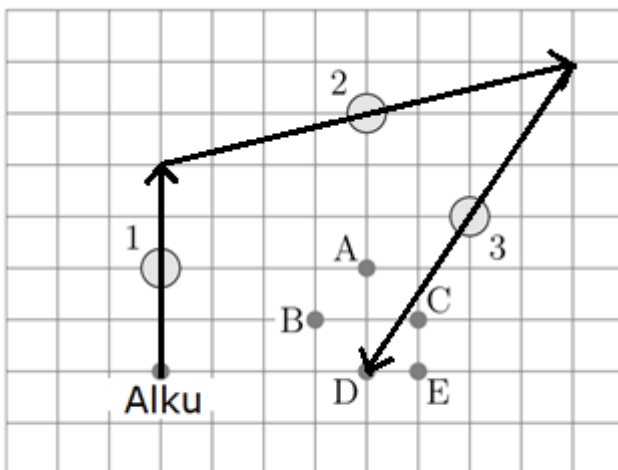
(B) B

(C) C

(D) D

(E) E

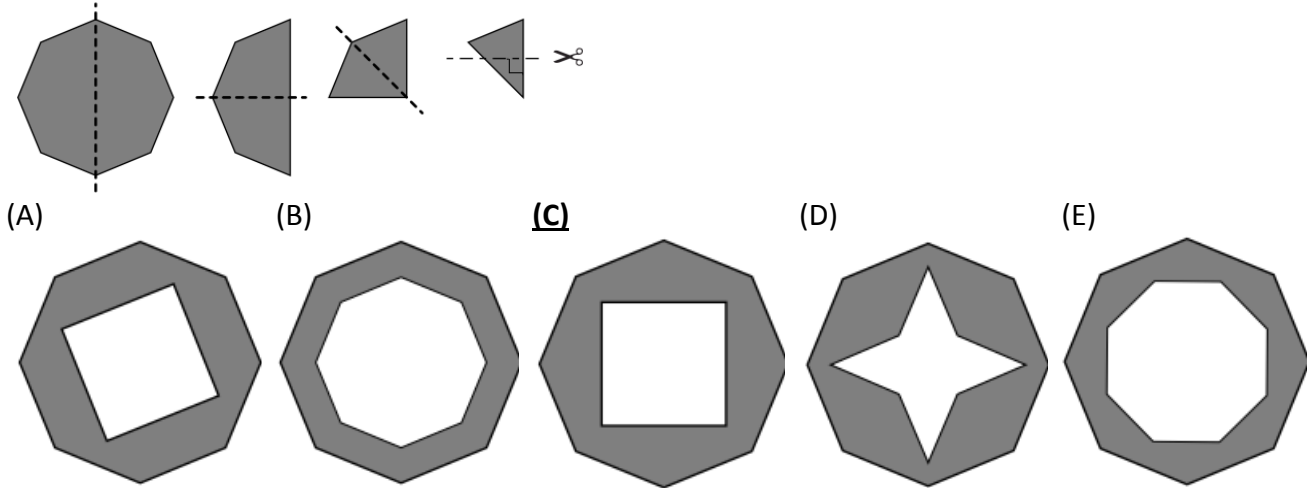
Ratkaisu:



Kuva 2: Hip

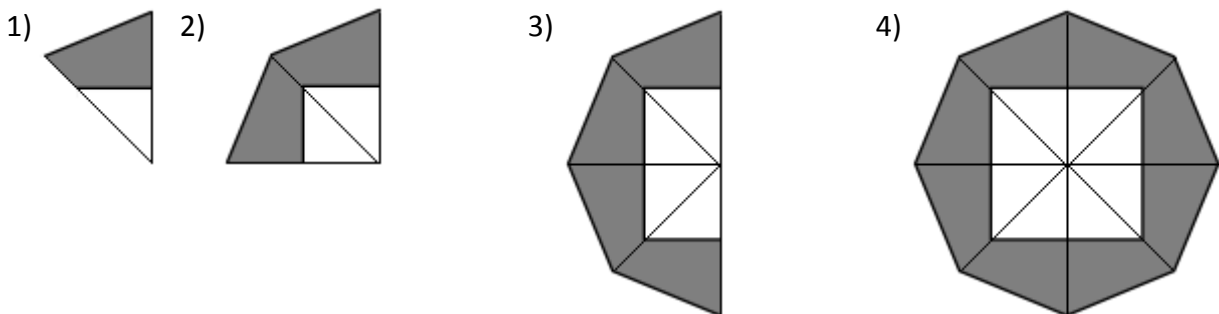
13.

Säännöllinen kahdeksankulmio taitetaan tarkasti puoliksi kolme kertaa kunnes saadaan kolmio kuvan osoittamalla tavalla. Taitoksen sisäkärki leikataan pois suoran kulman avulla, kuten piirros osoittaa. Jos paperin taitokset avataan, miltä kuvio näyttää?



Ratkaisu:

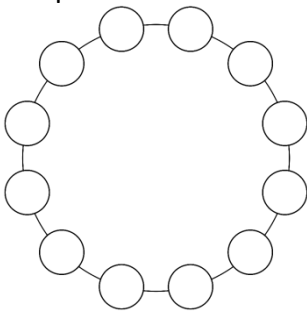
Piirretään kuva jokaisen taitoksen avaamisen jälkeen peilaamalla edellinen kuva taitosviivan suhteen. Punainen viiva on leikkauskohta.



14.

Kenguru haluaa järjestää luvut 1 – 12

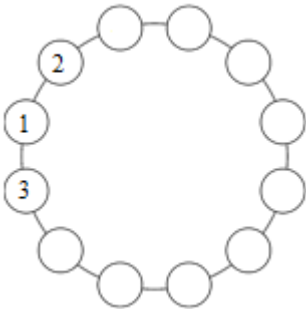
ympyrän kehälle siten, että viereisten lukujen erotus on aina joko 1 tai 2. Mikä seuraavista lukupareista tulee vierekkäin?



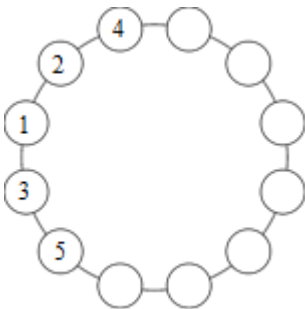
- (A) 5 ja 6 (B) 10 ja 9 (C) 6 ja 7 **(D) 8 ja 10** (E) 4 ja 3

Ratkaisu:

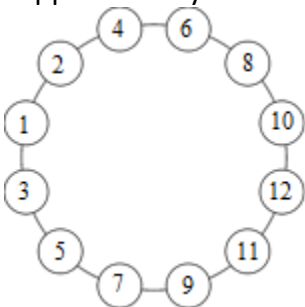
Laitetaan luku 1 johonkin kohtaan. Koska tutkitaan vain vierekkäisyyttä, ei ole väliä mikä kohta valitaan. Luvun 1 ainoat mahdolliset naapurit ovat 2 ja 3, joten toinen tulee toiselle ja toinen toiselle puolelle, ei ole väliä kummin päin. Aloitettiin siis näin:



Luvun 2 ainoat mahdolliset naapurit ovat 1, 3 ja 4, mutta koska 1 ja 3 on jo käytetty, tulee luku 4 luvun 2 viereen. Vastaavasti luvun 3 ainoat mahdolliset naapurit ovat 1, 2, 4 ja 5, joista vain 5 on käyttämättä. Siis 5 tulee 3:n viereen. Nyt on päästy tähän asti:



Jatketaan vastaavasti: luku 6 nelosen viereen, luku 7 viitosen viereen, luku 8 kuutosen viereen jne. Lopputulos näyttää tältä:



Kuvasta nähdään, että luvut 8 ja 10 ovat vierekkäin.



5 pistettä

15.

Syntymäpäivillä oli kaksitoista lasta. Jokainen lapsi oli joko 6, 7, 8, 9 tai 10 vuotta vanha. Kukin ikä oli vähintään yhdellä lapsella. Neljä lapsista oli 6-vuotiaita. Ryhmän yleisin ikä oli 8 vuotta. Mikä oli näiden kahdentoista lapsen ikien keskiarvo?

- (A) 6 (B) 6,5 (C) 7 **(D) 7,5** (E) 8

Ratkaisu:

Koska 6-vuotiaita oli neljä ja 8-vuotiaita on vielä enemmän, on 8-vuotiaita oltava ainakin 5. 6- ja 8-vuotiaita on siis yhteensä vähintään 9. Koska jokainen ikä on ainakin yhdellä lapsella, ei 8-vuotiaita voi olla viittä enempää, sillä muuten joku ikä jäisi puuttumaan. Siis 6-vuotiaita on neljä, 8-vuotiaita viisi ja 7-vuotiaita on yksi, samoin 9- ja 10-vuotiaita on yksi kumpaakin. Ikien summa on siis $4 \cdot 6 + 7 + 5 \cdot 8 + 9 + 10 = 90$ ja keskiarvo $90 : 12 = 7,5$ vuotta.

16.

Positiiviset kokonaisluvut on väritetty punaiseksi, siniseksi ja vihreäksi: 1 on punainen, 2 on sininen, 3 on vihreä, 4 on punainen, 5 on sininen, 6 on vihreä jne. Raisa laskee yhden punaisen luvun ja yhden sinisen luvun summan. Minkä värinen voi tulokseksi saatava luku olla?

- (A) mahdoton sanoa (B) punainen tai sininen **(C) vain vihreä**
(D) vain punainen (E) vain sininen

Ratkaisu:

Punaisesta luvusta jää kolmella jaettaessa jakojäännökseksi 1.
Sinisestä luvusta jää kolmella jaettaessa jakojäännökseksi 2.
Vihreät luvut ovat kolmella jaollisia lukuja.

Kun lasketaan yhteen punainen luku ja sininen luku ja jaetaan summa kolmella, on lopputulos kolmella jaollinen, koska jakojäännösten summa on 3. Siten punaisen ja sinisen luvun summa on vihreä luku.



17.

Kumipallo tippuu talon katolta 10 m korkeudesta pystysuorasti alas. Jokaisen maakosketuksen jälkeen se pomppaa suoraan ylöspäin $\frac{4}{5}$ edellisestä korkeudesta. Kuinka monta kertaa pallo ilmestyy näkyviin sellaisen ikkunan eteen, jonka alareuna on 5 metrin ja yläreuna 6 metrin korkeudessa?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 **(D) 6** (E) 8

Ratkaisu:

Pompun järjestysluku	Pompun korkeus (m)	Kuinka monta kertaa ikkunan edessä tällä pompulla?
0	10	1
1	$10 : 5 \cdot 4 = 8$	2
2	$8 : 5 \cdot 4 = 6\frac{2}{5}$	2
3	$\frac{32}{5} : 5 \cdot 4 = 5\frac{3}{25}$	1
4	alle 5, koska $\frac{4}{5}$ luvusta 5 on 4	0

18.

Petri haluaa leikata suorakulmion, joka on kooltaan 6 x 7, neliöiksi, joiden sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Mikä on pienin määrä neliöitä, jonka hän voi saada?

- (A) 4 **(B) 5** (C) 7 (D) 9 (E) 42

Ratkaisu:

Olipa suurin piirrettävä neliö minkä kokoinen tahansa, kannattaa se piirtää suorakulmion nurkkaan. Tutkitaan kaikki vaihtoehdot järjestämällä ne suurimman piirrettävän neliön koon mukaan.

x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x

Suurin neliö, joka voidaan piirtää suorakulmion sisään, on 6 x 6 –neliö. Jos piirretään sellainen, jää toiseen reunaan 6 kpl 1 x 1 –neliöitä. Neliöitä tulee tällöin yhteensä 7.



x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	

Jos suurin piirrettävä neliö on 5×5 -neliö, jää toiseen reunaan tilaa kolmelle 2×2 -neliölle (1×1 -neliöitä kannattaa piirtää mahdollisimman vähän) ja sitä vastaan kohtisuoraan reunaan viidelle 1×1 -neliölle. Neliöitä tulee tällöin yhteensä 9.

x	x	x	x		
x	x	x	x		
x	x	x	x		
x	x	x	x		

Jos suurin piirrettävä neliö on 4×4 -neliö, niin loppuosa suorakulmiosta käytetään tehokkaimmin piirtämällä toiseen reunaan kaksi 3×3 -neliötä ja sitä vastaan kohtisuoralle reunalle kaksi 2×2 -neliötä. Neliöitä tulee tällöin yhteensä 5.

x	x	x			
x	x	x			
x	x	x			

Jos suurin piirrettävä neliö on 3×3 -neliö, on tehokkainta piirtää lisäksi yksi 3×3 -neliö ja 6 kpl 2×2 -neliöitä, jolloin neliöitä tulee yhteensä 8.

Jos suurin piirrettävä neliö on 2×2 -neliö, on sen pinta-ala 4 yksikköä. Suorakulmion pinta-ala on 42 yksikköä, joten neliöitä on piirrettävä enemmän kuin 10.

Jos suurin piirrettävä neliö on 1×1 -neliö, on piirrettävä 42 neliötä.

Siis 5 neliötä on pienin mahdollinen määrä.



19.

Neliönmuotoisen 4 x 4 taulukon jotkut ruudut väritettiin punaisiksi. Jokaisella rivillä olevien punaisten ruutujen määrä merkittiin rivin loppuun, samoin jokaisessa sarakkeessa olevien punaisten ruutujen määrä merkittiin sarakkeen alle. Sitten punainen väri poistettiin. Mikä seuraavista taulukoista voi olla oikea lopputulos?

					4
					2
					1
					1
(A)	0	3	3	2	

					1
					2
					1
					3
(B)	2	2	3	1	

					3
					3
					0
					0
(C)	1	3	1	1	

					2
					1
					2
					2
(D)	2	1	2	2	

					0
					3
					3
					1
(E)	0	3	1	3	

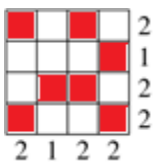
Ratkaisu:

Vaihtoehdossa A ylimmän rivin jokaisen ruudun olisi oltava punainen, mutta kuitenkin vasemmanpuoleisimman sarakkeen yksikään ruutu ei saa olla punainen. Vasemman ylänurkan pitäisi yhtä aikaa olla punainen ja ei-punainen. Siis vaihtoehto A ei ole mahdollinen.

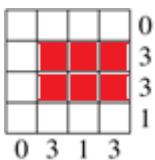
Vaihtoehdossa B sarakkeissa olevien punaisten ruutujen yhteismäärä on $2 + 2 + 3 + 1 = 8$ ja riveillä olevien punaisten ruutujen yhteismäärä on $1 + 2 + 1 + 3 = 7$. Ruudukossa pitäisi olla siis täsmälleen 7 ja täsmälleen 8 punaista ruutua. Siis vaihtoehto B ei ole mahdollinen.

Vaihtoehdossa C on toisessa sarakkeessa vasemmalta oltava kolme punaista ruutua, mutta vain kaksi ylintä ruutua voivat olla punaisia, sillä kahdella alimmalla rivillä ei ole yhtään punaista ruutua. Siis vaihtoehto C ei ole mahdollinen.

Vaihtoehto D onnistuu:



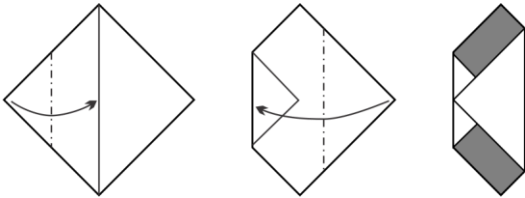
Vaihtoehdossa E on toisella ja kolmannella rivillä kolme punaista ruutua. Koska niitä ei saa laittaa vasemmanpuoleisimpaan sarakkeeseen, on aloitettava seuraavasti:



Nyt kuitenkin toisessa sarakkeessa oikealta on jo kaksi punaista ruutua, vaikka niitä saisi olla vain yksi. Siten vaihtoehto E ei ole mahdollinen.

20.

Neliönmuotoisen paperin pinta-ala on 64 cm^2 . Neliö taitetaan kahdesti kuvan osoittamalla tavalla. Mikä on tummennettujen suorakulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala?



(A) 10 cm^2

(B) 14 cm^2

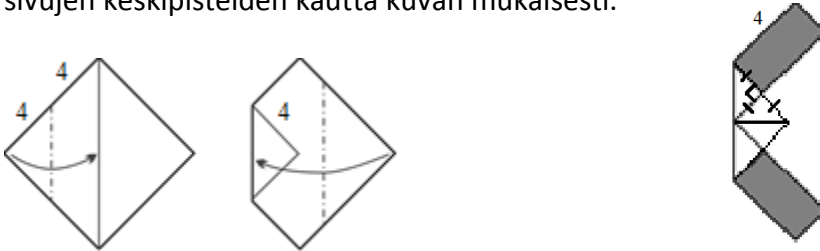
(C) 15 cm^2

(D) 16 cm^2

(E) 24 cm^2

Ratkaisu:

Koska paperin pinta-ala on 64 cm^2 ja $8 \cdot 8 = 64$, on neliön sivun pituus 8 cm . Koska taitettaessa ensimmäisen kerran neliön kärki tulee neliön keskipisteen päälle, on taitosviivan kuljettava neliön sivujen keskipisteiden kautta kuvan mukaisesti.



Kaikki taitoksissa syntyvät kulmat ovat joko 45° tai 90° , joten toisessa taitoksessa syntyvät kuvaan piirretyt kolmiot ovat tasakylkisiä (merkitään yhtä pitkiä sivuja yhtä monella poikkiviivalla). Koska edellisen kuvan mukaan kahden yhdellä poikkiviivalla merkityn sivun yhteispituus on 4 cm ja ne ovat yhtä pitkiä, on yhdellä poikkiviivalla merkityn sivun pituus 2 cm . Siten suorakulmion pinta-ala on $2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$ ja kahden samanlaisen suorakulmion pinta-ala yhteensä $2 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$.



21.

Annan Annille ja Pietarille kaksi peräkkäistä positiivista kokonaislukua (esimerkiksi Annille 7 ja Pietarille 6). He tietävät oman lukunsa ja että heidän lukunsa ovat peräkkäiset, mutta toistensa lukua he eivät tiedä. Sitten kuulen seuraavan keskustelun.

Anni sanoo Pietarille: "En tiedä sinun lukuasi."

Pietari sanoo Annille: "En tiedä sinun lukuasi."

Sitten Anni sanoo Pietarille: "Nyt tiedän sinun lukusi! Sillä voi jakaa luvun 20 tasan."

Mikä on Annin luku?

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Ratkaisu:

Kun Anni sanoo Pietarille, ettei hän tiedä Pietarin lukua, hän tulee samalla myöntäneeksi, että hänen oma lukunsa ei ole 1. Jos hänen lukunsa nimittäin olisi 1, niin hän tietäisi Pietarin luvun olevan 2: luvulla 1 ei ole muita peräkkäisiä positiivisia kokonaislukuja kuin luku 2.

Kun Pietari ymmärtää, ettei Annin luku ole 1 ja sanoo, ettei hän silti tiedä Annin lukua, hän tulee myöntäneeksi, ettei hänen oma lukunsa ole 1 eikä 2. Jos hänen lukunsa nimittäin olisi 1, tilanne olisi sama kuin äsken Annilla. Jos hänen lukunsa olisi 2, niin hän tietäisi Annilla olevan luvun 3: Annihan juuri epäsuorasti myönsi, ettei hänellä ole lukua 1, joka olisi ainoa toinen peräkkäinen luvulle 2.

Kun Anni ymmärtää kaiken edellä sanotun, hän siis tietää oman lukunsa ja sen, ettei Pietarilla ole lukua 1 eikä lukua 2. Koska hän tämän perusteella nyt tietää Pietarin luvun, on hänellä itsellään oltava luku 2 (tällöin hän tietää Pietarin luvun olevan 3, koska se ei ole 1) tai luku 3 (tällöin hän tietää Pietarin luvun olevan 4, koska se ei ole 2). Koska hän tietää, että Pietarin luvulla voi jakaa luvun 20 tasan, on Pietarin luvun oltava 4 eikä 3. Annin luku on siis 3.