Ville Tilvis
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Kombinatorisia pelejä

Kombinatorisella pelillä tarkoitetaan tässä seuraavaa:

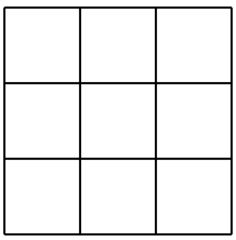
- Pelaajia on kaksi.
- *Vuoropohjaisuus.* Vain yksi pelaaja kerrallaan tekee siirron. Esimerkiksi ristinolla ja Risk ovat vuoropohjaisia, kivi-paperi-sakset ei.
- *Täydellinen informaatio.* Tieto tehdyistä siirroista ja pelitilanteesta on koko ajan kummankin pelaajan nähtävissä. Shakki on täydellisen informaation peli, mutta esimerkiksi pokeri ei, koska pelaajat eivät tiedä toistensa kortteja.
- *Ei satunnaisuutta.* Kunkin siirron vaikutukset ovat tiedossa etukäteen. Kimble ei ole kombinatorinen peli.
- Pelin päätteeksi jompikumpi pelaaja voittaa, tai tulee tasapeli.

Kombinatoriset pelit ovat siis vuoropohjaisia täydellisen informaation pelejä, joissa ei ole satunnaisuutta. Tällaisia pelejä ovat esimerkiksi jätkänshakki, ristinolla, mylly, tammi, neljän suora, othello, owari, Blokus, xiangqi, shakki, shogi, go, kiinanshakki ja Arimaa.

Alla on kokoelma pieniä kombinatorisia pelejä, joilla on useimmilla yksinkertainen voittostrategia joko ensimmäisenä tai toisena pelaavalla. Etsi kyseiset voittostrategiat. Pelejä kannattaa pelata useita kertoja ennen kuin alkaa tarkemmin miettiä. Pelaamalla saa kerrytettyä helposti ja nopeasti kokemusta pelin toiminasta, minkä jälkeen analysointi on helpompaa.

Pelejä analysoitavaksi

Tehtävä 1. Villi ristinolla: Kuten tavallinen ristinolla 3×3-ruudukolla, mutta vuorollaan voi piirtää joko ristin tai nollan mielensä mukaan.



Voittaja on se, joka muodostaa kolmen suoran, jossa on vain yhtä merkkiä. Pelaajia on kaksi. Kummalla on voittostrategia?

Tehtävä 2. Kayles (Keksinyt Henry Dudeney 1908) [3].
Kadulla on rivissä 13 keilaa. Kaksi kilpailijaa kaatavat vuorotellen keiloja pallolla. Keilat ovat sellaisella etäisyydellä, että pallo voi kaataa yhden keilan tai kaksi vierekkäistä. Viimeisen keilan kaatanut voittaa. Kenellä on voittostrategia?

Kuva teoksesta The Canterbury Puzzles (1908), [3]

Yleistä myös tilanteeseen, jossa keiloja on n kappaletta.

Tehtävä 3. Paperille piirretään ympyrä, jonka halkaisija on 3. Kaksi pelaajaa piirtää vuorollaan tämän ympyrän sisään pienen ympyrän (halkaisija 1), joka ei saa olla aiempien pienten ympyröiden päällä. Viimeisen sallitun ympyrän piirtäjä voittaa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia? Kaikki ympyrät saavat sivuta toisiaan.

Tehtävä 4. Pöydällä on 10 hammastikkua. Pelaajat (joita on kaksi) ottavat vuorotellen joko yhden tai kaksi tikkua. Viimeisen tikun ottaja voittaa. Ratkaise peli.

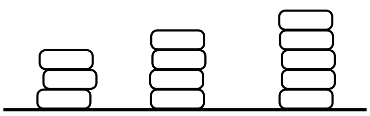
Tehtävä 5. Kuten edellä, mutta viimeisen tikun ottaja häviää.

Tehtävä 6. Kuten tehtävä 4, mutta tikkuja on 16 ja tikkuja saa ottaa 1 – 3 kappaletta kerralla.

Tehtävä 7. Kuten tehtävä 4, mutta tikkuja on n kpl ja tikkuja saa ottaa $1 - k$ kappaletta kerralla.

Tehtävä 8. Kasassa on 30 tikkua ja pelaajat ottavat vuorollaan 1 – 9 tikkua. On kiellettyä ottaa samaa määrää kuin toinen pelaaja edellisellä siirrollaan. Viimeisen laillisen siirron tekijä voittaa.

Tehtävä 9. Nim, perusversio. Pöydällä on kolme kasaa kiviä: 3, 4 ja 5 kiven pinot.



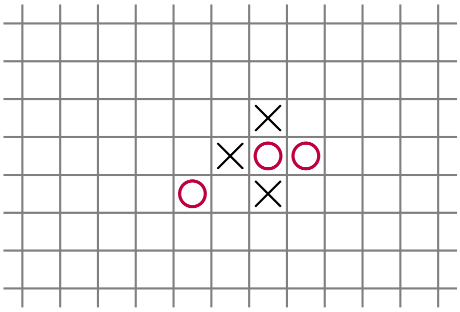
Kaksi pelaajaa vuorottelee ottamalla yhdestä kasasta niin monta kiveä kuin haluaa, kuitenkin vähintään yhden. Viimeisen kiven saaja voittaa. Miten pitäisi pelata?

Tehtävä 10. Suklaapeli. Suorakulmion muotoisessa suklaalevyssä nurkkapalassa torakka. Pelaajat murtavat vuorollaan levyn kahteen osaan jotakin palojen välistä suoraa viivaa pitkin ja syövät sen puolen, jossa torakka ei ole. Häviäjä on se, jolla jää käteen viimeinen pala (hän joutuu syömään torakan).

Tehtävä 11. Pelilautana on $n \times n$-šakkilauta. Pelin alussa joka ruudulla on 99 kiveä. Pelaajat A ja B valitsevat vuorotellen jonkin laudan vaaka- tai pystyrivin ja poistavat jokaisesta valitun rivin ruudusta yhden kiven. Pelaaja saa valita sellaisen rivin, jonka jokaisessa ruudussa on ainakin yksi kivi. Se pelaaja, joka ei voi valita tällaista riviä, häviää pelin. Pelaaja A aloittaa. Määritä kaikki ne luvut n, joilla hänellä on voittostrategia.

Tehtävä 12. Enkeli ja Paholainen (John Conway, 1982) [2]. Äärettömällä shakkilaudalla on enkeli, joka liikkuu kuin shakkikuningas. Jokaisen siirron jälkeen Paholainen poistaa laudalta yhden ruudun, jossa enkeli ei sillä hetkellä ole. Enkeli ei voi siirtyä poistettuihin ruutuihin. Voiko Paholainen saada enkelin kiinni, eli rajattua äärellisen kokoiselle saarelle, jonka kaikki reunaruudut on poistettu?

Strategian varastus -argumentti



Joissakin peleissä on selvää, ettei toisena pelaava voi voittaa, jos aloittaja pelaa täydellisesti. Esimerkiksi äärettömällä laudalla pelatussa ristinollassa toisena pelaavalla ei voi olla pakottavaa voittostrategiaa. Jos nimittäin olisi, aloittaja voisi ”varastaa” sen pelaamalla ensin johonkin satunnaiseen ruutuun ja siirtymällä sitten käyttämään toisen pelaajan voittostrategiaa. Jos voittostrategia jossakin vaiheessa vaatisi pelaamaan ruutuun, johon aloittaja on jo aiemmin pelannut, hän voisi tehdä uuden satunnaisen siirron.

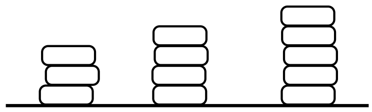
Toisena pelaavalla ei siis voi olla äärettömässä ristinollassa pakottavaa voittostrategiaa, koska aloittaja voisi käyttää sitä ensin. Tämä argumentti ei vielä kerro, päättyykö peli aloittajan voittoon vai tasapeliin.

Tehtävä 13. Shakin sääntöjä muutetaan niin, että ensin valkoinen siirtää kahdesti, sitten musta kahdesti ja niin edelleen. Osoita, että mustalla ei ole voittostrategiaa.

Tehtävä 14. **Chomp** on suklaapelin alkuperäinen sääntöversio (David Gale, 1974) [4]. Suorakulmaisen suklaalevyn vasemmassa alanurkassa on torakka. Pelaajat valitsevat vuorotellaan yhden palan levystä ja syövät sen sekä kaikki palat valitun palan ylä- ja oikealta puolelta. Se pelaaja häviää, joka joutuu syömään torakan.
(A) Osoita, että ensimmäisenä pelaavalla on aina voittostrategia, kunhan paloja on enemmän kuin yksi.
(B) Ratkaise Chomp 2×2, 2×3, 3×3 ja 3×4-suklaalevyillä.

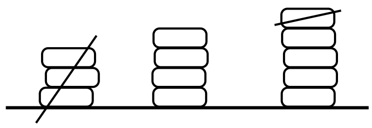
Nim-peli ja sen ratkaisu

Nim on satoja vuosia vanha kombinatorinen peli, johon löytyy mielenkiintoinen voittostrategia ilman, että koko pelipuuta täytyy käydä läpi. Pelin säännöt on yksinkertaiset: Pöydällä on kasoja, joissa on esineitä, esimerkiksi kolmessa kasassa kolme, neljä ja viisi esinettä.



Pelaajia on kaksi, ja he ottavat vuorotellen itselleen niin monta esinettä kuin haluavat, mutta vain yhdestä kasasta kerrallaan. Voittaja on se, joka saa viimeisen esineen.

Peliä analysoidessa löytää varsin nopeasti hyviä ja huonoja strategioita. Esimerkiksi kokonaisen pinon ottaminen ei kannata, jos vastaustaja voi tasata kaksi muuta pinoa yhtä korkeiksi. Kahdesta tasakorkuisesta pinosta toisena ottava voi tämän jälkeen peilata ensimmäisenä ottavan siirrot ja saada varmasti viimeisen esineen.



Charles Bouton keksi Nimin yleisen ratkaisun vuonna 1901 [1]. Se on varsin ovela. Tarkastellaan esimerkiksi peliä, jossa on neljässä kasassa 18, 17, 13 ja 4 esinettä. Aluksi jokaisen kasan esineiden lukumäärä esitetään luvun 2 eri potenssien (1, 2, 4, 8, 16, ...) summana. Esimerkiksi $18 = 16+2$ ja $13 = 8+4+1$. Jokaisen luvun voi esittää näin vain yhdellä tavalla. Taulukoidaan, mitkä kakkosen potenssit lukujen esittämiseen tarvitaan. Tämä vastaa lukujen 18, 17, 13 ja 4 esittämistä binäärilukuina. Lopuksi lasketaan, onko kutakin kakkosen potenssia yhteensä pariton (1) vai parillinen määrä (0).

	16	8	4	2	1
18	1	0	0	1	0
17	1	0	0	0	1
13		1	1	0	1
4			1	0	0
yht.	0	1	0	1	0

Saatu luku 01010 (eli 1010, alun nollalla ei ole merkitystä) on peli nim-numero eli *nimero*. Mikä tahansa siirto muuttaa pelin nimeroa, sillä ainakin jossakin sarakkeessa yksi luku muuttuu. Voittostrategia on muuttaa joka siirrolla pelin nimeroksi 0.

Nimeron muuttamista varten etsitään korkein luvun 2 potenssi, jota esiintyy pariton määrä (esimerkissä se on 8). Otetaan jokin luvuista, joissa kyseinen potenssi esiintyy ja vähennetään siitä niin, että lopuksi jokaista kakkosen potenssia on parillinen määrä. Esimerkkipelissä ainoa vaihtoehto on vähentää luvusta 13. Jotta jokaiseen sarakkeeseen tulisi parillinen määrä ykkösiä, luvun 13 rivillä pitäisi lukea 00111. Haluttu luku on siis $4+2+1 = 7$, eli aloittaja pitää vähentää 13 esineen pinosta 6 esinettä. Saadaan seuraava tilanne.

	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
18	1	0	0	1	0
17	1	0	0	0	1
7			1	1	1
4			1	0	0
yht.	0	0	0	0	0

Toisena pelaava saa eteensä tilanteen, jonka nimero on 0. Minkä siirron hän tekeekin, nimero ei hänen jäljiltään ole enää 0. Aloittaja puolestaan muuttaa omalla siirrollaan nimeron taas nollaksi. Esineet loppuvat aikanaan, ja koska tyhjän pöydän nimero on 0, aloittaja saa viimeisen esineen ja voittaa.

Jos pelin nimero on nolla heti pelin alussa, roolit kääntyvät. Aloittajan siirron jälkeen nimero ei voi olla nolla, joten toisena pelaava voi pakottaa vuorollaan nimeron takaisin nollaksi. Aloittaja häviää.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 15. Nim-pelissä on 3, 4 ja 5 kiven pinot. Mikä on voittava aloitussiirto? Miten peli voisi edetä?

Tehtävä 16. Nim-pelissä on 43, 35 ja 8 kiven pinot. Miten kannattaa pelata? Kuka voittaa?

Tehtävä 17. Tutki suklaapelin (tehtävä 10) versiota, jossa torakka ei olekaan nurkassa vaan jossakin muussa palassa. Mikä on voittostrategia? Miksi peli on sukua Nim-pelille?

Viitteet

[1] BOUTON, C.: *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Mathematics, 3 (1901 - 1902), 35–39.

[2] BERLECAMP, E., J.H.CONWAY ja R. K. GUY: *Winning Ways for Your Mathematical Plays, vol 3*, AK Peters, 2003.

[3] DUDENEY, H. E.: *The Canterbury Puzzles*, Project Gutenberg, `https://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm`. Luettu 3.12.2021.
Julkaistu alun perin 1908.

[4] GALE, D.: *A curious Nim-type game*, The American Mathematical Monthly, 81 (1974), 876–879.

[5] GARDNER, M.: *Nim and Tac Tix*, artikkeli kirjassa [6], 151–161.

[6] GARDNER, M.: *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, Simon and Schuster, 1959.

[7] KLOSTER, O.: *A solution to the angel problem*, Theoretical Computer Science, 389 (2007), 152—161.

[8] MÁTHÉ, A.: *The Angel of power 2 wins*, Combinatorics, Probability and Computing 16 (2007), 363-–374.

[9] SUOMEN MATEMAATTINEN YHDISTYS: *Pohjoismainen matematiikkakilpailu.* `https://matematiikkakilpailut.fi/PM`