Ville Tilvis
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio
Översättning av Nelly Schröder, Åbo Akademi

Kombinatoriska spel

Med kombinatoriska spel menas följande:

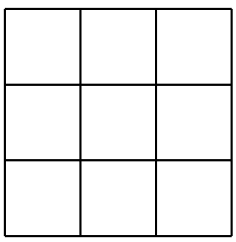
- Vi har två spelare.
- *Turbasering.* Endast en spelare i taget gör sitt drag. Till exempel tre i rad och risk är turbaserade spel, sten-sax-påse är inte turbaserat.
- *Fullständig information.* Informationen om de gjorda dragen och den rådande spelsituationen är alltid synlig för båda spelarna. Schack är ett spel med fullständig information, men till exempel poker är inte det, eftersom spelarna inte vet varandras kort.
- *Ingen slumpmässighet.* Man vet på förhand påverkan av varje drag. Kimble är inte ett kombinatoriskt spel.
- Spelet slutar med att någondera spelare vinner, eller så blir det oavgjort.

Kombinatoriska spel är alltså turbaserade spel med fullständig information och som inte har slumpmässigheter. Såna här spel är till exempel luffarschack, tre i rad, kvarnspel, damspel, fyra i rad, othello, oware, blokus, xiangqi, schack, shogi, go, kinaschack och arimaa.

Nedanför finns en samling av små kombinatoriska spel, största delen av dem har en enkel vinnande strategi antingen för spelaren som gör första draget eller för den som gör andra draget. Din uppgift här är att hitta de vinnande strategierna för spelen. Det lönar sig att spela spelen flera gånger före man börjar fundera noggrannare. Genom att spela får man snabbt och lätt samlat erfarenhet av hur spelen fungerar, och efter det är det lättare att analysera spelet.

Spel att analysera

Uppgift 1. Vild tre i rad: Som en vanlig tre i rad 3×3-ruta, men på sin tur kan man rita antingen en nolla eller ett kryss enligt eget tycke.



Vinnaren är den som får tre i rad av samma symbol. Det är två spelare. Vilkendera har en vinnande strategi?

Uppgift 2. Kayles (Uppfunnits av Henry Dudeney 1908) [3].
På gatan står 13 käglor. I tur och ordning fäller två tävlande käglor med en boll. Käglorna står på ett sådant avstånd från varandra att bollen kan fälla antingen en kägla eller två käglor som står brevid varandra. Den som fäller sista käglan vinner. Vem har den vinnande strategin?

En bild av verket The Canterbury Puzzle (1908), [3]

Kan du lösa spelet i situationen där det finns n stycken käglor, och n får vara vilket positivt heltal som helst?

Uppgift 3. På ett papper ritar man en cirkel med diametern 3. Två spelare ritar i tur och ordning en liten cirkel med diameter 1 in i den den ursprungliga cirkeln, utan att överlappa någon av de redan tidigare ritade små cirklarna. Den som ritar den sista lilla cirkeln har vunnit. Vilkendera spelare har en vinnande strategi? Alla cirklar får vidröra varandras kanter.

Uppgift 4. På bordet finns 10 stycken tandpetare. Spelarna (som det finns två stycken av) tar i tur och ordning antingen en eller två tandpetare. Den som tar den sista tandpetaren vinner. Lös spelet.

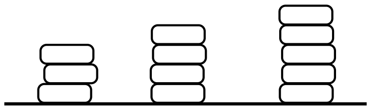
Uppgift 5. Lika som föregående uppgift, men den som tar sista tandpetaren förlorar.

Uppgift 6. Lika som uppgift 4, men det finns 16 tandpetare och man får ta 1 till 3 stycken åt gången.

Uppgift 7. Lika som uppgift 4, men det finns n stycken och man får ta 1 till k stycken tandpetare åt gången. Här får n och k var vilka heltal som helst, sådana att $1 \leq k < n$.

Uppgift 8. I högen finns 30 tandpetare och båda spelarna får ta 1 till 9 tandpetare på sin tur. Det är förbjudet att ta samma antal tandpetare som den andra spelaren tog på sin föregående tur. Den som gör det sista tillåtna draget vinner.

Uppgift 9. Nim, grundversion. På bordet finns tre stenhögar med 3, 4 och 5 stenar;



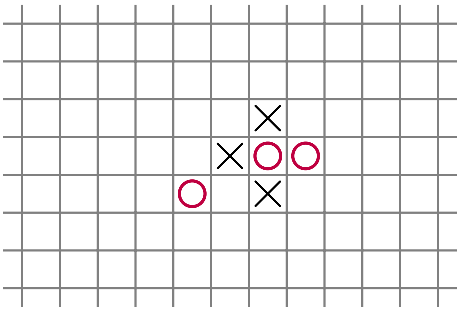
Två spelare tar i tur och ordning så många stenar de vill från en av högarna, minst en sten. Den som får den sista stenen vinner. Hur borde man spela?

Uppgift 10. Chokladspelet. En chokladplatta i form av en rektangel har en kackerlacka i ena hörnbiten. I tur och ordning bryter spelarna plattan i två delar längs med strecken mellan bitarna, och äter den delen som inte har kackerlackan i sig. Den spelare förlorar som blir kvar med den sista biten, och hen måste då äta kackerlackan.

Uppgift 11. Som spelplan har vi ett $n \times n$-schackbräde. I början av spelet finns det 99 stenar på varje ruta. Spelarna A och B väljer i tur och ordning någon våg- eller lodrät rad och tar sedan bort en sten från varje ruta. Spelaren får välja en rad, där det i varje ruta finns minst en sten. Den spelare som inte kan välja en sådan rad, förlorar spelet. Spelare A börjar. Bestäm alla de tal n, då spelare A har en vinnande strategi.

Uppgift 12. Ängeln och Djävulen (John Conway, 1982) [2]. Ett oändligt shackbräde har en ängel, som rör sig som en schackkung. Efter varje drag tar djävulen bort en ruta, som ängeln inte är på just då, från schackbrädet. Ängeln kan inte flytta sig till en raderad ruta. Kan djävulen få fast änglen, dvs. stänga in ängeln på en ö?

Strategistöldsargumentet



I vissa spel är det klart att den andra spelaren inte kan vinna, ifall den första spelaren spelar perfekt. Till exempel i tre i rad, ifall man spelar på en ändlös plan, kan den andra spelaren inte ha en övertygande vinnande strategi. Ifall det var möjligt, så kunde den första spelaren ”stjäla” strategin genom att först spela i någon slumpmässig ruta och sedan spela enligt den andra spelarens vinnande strategi.

Den andra spelaren kan alltså inte ha en övertygande vinnande strategi i ett oändlig tre i rad, eftersom den som börjar kan använda strategin först. Det här argumentet berättar ändå inte ifall spelet skulle sluta i att den som börjar vinner, eller ifall spelet blir oavgjort.

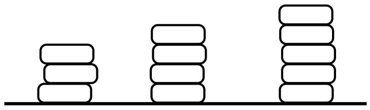
Uppgift 13. Vi ändrar på reglerna i schack på det sättet, att först gör vit två drag, och sedan svart två drag och så vidare. Visa att svart inte har en vinnande strategi.

Uppgift 14. Chomp är de ursprungliga reglerna till chokladspelet (David Gael, 1974) [4]. I den rektangulära chokladplattans vänstra nedre hörn ligger en kackerlacka. Spelarna väljer i tur och ordning en bit från chokladplattan och äter den, tillsammans med alla bitar ovanför och till höger om den valda biten. Den spelare förlorar som blir tvungen att äta kackerlackan.
(A) Visa, att den spelare som börjar alltid har en vinnande strategi, så länge det finns fler än en bit kvar.
(B) Lös Chomp med chokladplattor av storlek 2×2, 2×3, 3×3 och 3×4.

Diskussion av nim och dess lösning

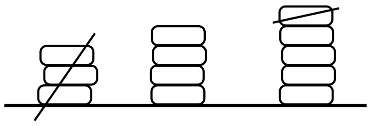
Nim

är ett flera hundra år gammalt kombinatoriskt spel med en intressant vinnande strategi som inte kräver att man går igenom hela spelträdet. Spelets regler är enkla: På bordet finns högar av föremål, till exempel tre högar med tre, fyra och fem föremål.



Det finns två spelare, som i tur och ordning tar så många föremål de vill, men endast från en hög i taget. Vinnaren är den som tar det sista föremålet.

Då man analyserar spelet hittar man ganska snabbt bra och dåliga strategier. Till exempel lönar det sig inte att ta en hel hög, ifall motståndaren kan jämna ut de två kvarstående högarna så att de har lika många föremål var. Börjandes från två lika stora högar kan den andra spelaren spegla den första spelarens drag så att den andra spelaren säkert får det sista föremålet.



Charles Bouton upptäckte nims allmänna lösning år 1901 [1].

Lösningen är rätt så listig. Vi tar som exempel ett spel, där det i fyra högar finns 18, 17, 13 och 4 föremål. I början representerar vi antalet föremål i varje hög som en summa av potenser av två (1, 2, 4, 8, 16, ...). Till exempel är $18 = 16+2$ och $13 = 8+4+1$. Varje tal kan representeras på det här sättet endast på ett vis. Vi gör en tabell av vilka tvåans potenser som behövs för vilket tal. Detta motsvarar talen 18, 17, 13 och 4 i binär form. Till slut räknar vi om antalet gånger varje enskild potens förekommer, är udda (1) eller jämn(0).

	16	8	4	2	1
18	1	0	0	1	0
17	1	0	0	0	1
13		1	1	0	1
4			1	0	0
sum.	0	1	0	1	0

Talet 01010 som fås på det här sättet (alltså 1010, den första nollan har ingen betydelse) är spelets nim-nummer, dvs. *nimmer*. Alla drag ändrar på spelets nimmer, eftersom någon siffra förändras i tabellen. Den vinnande strategin är att på varje drag ändra nimmret till 0.

För att ändra på nimmret söker vi den högsta potensen av 2 som förekommer udda gånger (i exemplet är det 8). Vi tar ett av de talen där den ifrågavarande potensen förekommer och subtraherar från det på det viset att till slut är antalet av varje potens jämnt. I exempelspelet är det enda alternativet att subtrahera från talet 13. För att varje kolumn ska ha ett jämnt antal ettor, borde det stå 00111 på rad 13. Det sökta talet är alltså $4+2+1 = 7$, alltså den som börjar ska subtrahera 6 stycken föremål från högen med 13 föremål. Vi får följande situation:

	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
18	1	0	0	1	0
17	1	0	0	0	1
7			1	1	1
4			1	0	0
sum.	0	0	0	0	0

Den andra spelaren får framför sig en situation vars nimmer är 0. Oberoende vilket drag personen gör, kommer nimmret efteråt inte mera vara 0. Den första spelaren ändrar sedan på sin tur nimmret tillbaka till noll. Föremålen tar slut med tiden, och eftersom det tomma bordets nimmer är 0, kommer den första spelaren att få det sista föremålet och vinna.

Ifall spelets nimmer är noll genast i början av spelet, gäller omvända roller. Efter den första spelarens drag kan nimmret inte vara noll mer, så den andra spelaren kan då ändra nimmret till noll igen på sin tur. Den spelare som börjar förlorar.

Övningsuppgifter

Uppgift 15. I nim finns högar med 3, 4 och 5 föremål. Vad är det vinnande startdraget? Hur kunde spelet fortsätta?

Uppgift 16. I nim finns högar med 43, 35 och 8 stenar. Hur lönar det sig att spela? Vem vinner?

Uppgift 17. Undersök versionen av chokladspelet (uppgift 10), där kackerlackan inte är i hörnet utan i någon annan bit. Vilken är den vinnande strategin? Varför är spelet besläktat med Nim-spelet?

Referenser

[1] BOUTON, C.: *Nim, a game with a complete mathematical theory,* Annals of Mathematics, 3 (1901 - 1902), 35–39.

[2] BERLECAMP, E., J.H.CONWAY ja R. K. GUY: *Winning Ways for Your Mathematical Plays, vol 3,* AK Peters, 2003.

[3] DUDENEY, H. E.: *The Canterbury Puzzles,* Project Gutenberg, `https://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm`. Läst 3.12.2021. Ursprungligen publicerad 1908.

[4] GALE, D.: *A curious Nim-type game,* The American Mathematical Monthly, 81 (1974), 876–879.

[5] GARDNER, M.: *Nim and Tac Tix,* artikel i boken [6], 151–161.

[6] GARDNER, M.: *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions,* Simon and Schuster, 1959.

[7] KLOSTER, O.: *A solution to the angel problem,* Theoretical Computer Science, 389 (2007), 152—161.

[8] MÁTHÉ, A.: *The Angel of power 2 wins,* Combinatorics, Probability and Computing 16 (2007), 363-–374.

[9] SUOMEN MATEMAATTINEN YHDISTYS: *Pohjoismainen matematiikkakilpailu.* `https://matematiikkakilpailut.fi/PM`