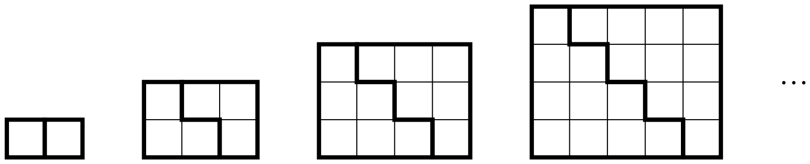
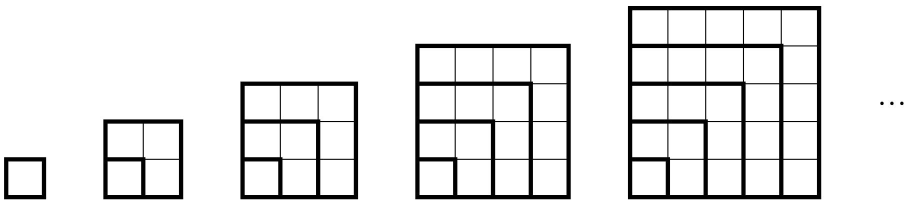
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Identiteettejä kuvien avulla

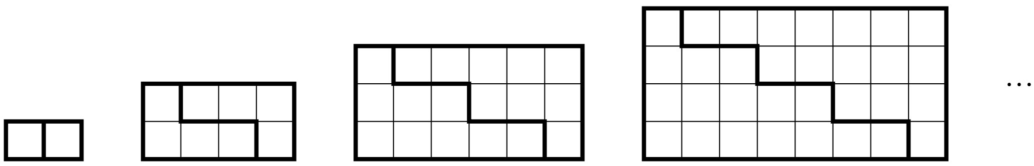
Tehtävä 1.



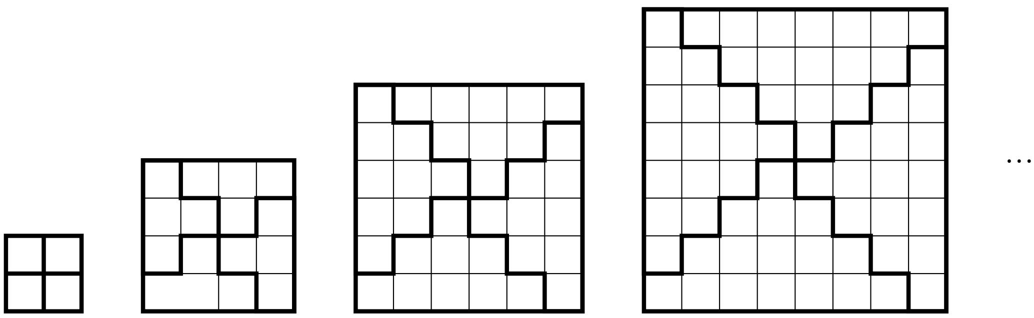
Tehtävä 2.



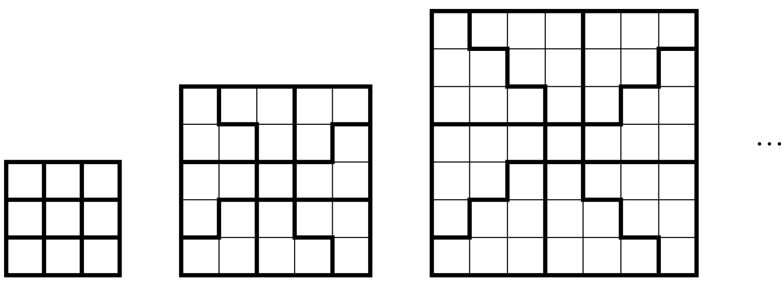
Tehtävä 3.



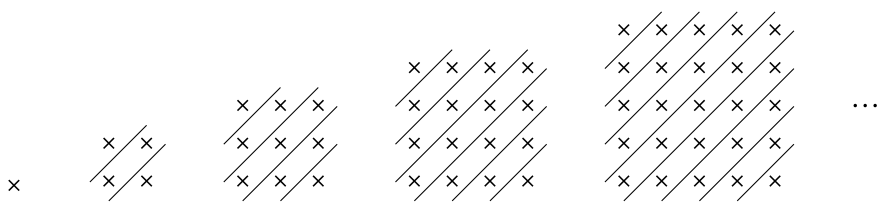
Tehtävä 4.



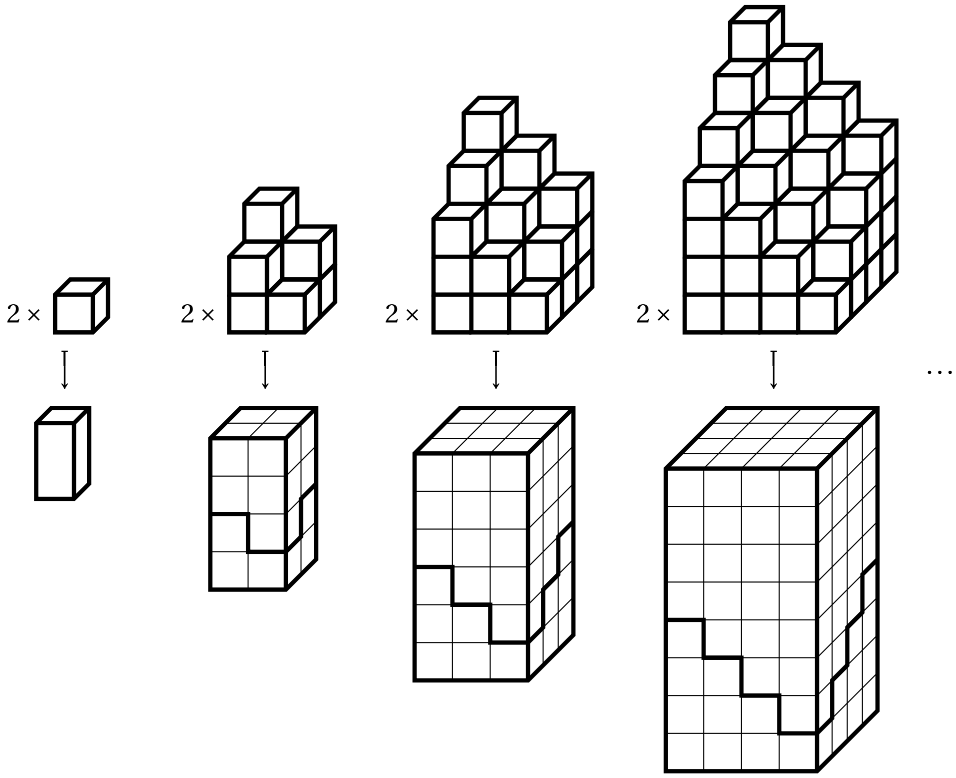
Tehtävä 5.



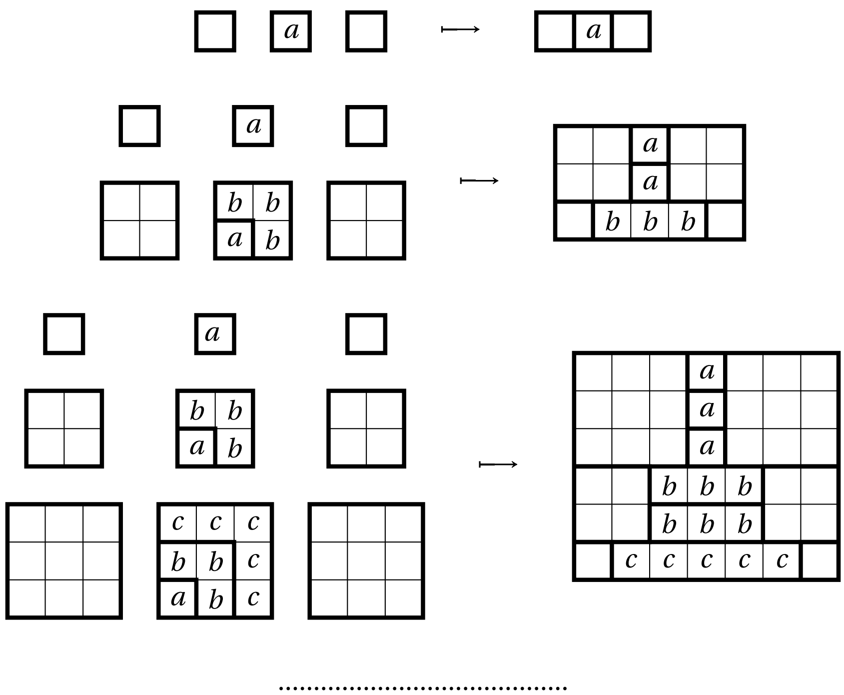
Tehtävä 6.



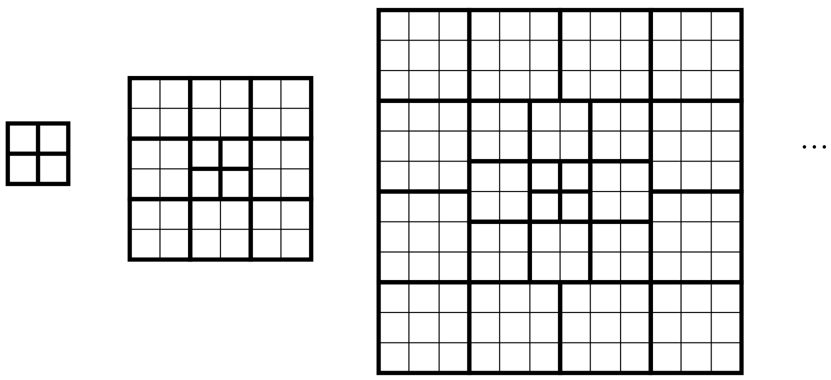
Tehtävä 7.



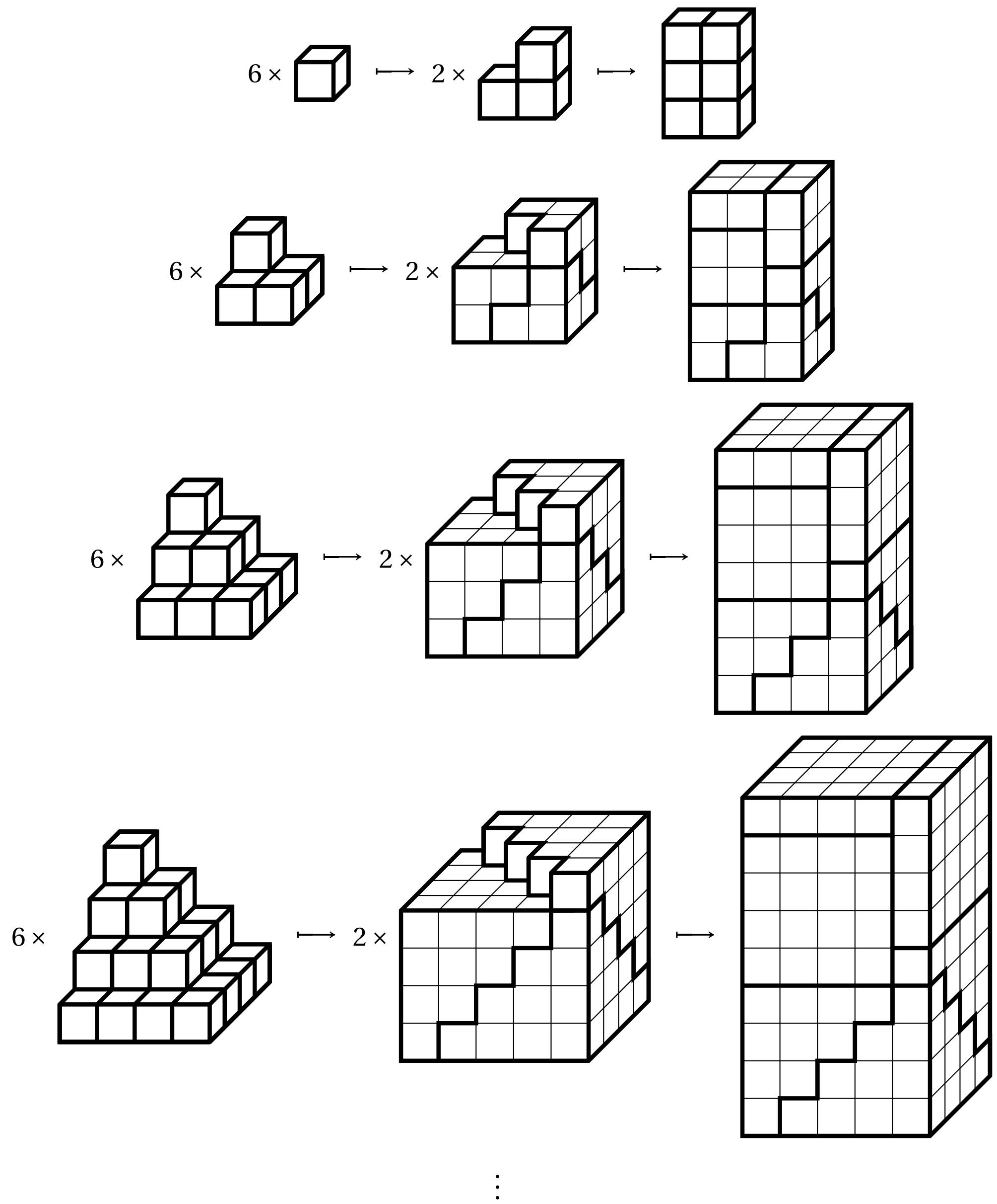
Tehtävä 8.



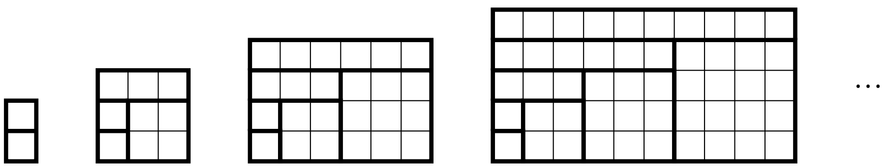
Tehtävä 9.



Tehtävä 10.

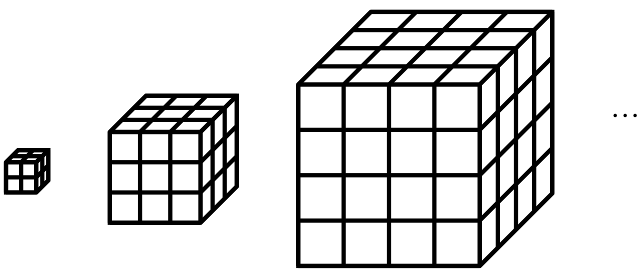


Tehtävä 11. Millaisen identiteetin seuraavista kuvioista voi päätellä neliöluvuille 1^2, 2^2, 3^2, …, sekä kolmioluvuille 1, $1+2$, $1+2+3$, …? Millaisen identiteetin voisi sitten johtaa neliöiden summille 1^2, 1^2+2^2, $1^2+2^2+3^2$, …?



Tehtävä 12. Kuvassa alla on 1-särmäisistä kuutioista koostuva 2-särmäinen kuutio, 2-särmäisistä kuutioista koostuva 6-särmäinen kuutio, ja 3-särmäisistä kuutioista koostuva 12-särmäinen kuutio. Mitä voit päätellä kuvioista, kun tiedetään, että positiivisille kokonaisluvuille n pätee

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2?$$



Tehtävä 13. Millainen identiteetti pätee seuraavien kuvioiden perusteella?

$$
\begin{array}{c|c|}
 & 1^2 \\ \cline{2-2}
1^2 & 1^4 \\ \cline{2-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & 1^2 & 2^2 \\ \cline{2-3}
1^2 & 1^4 & 2^2 \cdot 1^2 \\ \cline{2-3}
2^2 & & 2^4 \\ \cline{2-3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ \cline{2-4}
1^2 & 1^4 & 2^2 \cdot 1^2 & \\ \cline{2-3}
2^2 & & 2^4 & 3^2 \cdot \left(1^2 + 2^2\right) \\ \cline{2-4}
3^2 & & & 3^4 \\ \cline{2-4}
\end{array}
\qquad \cdots
$$

Miten voi laskea viidensien potenssien summan $1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$, missä n on positiivinen kokonaisluku, tämän identiteetin avulla, kun tiedämme jo, että jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n pätee

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{\ell=1}^{n} \ell^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}?$$

Tehtävä 14. Millainen identiteetti pätee seuraavien kuvioiden perusteella?

$$
\begin{array}{c|c|}
 & 1^2 \\ \cline{2-2}
1 & 1^3 \\ \cline{2-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & 1^2 & 2^2 \\ \cline{2-3}
1 & 1^3 & 2^2 \cdot 1 \\ \cline{2-3}
2 & 2 \cdot 1^2 & 2^3 \\ \cline{2-3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ \cline{2-4}
1 & 1^3 & 2^2 \cdot 1 & \\ \cline{2-3}
2 & 2 \cdot 1^2 & 2^3 & 3^2 \cdot (1+2) \\ \cline{2-4}
3 & \multicolumn{2}{c|}{3 \cdot \left(1^2 + 2^2\right)} & 3^3 \\ \cline{2-4}
\end{array}
\qquad \cdots
$$

Miten voi laskea neljänsien potenssien summan $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$, missä n on positiivinen kokonaisluku, tämän identiteetin avulla, kun tiedämme jo, että jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n pätee

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}?$$

Viitteet

[1] Alsina, C., ja R. B. Nelsen: *Bezaubernde Beweise: Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik*, Springer Spektrum, 2013.

[2] Enzensberger, H. M.: *Numeropiru*, Werner Söderström Osakeyhtiö, 1998.

[3] Golomb, S. W.: *A geometric proof of a famous identity*, Mathematical Notes, 3121, The Mathematical Gazette, 49 (1965), 198–200.

[4] Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming: Volume 1 / Fundamental Algorithms*, Addison–Wesley, 1997.

[5] Nelsen, R. B.: *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993.

[6] Nelsen, R. B.: *Beweise ohne Worte: Deutschsprachige Ausgabe herausgegeben von Nicola Oswald*, Springer Spektrum, 2016.

[7] Strick, H. K.: *Mathematik ist schön: Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren*, Springer, 2019.