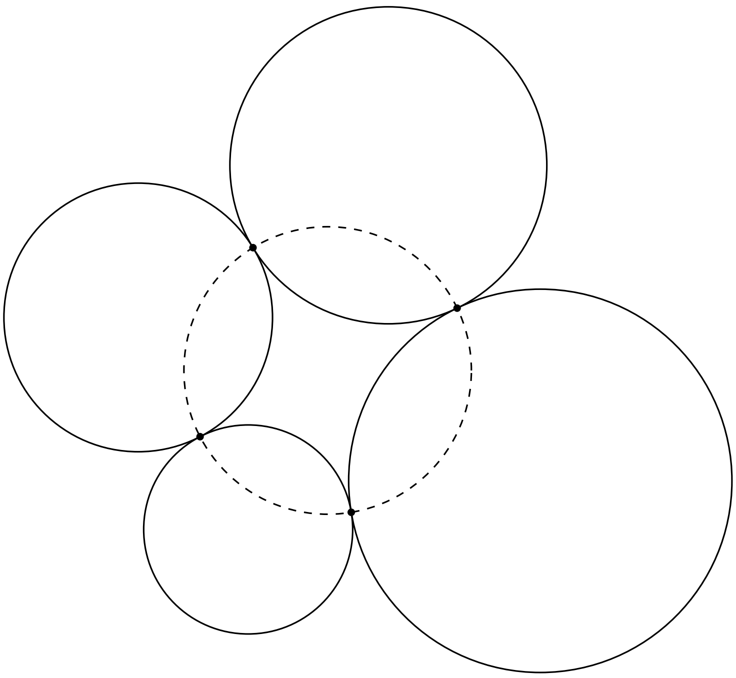
Klassinen geometria

"An elegant weapon for a more civilized age."
- Obi-Wan Kenobi



Ville Tilvis, Esa Vesalainen,

Olli Hirviniemi, Aleksis Koski, Topi Talvitie

8. marraskuuta 2015

Sisältö

Johdanto

Tämä on kurssimoniste geometrian syventävään lukiokurssiin. Pohjatiedoiksi riittää hyvin hallittu peruskoulun oppimäärä. Lukion valtakunnallisen geometrian kurssin hallitseminen on eduksi, mutta tarvittavat tiedot esitellään kyllä monisteen alkupuolella.

Tämä moniste sisältään suurimman osan tehtäväkokelmasta **Yrjö Repo: 11 sarjaa tasogeometrian harjoitustehtäviä (1965)** [R]. Lämmin kiitos Yrjö Revon perikunnalle, joka antoi luvan tehtävien käyttöön. Revon harjoitustehtävät on sijoitettu muiden tehtävien sekaan; seuraavalla sivulla on lista vastaavuuksista.

Monisteen tehtävien vaikeusaste vaihtelee huimasti; kukin sarja alkaa helpoista. Joukossa on vanhoja kilpailutehtäviä, jotka voivat olla hyvinkin vaikeita. Harppi ja viivain -konstruktiotehtävät (jotka esitellään luvussa 3) on merkitty harppisymbolilla .

Monisteen sivujen asettelussa on käytetty suurilta osin Avoimet oppimateriaalit ry:n Vapaa matikka -kirjasarjan kehittelyssä syntyneitä muotoiluja, kiitos niitä laatineelle työryhmälle.

Sivun 61 kuva on piirretty Ginger Boothin Inversion Applet -ohjelmalla.

Moniste on vielä pahasti kesken, kuten lukija epäilemättä huomaa. Kaikenlaiset korjaukset ja parannusehdotukset otetaan ilolla vastaan osoitteessa ville.tilvis@gmail.com.

Kirjoitustyö on jakautunut tekijöiden kesken seuraavasti: Esa Vesalainen on koonnut valtaosan tehtävistä, Ville Tilvis kirjoittanut enimmän tekstin ja laatinut kuvia; Olli Hirviniemi, Aleksis Koski ja Topi Talvitie ovat parannelleet, lisänneet, poistaneet ja viilanneet lukuisia kohtia.

Antoisia hetkiä geometrian parissa!

Helsingissä 8. marraskuuta 2015

Ville Tilvis, Esa Vesalainen, Olli Hirviniemi, Aleksis Koski, Topi Talvitie

Tehtävien vastaavuudet

Yrjö Revon tehtävät on merkitty roomalaisin numeroin, monisteen tehtävät lihavoitu. Kysymysmerkeillä merkityt tehtävät eivät ole tällä hetkellä käytössä.

I.1	**??**	I.2	**??**	I.3	**??**	I.4	**??**	I.5	**??**	I.6	**118**
I.7	**88**	I.8	**119**	I.9	**??**						
II.1	**??**	II.2	**37**	II.3	**39**	II.4	**40**	II.5	**41**	II.6	**43**
II.7	**44**	II.8	**45**	II.9	**46**	II.10	**47**	II.11	**48**	II.12	**146**
II.13	**49**	II.14	**50**	II.15	**147**	II.16	**51**	II.17	**89**	II.18	**134**
II.19	**137**	II.20	**136**	II.21	**52**	II.22	**138**	II.23	**53**		
III.1	**121**	III.2	**122**	III.3	**123**	III.4	**125**	III.5	**126**	III.6	**127**
III.7	**128**										
IV.1	**78**	IV.2	**??**	IV.3	**??**	IV.4	**??**	IV.5	**79**	IV.6	**??**
V.1	**148**	V.2	**149**	V.3	**150**	V.4	**151**	V.5	**153**	V.6	**155**
VI.1	**56**	VI.2	**57**	VI.3	**58**	VI.4	**133**	VI.5	**59**	VI.6	**60**
VI.7	**91**	VI.8	**63**	VI.9	**64**	VI.10	**65**	VI.11	**66**	VI.12	**67**
VI.13	**68**	VI.14	**69**	VI.15	**70**	VI.16	**71**	VI.17	**72**	VI.18	**73**
VI.19	**74**	VI.20	**152**	VI.21	**154**	VI.22	**75**				
VII.1	**??**	VII.2	**??**	VII.3	**??**	VII.4	**??**	VII.5	**??**	VII.6	**??**
VII.7	**??**	VII.8	**??**	VII.9	**??**	VII.10	**??**	VII.11	**??**	VII.12	**??**
VII.13	**??**	VII.14	**??**	VII.15	**??**	VII.16	**??**	VII.17	**??**	VII.18	**??**
VII.19	**??**										
VIII.1	**98**	VIII.2	**99**	VIII.3	**100**	VIII.4	**101**	VIII.5	**102**	VIII.6	**103**
VIII.7	**104**	VIII.8	**105**	VIII.9	**106**	VIII.10	**107**	VIII.11	**108**	VIII.12	**109**
VIII.13	**110**	VIII.14	**111**	VIII.15	**112**	VIII.16	**239**				
IX.1	**??**	IX.2	**??**	IX.3	**??**	IX.4	**??**	IX.5	**??**	IX.6	**??**
IX.7	**??**	IX.8	**??**	IX.9	**??**	IX.10	**??**	IX.11	**??**	IX.12	**??**
IX.13	**??**	IX.14	**??**	IX.15	**??**	IX.16	**??**	IX.17	**??**	IX.18	**??**
IX.19	**??**	IX.20	**??**	IX.21	**??**	IX.22	**??**	IX.23	**??**	IX.24	**??**
IX.25	**??**										
X.1	**163**	X.2	**164**	X.3	**165**	X.4	**167**	X.5	**168**	X.6	**169**
X.7	**170**	X.8	**171**	X.9	**172**	X.10	**174**	X.11	**175**	X.12	**176**
X.13	**177**	X.14	**178**	X.15	**179**	X.16	**169**	X.17	**181**	X.18	**182**
X.19	**183**	X.20	**184**	X.21	**185**	X.22	**186**	X.23	**187**	X.24	**188**
X.25	**189**	X.26	**190**	X.27	**191**	X.28	**192**	X.29	**193**	X.30	**194**
X.31	**240**	X.32	**241**								
XI.1	**??**	XI.2	**??**	XI.3	**??**	XI.4	**??**	XI.5	**??**	XI.6	**??**
XI.7	**??**	XI.8	**??**	XI.9	**??**	XI.10	**??**	XI.11	**??**	XI.12	**??**
XI.13	**??**	XI.14	**??**	XI.15	**??**	XI.16	**??**	XI.17	**??**	XI.18	**??**
XI.19	**??**	XI.20	**??**	XI.21	**??**	XI.22	**??**	XI.23	**??**	XI.24	**??**
XI.25	**??**	XI.26	**??**	XI.27	**??**	XI.28	**??**	XI.29	**??**	XI.30	**??**
XI.31	**??**	XI.32	**??**	XI.33	**??**	XI.34	**??**	XI.35	**??**		

LUKU 1

Teoreettiset perusteet

Geometria on vanhin matematiikan ala, joka pyrittiin esittämään aksiomaattisesti. Eukleides (n. 325 – 265 eaa.) rakensi teoksessaan Stoikheia (Alkeet) järjestelmän, jossa mahdollisimman vähiksi rajatuista aksioomista (peruslähtökohdista, joita ei todisteta) lähtien todistetaan kaikki muut tulokset.

Myöhemmin kävi ilmi, että Eukleideen päättelyissä oli paljon kirjaamattomia oletuksia. Hän esimerkiksi oletti, että kolmion kulmasta kolmioon sisälle kulkeva suora leikkaa kulman vastaisen sivun, vaikka mikään hänen aksioomistaan ei tällaisesta puhunut. Geometrian aksiomatisoinnin puutteet korjasi lopulta David Hilbert (1862 – 1943).

Nykyään aksiomaattinen lähestyminen matematiikkaan on vallalla kaikilla sen aloilla. Teorian perusta naulataan mahdollisimman suppeaan joukkoon aksioomia, joista lähtien kaikki muu todistetaan. Tämä tekee selväksi, mitä kaikkea oletetaan ja päättelyn oikeellisuus on helppo tarkistaa.

Lukiotasolla (saati peruskoulussa) matematiikan opetusta ei aloiteta aksioomista. (Kuvittele ihmetystä, jos laskemisen opettelu aloitettaisiin todistamalla pitkällisesti, että $1 \neq 0$.) Geometrian syventävällä kurssilla tämä olisi perustellumpaa mutta silti kohtuuttoman raskasta. Esimerkiksi yhdessä tämän monisteen päälähteistä, Matti Lehtisen, Jorma Merikosken ja Timo Tossavaisen mainiossa oppikirjassa *Johdatus tasogeometriaan* [L] todistetaan huolellisesti sellaisia väitteitä kuin

"Jos kolme pistettä ovat samalla suoralla, niin niistä täsmälleen yksi on kahden muun välissä."

ja

"Ympyrällä ja sen keskipisteen kautta kulkevalla suoralla on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä."

Haluamme tällä kurssilla tutkia geometrian ihmeellisyyksiä juuttumatta liiaksi lukijalle intuitiivisesti selvien tosiseikkojen todistamiseen, mutta emme toki halua hylätä deduktiivista päättelyä. Siksi olemme päätyneet julistamaan ilman todistusta joukon *postulaatteja*, joista lähdemme liikkeelle. Hienostuneemmassa aksiomaattisessa järjestelmässä osa näistä postulaatteista olisi todistusta kaipaavia lauseita, osa varsinaisia aksioomia. Tämä "keskeltä aloittaminen" säästää kovin tekniseltä ja tämän kurssin tavoitteiden kannalta tarpeettomalta todistamisurakalta.

Aloitetaan nyt määritelmillä ja postulaateilla.

1.1 MÄÄRITELMÄT JA POSTULAATIT

Tässä osiossa määrittelemme geometrian käsitteet ja julistamme niitä sitovat postulaatit. Kaikki tämän osion toteamukset ovat määritelmiä, ellei niitä ole erikseen merkitty postulaateiksi.

Pisteet ja suorat

Peruskäsitteemme tasogeomeriassa ovat *piste* ja *suora*, joita ei sen kummemmin määritellä. Pisteet nimetään isoilla kirjaimilla ja suorat pienillä. Piste A voi sijaita suoralla s (jolloin vastaavasti suora s kulkee pisteen A kautta), ja tätä merkitään $A \in s$. Jos kahdella eri suoralla on yhteinen piste, sanotaan että suorat *leikkaavat*

Suora voidaan nimetä kahden sillä sijaitsevan pisteen avulla: suora AB.

Postulaatti 1. Kahden pisteen kautta kulkee tasan yksi suora.

Postulaatti 2. Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä.

Postulaatti 3. Tasossa on ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.

Pisteiden järjestys suoralla

Postulaatti 4. Samalla suoralla olevat pisteet voidaan järjestää yksikäsitteisesti sen mukaan, mitkä pisteet ovat toisten välissä. Erityisesti

- Kolmesta pisteestä tasan yksi on kahden muun välissä.
- Pisteet voidaan luetella järjestyksessä A_1, A_2, ..., A_n, jossa kaikki kahden pisteen välissä luetellut pisteet ovat niiden välissä suoralla.

Postulaatti 5. Suoran kaikkien pisteiden A ja B

- välissä on piste
- ympärillä on pisteet, joiden välissä A ja B ovat

Puolisuora ja jana

- Suoralla oleva piste P jakaa suoran kahteen *puolisuoraan*. Piste P kuuluu molempiin puolisuoriin. Pisteet A ja B kuuluvat samaan puolisuoraan, jos P ei ole niiden välissä.
- Kaksi suoran pistettä ovat *janan* päätepisteet. Janaan kuluvat sen päätepisteet ja kaikki niiden välissä olevat pisteet. Janaa merkitään sen päätepisteiden avulla: jana AB.

Puolitasot

Suora jakaa tason pisteet kahteen puolitasoon. Samassa puolitasoossa ovat ne pisteet, joiden välinen jana ei leikkaa suoraa. Eri puolitasoissa ovat ne pisteet, joiden välinen jana leikkaa suoran. Suora itse ei kuulu kumpaankaan puolitasoon.

Suorien yhdensuuntaisuus

- Suorat ovat *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Merkitään $s \parallel t$. Lisäksi sovitaan, että suora on itsensä kanssa yhdensuuntainen.
- Janat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset, kun vastaavat suorat AB ja CD ovat.

Postulaatti 6. Suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suoran kanssa yhdensuuntainen suora. (Tämä on *paralleeliaksiooma*.)

Pituus

Postulaatti 7. Jokaiseen janaan AB voidaan liittää positiivinen luku, jota kutsutaan sen *pituudeksi*. Pituutta merkitään $|AB|$ tai vain yksinkertaisesti AB.
Lisäksi

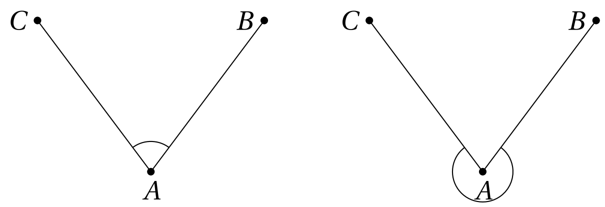
- Janan pituus on sen osien summa: Jos C on pisteiden AB välissä, niin $AB = AC + CB$.
- Puolisuoralla AP on täsmälleen yksi piste B, jolle jana AB on halutun janan mittainen.
- on olemassa jana, jonka pituus on 1.

Määritellään, että janan AB piste C on janan *keskipiste*, kun $AC = CB$.

Kulmat

Kulma on yhdestä pisteestä (*kärki*) lähtevän kahden puolisuoran (*kyljet*) rajaama tasoalue. Kylkien välistä aluetta kutsutaan kulman *aukeamaksi*.

Kaksi puolisuoraa määrää kaksi eri kulmaa, joiden erottamiseksi kulmia merkitään ilmoittamalla järjestyksessä piste oikealta kyljeltä, kärkipiste ja piste vasemmalta kyljeltä.



kulma BAC kulma CAB

Kulmaa BAC voidaan merkitä myös $\angle BAC$.

Kun pisteet A, O ja B ovat samalla suoralla tässä järjestyksessä, kulma AOB on *oikokulma*.

Kulman käsite laajennetaan tarkoittamaan myös tapauksia, joissa kyljet ovat sama puolisuora. Tällaista kulmaa AOA kutsutaan *täyskulmaksi*, kun tarkoitetaan koko tasoa ja *nollakulmaksi* kun tarkoitetaan vain kyseistä puolisuoraa.

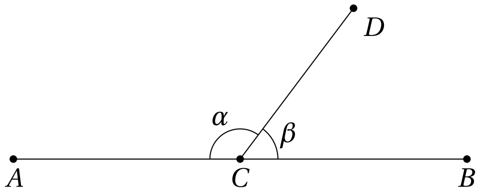
Postulaatti 8. Kulman mittaaminen. Jokaiseen kulmaan voidaan liittää positiivinen luku, jota kutsutaan sen *suuruudeksi*. Lisäksi

- kulman suuruus on sen osien suuruuksien summa: Jos piste C on kulman APB aukeamassa, $\angle APB = \angle APC + \angle CPB$.
- suoran AB tietyllä puolella olevassa puolitasossa on täsmälleen yksi puolisuora AC, jolle kulma BAC on tietyn kulman kokoinen.

Sovitaan lisäksi, että oikokulman suuruus on 180°. (Se, että kaikki oikokulmat ovat yhtä suuria, voidaan todistaa seuraavasta postulaatista.)

Vieruskulmat

Kun oikokulma jaetaan kahteen osaan puolisuoralla, syntyvät kulmat ovat *vierus-kulmia*.



Vieruskulmat $\alpha = \angle DCA$ ja $\beta = \angle BCD$.

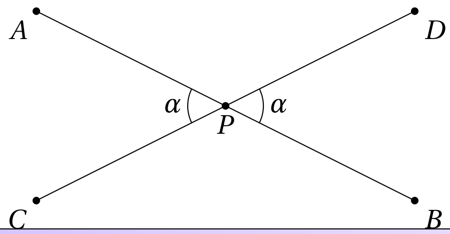
> **Postulaatti 9.** Jos kulmilla on yhtäsuuret vieruskulmat, kulmat ovat yhtäsuu-ret.

Suora kulma määritellään kulmana, joka on yhtä suuri kuin vieruskulmansa.

Ristikulmat

Kahden suoran leikatessa syntyy neljä kulmaa. Näistä kahta, jotka eivät ole toistensa vieruskulmia, kutsutaan *ristikulmiksi*.

Kuvassa kulmat APC ja BPD ovat toistensa ristikulmia, samoin DPA ja CPB.

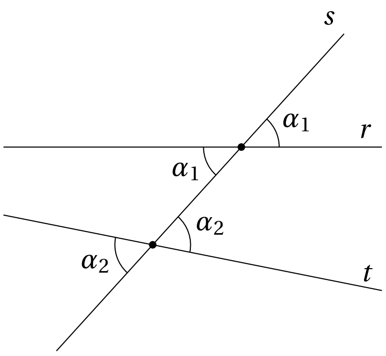


$$\angle APC = \angle BPD$$

> **Postulaatti 10.** Ristikulmat ovat yhtä suuret.

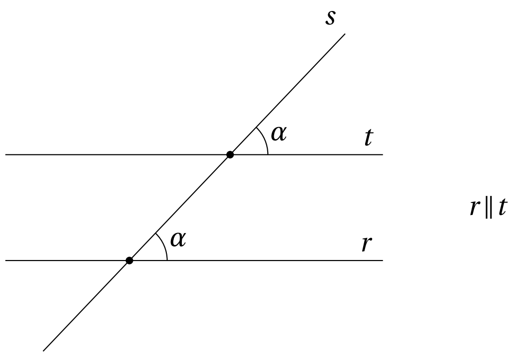
Samankohtaiset kulmat

Kun suora s leikkaa kahta muuta suoraa r ja t, leikkauskohtiin syntyy yhteensä kahdeksan kulmaa. Niistä neljässä on vasempana kylkenä suora s. Näitä neljää kulmaa kutsutaan *samankohtaisiksi kulmiksi*, kuvassa α_1 ja α_2.



Vastaavasti samankohtaisia ovat ne neljä kulmaa, joissa s on oikeana kylkenä.

Postulaatti 11. Kun suora s leikka suoria r ja t, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret täsmälleen silloin, kun suorat r ja t ovat yhdensuuntaiset.



Kulmien luokittelu koon mukaan

- *Kupera kulma*: Suurempi kuin oikokulma
- *Kovera kulma*: Pienempi kuin oikokulma

Koverat kulmat jaetaan seuraavasti

- *Suora kulma*: Yhtä suuri kuin vieruskulmansa eli puolet oikokulmasta
- *Terävä kulma*: Pienempi kuin suora kulma
- *Tylppä kulma*: Suurempi kuin suora kulma
- *Vino kulma*: Ei suora.

Lisäksi

- *Komplementtikulmien* summa on suora kulma
- *Suplementtikulmien* summa on oikokulma
- *Eksplementtikulmien* summa on täyskulma

Normaalit ja projektiot

- Jos suorien välinen kulma on suora, kyseiset suorat ovat toistensa *normaaleja*.
- Janan keskipisteen kautta kulkeva normaali on janan *keskinormaali*.
- Suoran s ulkopuolisen pisteen P *projektio* suoralla s on se suoran s piste, jossa pisteen P kautta kulkeva normaali leikkaa suoran s.
- Pisteen P *etäisyys suorasta* s on pisteen P ja sen projektion määräämän janan pituus.

Monikulmiot

Monikulmio syntyy, kun pisteet A_1, A_2, ..., A_n, A_1 yhdistetään janoilla tässä järjestyksessä. Muodostunut kuvio on n-kulmio $A_1A_2...A_n$. Pisteitä A_i kutsutaan monikulmion *kärjiksi* ja niitä yhdistäviä janoja *sivuiksi*.

Lävistäjä on jana, joka yhdistää kaksi kärkeä mutta ei ole sivu. Monikulmio on *yksinkertainen*, jos sen sivut eivät leikkaa toisiaan (paitsi tietysti viereisten sivujen kärjissä).

Monikulmio on *säännöllinen*, kun sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kulmat yhtä suuria.

Kolmikulmiota kutsutaan myös *kolmioksi*.

Kolmioiden luokittelua

- *Tasakylkinen*: Kaksi yhtä pitkää sivua
- *Tasasivuinen*: Kaikki sivut yhtä pitkät
- *Teräväkulmainen*: Kaikki kulmat teräviä
- *Suorakulmainen*: Yksi suora kulma
- *Tylppäkulmainen*: Yksi tylppä kulma

Nelikulmioiden luokittelua

- *Puolisuunnikas*: Kaksi vastakkaista sivua yhdensuuntaiset
- *Suunnikas*: Molemmat parit vastakkaisia sivuja yhdensuuntaiset
- *Neljäkäs*: Kaikki sivut yhtä pitkiä
- *Suorakulmio*: Kaikki kulmat suoria
- *Neliö*: Säännöllinen nelikulmio (sivut yhtä pitkiä, kulmat suoria)
- *Vinoneliö*: Neljäkäs, joka ei ole neliö.

Käsitteet ”vastainen” ja ”viereinen” kolmiossa

Kolmiossa kulman *vastainen sivu* on se sivu, joka ei ole kyseisen kulman kyljellä. Vastaavasti kulma on tällöin kyseisen sivun *vastainen kulma*. Kulman kyljillä olevat sivut ovat kulman *viereisiä sivuja*.

Ympyrä

Ympyrä on niiden pisteiden joukko, jotka ovat vakioetäisyydellä tietystä pisteestä (*keskipiste*). Ympyrät nimetään yleensä niiden keskipisteen mukaan.

Ympyrään liittyviä nimityksiä:

- Ympyrän *kehä* tarkoittaa ympyrän pisteistä muodostuvaa uraa.
- Ympyrän *kaari* on kahden sen pisteen välinen osa kehästä. Lisäksi tarvitaan kolmas piste määräämään, kummasta kaaresta on kyse.
- *Säde* on ympyrän keskipisteestä kehälle kulkeva jana.
- *Jänne* on kaksi ympyrän kehän pistettä yhdistä jana.
- *Halkaisija* on jänne, joka kulkee keskipisteen kautta.
- Piste on ympyrän sisäpiste, jos sen etäisyys keskipisteeseen on pienempi kuin säde. Ulkopisteelle etäisyys on sädettä suurempi.
- Luku π on ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhde.
- Jänne jakaa ympyrän kahteen *segmenttiin*.
- Kaksi sädettä jakaa ympyrän kahteen *sektoriin*.

Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus

Kahden kuvion yhtenevyys on mahdollista, jos jokaisella kuvioon 1 kuuluville pisteille $A, B, C, \dots$ löytyy kuviosta 2 *vastinpisteet* $A', B', C', \dots$ siten, että jokaisella pisteellä on täsmälleen yksi vastinpiste ja päinvastoin. Vastinpisteiden muodostamat janat ja kulmat ovat *vastinjanoja* ja *vastinkulmia*.

Kaksi kuviota ovat *yhtenevät*, mikäli niiden vastinkulmat ja vastinjanat ovat yhtä suuret. Yhtenevyyden merkki on $\cong$, esimerkiksi kolmioille $ABC \cong A'B'C'$.

Kaksi kuviota ovat *yhdenmuotoiset*, mikäli niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinjanat verrannolliset. Yhdenmuotoisuuden merkki on $\sim$.

Kolmioiden yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuslauseet

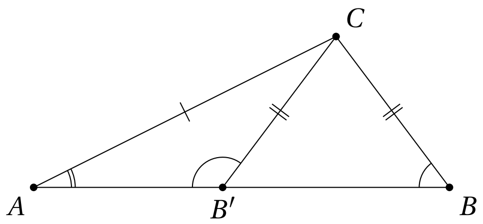
Postulaatti 12. Kaksi kolmiota ovat yhteneviä, kun jokin seuraavista ehdoista on voimassa.

1. **(sks)** Kaksi vastinsivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret.
2. **(sss)** Kolmioilla on yhtä suuret sivut.
3. **(ksk)** Kulmat (2 riittää) ja yksi vastinsivu ovat yhtä suuret.

   Lisäksi jos

4. **(ssk)** kaksi sivua ja toisen vastainen kulma ovat yhtäsuuret, kolmiot ovat yhtenevät **tai** toisen yhtenevän sivun vastaiset kulmat ovat suplementtikulmia.

Ehto **ssk**:



Kuvan kolmiot ABC ja $AB'C$ toteuttavat ehdon (ssk), mutta eivät ole yhteneviä. Tällaisessa tilanteessa kulmat $CB'A$ ja CBA ovat suplementtikulmia. (Tehtävä 14.)

Postulaatti 13. Kolmioiden yhdenmuotoisuutta koskevat ehdot ovat samat kuin edellä mainitut yhtenevyysehdot, mutta vaatimus sivujen yhtäsuuruudesta korvataan vaatimuksella vastinsivujen verrannollisuudesta. Vastaavat lyhenteet ovat (sks), (sss), (kk) ja (ssk).

Pinta-ala

Pinta-ala on tasokuvioon liittyvä luku. Suorakulmion pinta-alaksi määritellään sen kahden kohtisuoran sivun tulo. (”Kanta kertaa korkeus.”)

Postulaatti 14. Pinta-alalle pätee

- Tasokuvion pinta-ala on sen osien pinta-alojen summa.
- Yhtenevien kuvioiden pinta-alat ovat samat.
- Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on vastinjanojen suhteen neliö.
- Ympyrän pinta-ala on $A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde.
- Sektorin pinta-ala on $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$, missä α on sektorin keskuskulma.

Leikkauspostulaatit

Postulaatti 15. Suoran ja kolmion leikkauspisteet.

- Jos suora ei kulje kolmion kärkien kautta ja leikkaan yhden sivuista, se leikkaa myös toisen sivun mutta ei kolmatta.
- Jos suora leikkaa kolmion kärjen ja kolmion sisäpisteen, se leikkaa myös vastakkaisen sivun.

Postulaatti 16. Suoran ja ympyrä. Suoralla ja ympyrällä on joko

- Kaksi leikkauspistettä. Tämä tapahtuu tasan silloin kun suora sisältää ympyrän sisäpisteen, jolloin leikkauspisteet sijaitsevat eri puolilla sisäpistettä.
- Yksi leikkauspiste. Tällöin sanotaan, että suora sivuaa ympyrää eli on sen tangentti.
- Ei yhtään leikkauspistettä.

Postulaatti 17. Kaksi ympyrää. Kahdella eri ympyrällä on joko

- Kaksi leikkauspistettä. Tämä tapahtuu täsmälleen silloin kun toinen ympyrä sisältää toisen sisä- ja ulkopisteen.
- Yksi leikkauspiste. Tällöin sanotaan, että ympyrät sivuavat toisiaan.
- Ei yhtään leikkauspistettä.

1.2 TIIVISTELMÄ POSTULAATEISTA

Tässä on tiivistelmä käyttämistämme postulaateista. Täsmällisemmät muotoilut löytyvät sivulta 4 alkaen.

Tähdellä ⋆ on merkitty ne postulaatit, jotka voitaisiin kokonaan todistaa muista postulaateista lähtien. Useimpia muitakin voitaisiin heikentää.

P1. Kahden pisteen kautta kulkee tasan yksi suora.

P2. Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä.

P3. Tasossa on ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.

P4. Suoran pisteillä on järjestys. (Mitkä pisteet ovat minkäkin pisteiden välissä.)

P5. Suoran kahden pisteen välissä ja ympärillä on lisää suoran pisteitä.

P6. Paralleeliaksiooma: Suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suoran kanssa yhdensuuntainen suora.

P7. Janalla on pituus. Suoralta voidaan erottaa toisen janan mittainen jana. Jana on osiensa summa.

P8. Kulmalla on suuruus, jota voi mitata luvulla. Puolitasoon voidaan merkitä halutun toisen kulman kokoinen kulma. Kulma on osiensa summa.

P9. Kulmat ovat yhtäsuuret, jos niiden vieruskulmat ovat yhtäsuuret. ⋆

P10. Ristikulmat ovat yhtäsuuret. ⋆

P11. Kun suora leikkaa yhdensuuntaisia suoria, samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret. ⋆

P12. Kolmion yhtenevyyslauseet (sks), (sss), (ksk) ja (ssk). (⋆, paitsi sks)

P13. Kolmion yhdenmuotoisuuslauseet (sks), (sss), (kk) ja (ssk). ⋆

P14. Kuvion pinta-ala on sen osien alojen summa. Yhtenevien kuvioiden alat ovat samat.

P15. Suoran ja kolmion leikkauspisteet.

P16. Suoran ja ympyrän leikkauspisteet.

P17. Kahden ympyrän leikkauspisteet.

1.3 GEOMETRINEN TODISTAMINEN

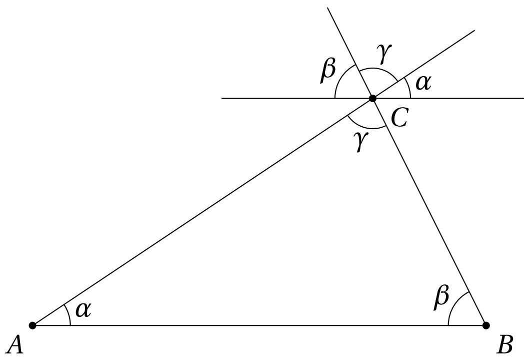
Nyt määritelmät ja postulaatit on todettu, joten voimme ryhtyä kehittämään geometristä järjestelmäämme eli todistamaan lauseita. Kaikkien todistusten tulee pohjautua määritelmiin tai postulaatteihin.

Tässä todistetaan muutaman lause ja annetaan monta harjoitustehtäväksi.

ESIMERKKI 1.1

Väite: Kolmion kulmien summa on oikokulman suuruinen.

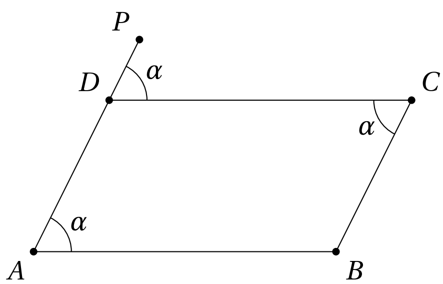
Todistus. Olkoon ABC kolmio. Piirretään kärjen C kautta sivun AB suuntainen suora (P6). Jatketaan sivuja AC ja BC (P5). Kuvaan merkityt kulmat α ovat samankohtaisia, samoin kulmat β (P11). Kulmat γ ovat ristikulmia (P10). Kulmat α, β ja γ muodostavat oikokulman. □



ESIMERKKI 1.2

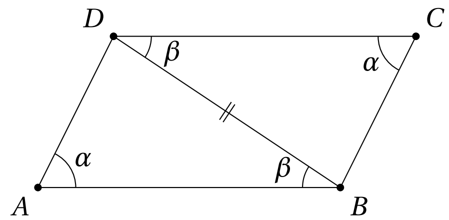
Väite: Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja vastakkaiset sivut yhtä pitkät.

Todistus.
Kulmat: Olkoon $ABCD$ suunnikas ja P piste sivun AD jatkeella (P5).



Suunnikkaan määritelmän mukaan $AB \parallel CD$, joten samankohtaiset kulmat BAD ja CDP ovat yhtäsuuret. Toisaalta määritelmän mukaan $AD \parallel CB$, joten myös samankohtaiset kulmat $\angle CDP$ ja $\angle DCB$ ovat yhtäsuuret. Siis vastakkaiset kulmat $\angle BAD$ ja $\angle DCB$ ovat yhtäsuuret. □

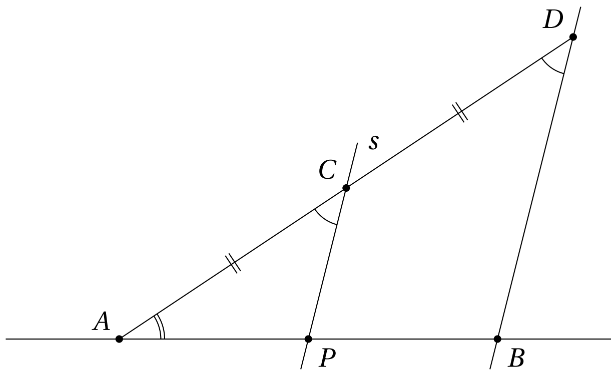
Sivut: Olkoon $ABCD$ suunnikas. Lävistäjä DB jakaa suunnikkaan kahteen kolmioon. Suunnikkaan vastakkaiset kulmat A ja C ovat yhtä suuret (edellinen kohta). Koska $AB \parallel CD$, samankohtaiset kulmat $\angle DBA$ ja $\angle BDC$ ovat yhtäsuuret. Kolmiot ABD ja CDB ovat siis yhteneviä (ksk), sillä niillä on samat kulmat ja yhteinen vastinsivu BD. Siis $AB = CD$ ja $AD = CB$. □



ESIMERKKI 1.3

Väite: Jokaisella janalla on keskipiste. (Täytyy sekin perustella!)

Todistus. Osoitetaan, että janalla AB on keskipiste. Olkoon C suoran AB ulkopuolinen piste (P3). Valitaan suoralta AC piste D, joka on eri puolella pistettä C kuin A on, ja jolle $AC = CD$. (P7)

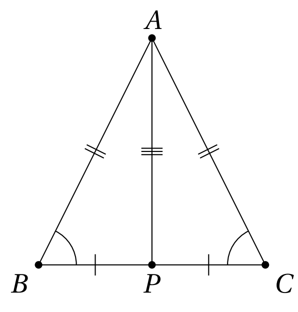


Olkoon s pisteen C kautta kulkeva, suoran DB kanssa yhdensuuntainen suora. Se leikkaa janan AB (P15), olkoon tämä piste P. Samankohtaiset kulmat ACP ja ADB ovat yhtä suuret, joten kolmiot ACP ja ADB ovat yhdenmuotoiset (kk). Koska $AC = \frac{1}{2}AD$, myös $AP = \frac{1}{2}AB$, eli P on janan AB keskipiste. $\square$

ESIMERKKI 1.4

Väite: Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

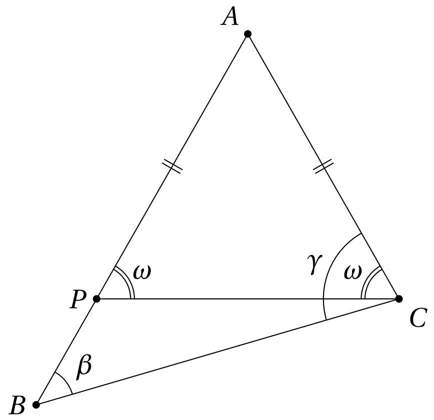
Todistus. Olkoot ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Olkoon kannan BC keskipiste P (esimerkki 1.3). Kolmiot APB ja APC ovat yhtenevät (sss), joten $\angle B = \angle C$. $\square$



ESIMERKKI 1.5

Väite: Kolmiossa pidempää sivua vastaa suurempi kulma ja päinvastoin.

Todistus. Olkoon kolmion ABC sivu AB pidempi kuin AC. Osoitetaan, että kulma $\gamma = \angle ACB$ on suurempi kuin kulma $\beta = \angle CBA$. Valitaan sivulta AB piste P siten, että $AP = AC$. (P7)



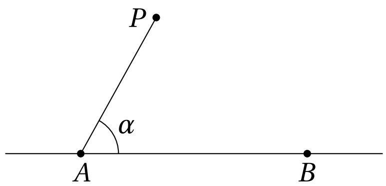
Tasakylkisen kolmion APC kantakulmat ω ovat yhtä suuret (edellinen esimerkki). Koska P on kulman γ aukemassa, $\gamma > \omega$. (P8) Toisaalta kolmiosta PBC nähdään, että $\omega > \beta$, sillä kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi (tehtävä 1). Siis $\gamma > \omega > \beta$. □

Osoitettiin siis, että suurempaa sivua vastaa suurempi kulma. Myös suurempaa kulmaa vastaa suurempi sivu, sillä muuten päädyttäisiin ristiriitaan edellisen tuloksen kanssa. □

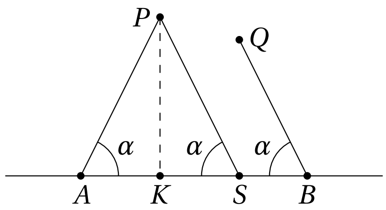
ESIMERKKI 1.6

Väite: Suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee tasan yksi suoran normaali.

Todistus. Todistetaan ensin, että normaali on olemassa. Olkoon suoran AB ulkopuolella piste P. Jos $AP \perp AB$, normaali on löytynyt. Muussa tapauksessa kulma $BAP = \alpha$ ei ole suora.

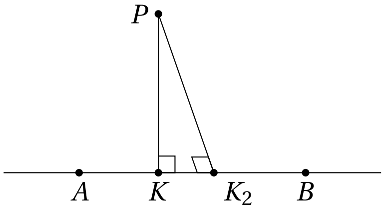


Olkoon Q piste, joka on samalla puolella suoraa AB kuin P ja jolle kulma $QBA = \alpha$ (P8). Piirretään pisteen P kautta kulkeva suoran BQ suuntainen suora, joka leikkaa suoran AB pisteessä S. Nyt myös $\angle PSA = \alpha$ (samankohtaiset kulmat).



Olkoon K janan AS keskipiste (esimerkki 1.3). Kolmiot PAK ja PSK ovat yhtenevät (ssk), joten kulma SKP on suora. PK on siis haluttu normaali. □

Normaaleja on vain yksi, sillä jos olisi toinenkin normaali, ja se leikkaisi suoran AB pisteessä K_2, kolmiossa PKK_2 olisi kaksi suoraa kulmaa. Kolmion viimeinen kulma olisi siis nollakulma ja pisteet K ja K_2 samat.



HARJOITUSTEHTÄVIÄ

Seuraavissa tehtävissä todistetaan joitakin perustuloksia. Monet niistä ovat intuitiivisesti selviä, eikä todistaminen siis ole kovin jännittävää. Urakan tarkoituksena onkin harjoitella täsmällistä päättelyä, jota tulemme tarvitsemaan myöhempien, vaikeampien tulosten perustelussa.

Tässä osiossa todistettuihin lauseisiin luonnollisesti vedotaan jatkossa ahkerasti.

Todista seuraavat lauseet.

1. Kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summan suuruinen. (Ja siis suurempi kuin kumpikaan näistä kulmista.)

2. Janan keskinormaalilla oleva piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä.

3. Janan päätepisteistä yhtä kaukana oleva piste ovat janan keskinormaalilla.

4. Kulman puolittajan pisteet ovat yhtä kaukana kulman kummastakin kyljestä.

5. Pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kulman kummastakin kyljestä, ovat kulmapuolittajalla.

6. Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

7. Jos nelikulmion molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhtä pitkät, nelikulmio on suunnikas.

8. Jos nelikulmiossa on yksi pari vastakkaisia sivuja yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, nelikulmio on suunnikas.

9. Jos nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa, nelikulmio on suunnikas.

10. Neljäkkään lävistäjät leikkaavat kohtisuorasti.

11. Jos nelikulmiossa $ABCD$ on $AB = AD$ ja $CB = CD$ (ns. leija), niin $AC \perp BD$.

12. Jos nelikulmiossa $ABCD$ on $AB = CD$ ja $AD = BC$ sekä lävistäjät yhtä pitkät, kyseessä on suorakulmio.

13. Kolmio leikataan sen yhden sivun suuntaisella suoralla. Osoita, että syntyvä pieni kolmio on alkuperäisen kanssa yhdenmuotoinen.

14. Osoita, että postulaatin 12 viimeisessä kuviossa kulmat $CB'A$ ja CBA ovat suplementtikulmia.

15. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

16. Tasasivuisen kolmion kulmat ovat keskenään yhtä suuret.

17. Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtäsuuret, kolmio on tasakylkinen nämä kulmat kantakulmina.

18. Suorille l, m, n pätee $l \perp n$, $m \perp n$. Osoita, että $l \parallel m$.

19. Jos suora leikkaa toisen kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta, se leikkaa toisenkin.

20. Janalla on äärettömän monta pistettä.

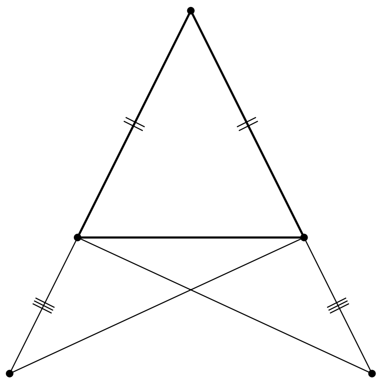
21. On olemassa terävä kulma.

22. Laajenna esimerkin 1.3 todistusta osoittamaan, että janalla on pisteet, jotka jakavat jana n yhtä pitkään osaan.

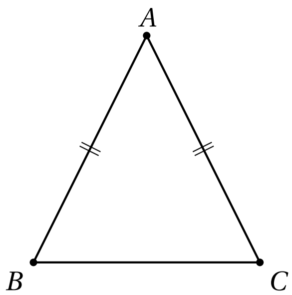
23. Ympyrän tangentti leikkaa ympyrän pisteessä A. Osoita, että tangentti on kohtisuorassa pisteeseen A piirrettyä sädettä vastaan. (Käytä vastaoletusta.)

24. Ympyrän ulkopuolisen pisteen P kautta kulkee kaksi ympyrän tangenttia, joista toinen leikkaa ympyrän pisteessä A ja toinen pisteessä B. Osoita, että $PA = PB$.

25. *Pons asinorum* Eukleideen Elementasta: Todista, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret käyttäen vain (sks)-yhtenevyyttä, ei kannan keskipistettä kuten esimerkissä 1.3. Käytä apuna seuraavaa kuviota.



26. Pappuksen todistus sille, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtäsuuret: Olkoon ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Tällöin kolmiot ABC ja ACB ovat yhtenevät (sks), joten $\angle B = \angle C$. Onko todistus pätevä?



Pinta-aloista

Pinta-alan määritelmäksi otettiin suorakulmion pinta-ala. Todista seuraavat postulaatin 14 avulla.

27. Suorakulmaisen kolmion, jonka kateetit ovat a ja h, pinta-ala on $ah/2$.

28. Kolmion ala on $ah/2$, missä a on jonkin sivun pituus ja h sen vastainen korkeusjana.

29. Kolmion alaksi saadaan sama luku riippumatta siitä, minkä sivun avulla se lasketaan. Osoita siis, että jos a_1 ja a_2 ovat kolmion sivut ja h_1 sekä h_2 niitä vastaavat korkeusjanat, $a_1 h_1 = a_2 h_2$. Tarkastele teräväkulmainen ja tylppäkulmainen tapaus erikseen. Vinkki: yhdenmuotoiset kolmiot.

30. Suunnikkaan pinta-ala on ah, missä a on yhden sivun pituus ja h tämän ja sen vastaisen sivun välinen etäisyys.

31. Puolisuunnikkaan ala on $\frac{a+b}{2} \cdot h$, missä a ja b ovat yhdensuuntaiset sivut. Huomaa, että jako kahteen kolmioon ja yhteen suorakulmioon ei ole yleispätevä.

Postulaattien välisiä yhteyksiä

Kuten johdannossa mainittiin, postulaattikokoelmamme on turhan kattava. Lauseina voitaisiin todistaa postulaatit P9 (vieruskulmat), P10 (ristikulmat), P11 (samankohtaiset kulmat), P12 (yhtenevyyslauseet, paitsi sks), P13 (yhdenmuotoisuuslauseet). Lisäksi useimmat muista postulaateista voisi muotoilla heikommin.

Seuraavissa tutkitaan joidenkin näiden ylimääräisten postulaattien todistamista.

32. Todista postulaatti P10 (ristikulmat) lähtien postulaatista P9 (vieruskulmat)

33. Todista postulaatti P9 (vieruskulmat) lähtien (sks)-yhdenmuotoisuuspostulaatista.

34. Postulaatin P11 (samankohtaiset kulmat) todistaminen vaati kaksi osaa:

1. Jos samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret, suorat ovat yhdensuuntaiset.
2. Jos suorat ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret.

Kohdan 1 voi todistaa seuraavasti: oletetaan, että samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret, mutta suorat leikkaavat. Tällöin syntyy kolmio, jossa on yhtäsuuret kulmat kolmion sisällä ja toisen kulman vieruskulmana (piirrä kuva!), mikä on mahdotonta (tehtävä 1).
Mikä ongelma tähän todistukseen liittyy? Osaatko korjata?
Kun kohta 1 on todistettu, kohta 2 voidaan todistaa paralleeliaksiooman (P6) avulla. Miten?

35. Todista (ksk)-yhtenevyyslause lähtien (sks)-yhtenevyydestä. Vihje: tee vastaoletus.

36. Todista (sss)-yhtenevyyslause lähtien (sks)-yhtenevyydestä. Vihje: kopioi kolmiot vierekkäin toistensa peilikuviksi ja hyödynnä tehtävän 25 tulosta.

LUKU 2

Perusgeometriaa

Tässä luvussa tutustumme tavallisimpiin tekniikoihin, joilla geometrian ongelmia ratkotaan. Teoria on jaettu kokonaisuuksiksi, joihin kuuluu omat harjoitustehtävät.

2.1 KOLMIOIDEN YHDENMUOTOISUUDESTA

Yhdenmuotoisuuden määritelmän mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset, kun niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivut verrannolliset. Osiossa 1.1 postuloimme neljä ehtoa ($\sim sss$), ($\sim sks$), ($\sim kk$) ja ($\sim ssk$), jotka takaavat yhdenmuotoisuuden.

Vastinsivujen verrannollisuudella tarkoitetaan sitä, että kun $ABC \sim A'B'C'$,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{ja niin edelleen.}$$

Harjoitustehtäviä

37. Kolmion ABC sivut ovat $AB = 5$, $BC = 7$ ja $AC = 4$. BC:n suuntainen suora leikkaa sivut AB ja AC pisteissä D ja E. $DE = 1$. Laske kolmion ADE sivut.

38. Olkoon ABC ja DEF kolmioita siten, että $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ ja $CA \parallel FD$. Osoita, että $ABC \sim DEF$.

39. Tasakylkisen kolmion kanta on 5 ja kylki 8. Kuinka suuri on kannan projektio kyljellä?

40. Tasakylkisen kolmion kanta on 24 ja kylki 13. Kuinka suuri on kannan projektio kyljellä?

41. Kolmiossa ABC on $AB = 6$, $AC = 8$ ja $BC = 7$ sekä AB:n suuntainen leikkaaja $DE = 5$. Kuinka pitkä on BE?

42. Kahdella kolmiolla on kummallakin kaksi tietyn mittaista sivua ja kolme tietyn kokoista kulmaa. Ovatko kolmiot välttämättä yhtenevät?

43. Todista, että puolisuunnikkaan lävistäjät jakavat toisensa osiin, joista voidaan muodostaa verranto.

44. Todista, että kolmion kaksi korkeusjanaa jakaa toisensa osiin, joista voidaan muodostaa verranto.

45. Todista, että kolmion kahden korkeusjanan suhde on niiden vastaisten sivujen käänteissuhde.

46. Suorakulmion $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste P, että kulma $CPD = 90°$. Todista, että BC on PA:n ja PB:n keskiverto. eli niiden tulon neliöjuuri.

47. Puolisuunnikkaan kantasivut ovat 8 ja 12 sekä toinen lävistäjä 15. Laske niiden osien pituudet, joihin toinen lävistäjä jakaa tämän.

48. Nelikulmion lävistäjät jakavat toisensa osiin, joista voidaan muodostaa verranto siten, että toisen lävistäjän osat ovat verrannon edellisinä jäseninä. Todista, että nelikulmio on puolisuunnikas (tai suunnikas).

49. Kolmion ABC sivu $AB = 4$ ja sivu $AC = 2$. Kärjen C kautta piirretään suora, joka leikkaa sivun AB pisteessä D siten, että $BD = 3$. Todista, että $\angle ADC = \angle ACB$.

50. Suorakulmioon $ABCD$ piirretään lävistäjä AC sekä D:n kautta suora, joka puolittaa sivun AB pisteessä F ja leikkaa AC:n pisteessä E. Laske suhde $AE : EC$.

51. Kolmiossa ABC on kulma $C = 90°$. Hypotenuusan keskinormaali leikkaa hypotenuusan pisteessä D ja kateetin AC pisteessä E. Laske janan AE pituus, kun $AB = 10$, $AC = 8$ ja $BC = 6$.

52. Nelikulmion sivut ovat 1, 2, 4 ja 4 sekä lyhyempi lävistäjä 2. Todista, että nelikulmio on puolisuunnikas.

53. Suorat g ja h leikkaavat toisensa pisteessä O. Suoralta g valitaan eri puolilta O:ta pisteet A ja B siten, että $OA = 2 \cdot OB$. Suoralta h valitaan eri puolilta O:ta pisteet A' ja B' siten, että $AA' = 2 \cdot BB'$. Mitä voit sanoa kulmista $AA'O$ ja $BB'O$ toisiinsa verrattuina?

54. Missä kulmassa säännöllisen viisikulmion lävistäjät leikkaavat?

55. Osoita, että kuperan nelikulmion sivujen keskipisteet ovat suunnikkaan kärjet ja että kyseisen suunnikkaan ala on puolet alkuperäisen nelikulmion alasta. Osoita myös, että kyseisen suunnikaan ympärysmitta on sama kuin alkuperäisen nelikulmion lävistäjien summa.

2.2 KOLMIOITA KOSKEVIA LAUSEITA

Pythagoraan lause

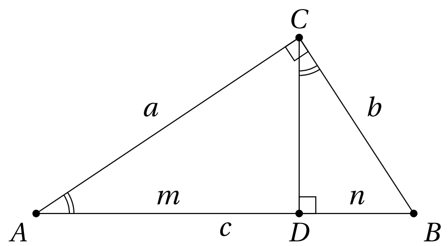
Pythagoraan lause: Olkoot suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet a ja b ja hypotenuusan pituus c. Tällöin $a^2 + b^2 = c^2$.

Todistus: Olkoon kolmion ABC kulma C suora. Merkitään pituuksia $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$. Piirretään kolmiolle hypotenuusan vastainen korkeusjana, joka jakaa sivun AB pisteessä D janoihin $AD = m$ ja $DB = n$. Nyt $ACB \sim ADC \sim CDB$ ($\sim kk$), joten

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{m} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{n}.$$

eli $a^2 = cm$ ja $b^2 = cn$. Lasketaan nämä yhteen, jolloin saadaan

$$a^2 + b^2 = cm + cn = c(m+n) = c^2. \square$$



Lause: (Pythagoraan lauseen käänteislause): Jos $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen. Todistus tehtävänä 61.

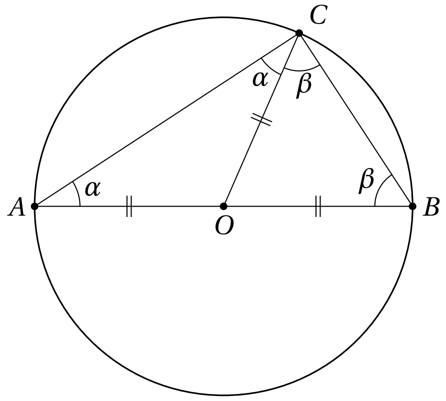
Lause: Hypotenuusalle piirretty korkeus on niiden osien keskiverto, joihin se jakaa hypotenuusan.

Todistus: Käytetään yllä olevan kuvan merkintöjä ja sovitaan $CD = h$. Edelleen $ADC \sim CDB$ ($\sim kk$), joten $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Leftrightarrow h^2 = nm$. $\square$

Thaleen lause

Lause. Jos kolmion sivu on sen ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, tämän sivun vastainen kulma on suora.

Todistus. Olkoon Γ kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä, jonka halkaisija AB on. Koska pisteet A, B ja C ovat kaikki ympyrällä Γ, ympyrän määritelmän nojalla $AO = BO = CO$. Siis kolmiot OCA ja OBC ovat tasakylkisiä, $\angle OAC = \angle ACO = \alpha$ ja $\angle OCB = \angle CBO = \beta$. Koska kolmion ABC kulmien summa on $180°$, $2\alpha + 2\beta = 180°$ eli $\angle ACB = \alpha + \beta = 90°$. $\square$

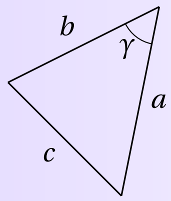


Sini- ja kosinilause

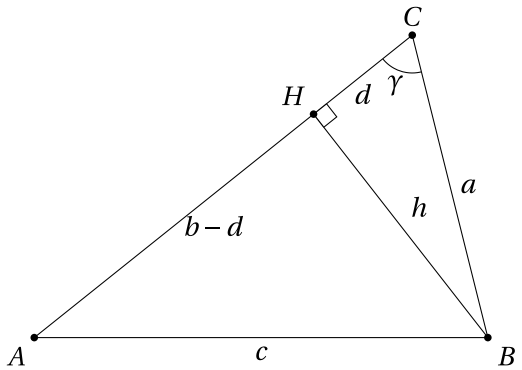
Kosinilause.
Olkoot kolmion sivut a, b ja c. Tällöin

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

missä γ on sivun c vastainen kulma.



Todistus: Merkitään kolmion ABC sivunpituuksia $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ja $\angle ACB = \gamma$. Piirretään kolmiolle kärjen B vastainen korkeusjana, joka leikkaa suoran AC pisteessä H.



Tapaus 1: Kulma γ on terävä, eli H on janalla AC.
Merkitään $HC = d$, $HB = h$. Käytetään Pythagoraan lausetta kolmioille BCH ja ABH:

$$\begin{aligned}(b-d)^2 + h^2 &= c^2 \\ d^2 + h^2 &= a^2.\end{aligned}$$

Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan

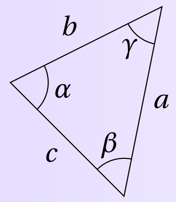
$$b^2 - 2bd = c^2 - a^2.$$

Koska $\angle BHC = 90°$, $\cos\gamma = d/a$ eli $d = a\cos\gamma$, siis

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Tapaus 2: Kulma γ on tylppä. Todistus on samankaltainen kuin tapaus 1, kunhan käyttää tietoa $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$. □

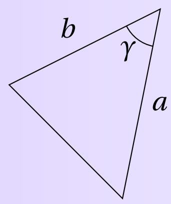
Sinilause.
Olkoot kolmion sivut a, b ja c, niiden vastaiset kulmat α, β ja γ sekä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde R. Tällöin
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$



Todistus: Merkitään kolmion ABC sivujen pituuksia $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ja kulmia $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Piirretään kolmiolle kärjen C vastainen korkeusjana, joka leikkaa suoran AB pisteessä H. Merkitään $CH = h$.

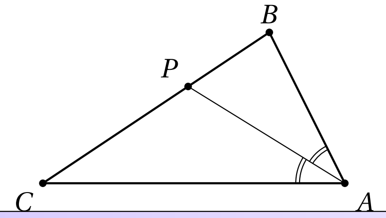
Nyt pätee
$$\sin\beta = \frac{h}{a} \text{ ja } \sin\alpha = \frac{h}{b}$$
riippumatta siitä, onko H janalla AB. Siis
$$a\sin\beta = h = b\sin\alpha$$
eli
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$
Toinen yhtälö saadaan samanlaisella päättelyllä. Viimeisen yhtälön todistus on tehtävänä 142. □

Kolmion alan sinikaava.
Olkoot kolmion kaksi sivua a ja b ja niiden välinen kulma γ.
Kolmion pinta-ala on
$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.



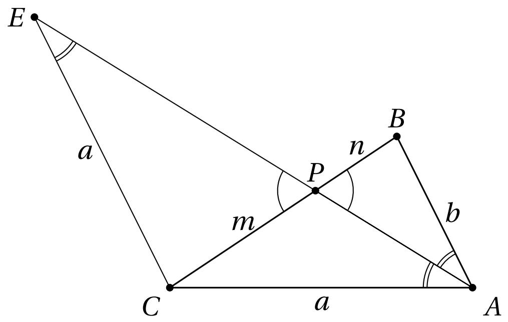
Kolmion alan sinikaavan todistus on harjoitustehtävänä 87.

Kulmanpuolittajalause



Kulmanpuolittajalause.
Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, eli
$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

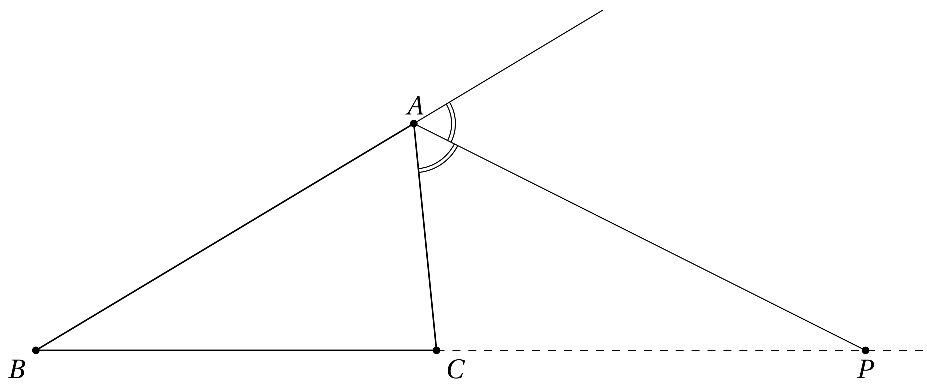
Todistus. Olkoon ABC kolmio. Merkitään $AC = a$ ja $AB = b$. Kulman A puolittaja leikatkoon sivun BC pisteessä P, joka jakaa sivun osiin $CP = m$ ja $PB = n$. Piirretään kärjen C kautta janan AB suuntainen suora, joka leikkaa kulmanpuolittajan jatkeen pisteessä E. Kulmat AEC ja EAB ovat samankohtaiset, joten kolmio CAE on tasakylkinen, eli $CE = a$. Lisäksi $PEC \sim PAB$ ($\sim kk$), joten $\frac{EC}{AB} = \frac{CP}{PB}$, eli $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. □



Kulmanpuolittajalause on voimassa myös kolmion kulman ulkokulman (eli vieruskulman) puolittajalle:

Ulkokulmanpuolittajalause.
Kolmion ulkokulman puolittaja jakaa vastaisen sivun jatkeen (ulkoisesti) viereisten sivujen suhteessa, eli

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$



Todistus on harjoitustehtävänä 80.

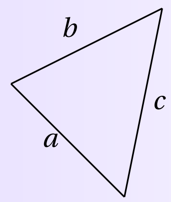
Heronin kaava

Kolmion pinta-alan voi laskea suoraan sen sivujen avulla *Heronin kaavalla*.

Heronin kaava.
Kolmion pinta-ala on

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

missä a, b ja c ovat kolmion sivut ja p puolet sen piiristä.



Todistus harjoitustehtävänä 81.

Harjoitustehtäviä

Pythagoraan lause

56. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 12, 16 ja 20. Laske kolmion pienin korkeus.

57. Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien projektiot jakavat hypotenuusan $5:9$. Laske kateettien suhde.

58. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 13 ja kateettien summa 17. Laske kateettien pituudet.

59. Tasakylkisen kolmion kanta on 16 ja kyljet 17. Laske kolmion ala.

60. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on janojen a ja b summa ja toinen kateetti niiden erotus. Todista, että toisen kateetin puolikas on janojen a ja b keskiverto.

61. Todista Pythagoraan lauseen käänteislause: Jos $a^2 + b^2 = c^2$, kolmio on suorakulmainen. (Vinkki: kosinilause.)

62. **a)** Olkoon suora s ja sen ulkopuolinen piste A annettu. Olkoon B suoralla s siten, että AB on lyhin mahdollinen. Osoita, että $AB \perp s$.
b) Osoita, että ympyrän pisteeseen piirretty säde ja tangentti ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

63. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 4. Pidemmällä kateetilla oleva piste P on yhtä kaukana kolmion terävien kulmien kärjistä. Missä suhteessa P jakaa kateetin?

64. Puoliympyrään, jonka halkaisija on 2, piirretään suorakulmio, jonka sivujen suhde on 1:2. Laske suorakulmion ala.

65. Neljäkkään sivut ovat pituudeltaan 5 ja toinen lävistäjä 6. Laske neljäkkään korkeus.

66. Kolmion sivujen pituudet ovat $2a$, $a^2 + 1$ ja $a^2 - 1$. Millainen on kolmion suurin kulma?

67. Kolmion sivut ovat $x + 1$, $2x$ ja $3x - 1$. Mikä täytyy arvon x olla, jotta kolmio olisi suorakulmainen?

68. Kolmion sivut ovat 5, 8 ja 5. Laske kolmion korkeusjanojen pituudet.

69. Kolmioon, jonka sivut ovat 3, 4 ja 5, on piirretty suorakulmio, jonka sivujen suhde on $1:2$ ja jonka lyhyemmistä sivuista toinen on kolmion pisimmällä sivulla. Laske suorakulmion sivut.

70. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 5 ja 12. Kuinka pitkiin osiin kolmion pienimmän kulman puolittaja jakaa leikkaamansa sivun?

71. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 116 ja suoran kulman puolittaja jakaa sen suhteessa $20:21$. Laske kolmion kateettien pituudet.

72. Laske suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittajasta kolmion sisään jäävän osan pituus, kun kolmion kateetit ovat 1 ja 2.

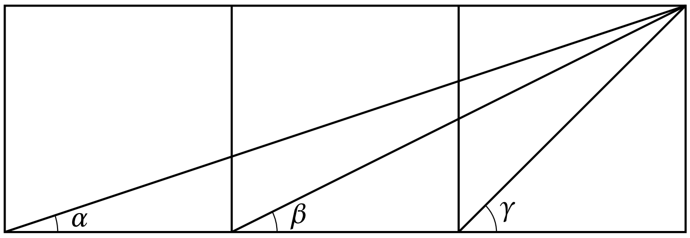
73. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat ovat 15 ja 36. Laske suuremman kateetin vastaisen kulman puolittajasta kolmion sisään jäävän osan pituus.

74. Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 2 ja sen viereisen terävän kulman puolittajasta kolmion sisään jäävän osan pituus on $\sqrt{5}$. Kuinka suuri on toinen kateetti?

75. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 10 ja 24. Suuremmalla kateetilla oleva piste keskipisteenä piirretään ympyrä, joka sivuaa toista kateettia ja hypotenuusaa. Laske ympyrän säde.

76. Olkoon M suorakulmaisen kolmion $\triangle ABC$ hypotenuusalla BC, ja olkoot pisteet N ja P pisteen M projektiot kateeteille AB ja AC. Missä kohtaa pisteen M täytyy olla, jotta NP olisi mahdollisimman lyhyt?

77. Kuvassa on kolme neliötä. Osoita, että $\alpha + \beta = \gamma$.



Kolmion kulman puolittaja

78. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 5, 12 ja 13. Mihin suhteisiin suoran kulman puolittaja jakaa leikkaamansa mediaanit? (Mediaanit ovat kolmion kärjen ja sen vastaisen sivun keskipisteen yhdistäviä janoja.)

79. Kolmion ABC kulma A on suora. Todista, että kulman B puolittaja kohtaa A:sta piirretyn korkeusjanan AD sellaisessa pisteessä E, että $AE : ED = BC : AB$.

80. Ulkokulmanpuolittajalause. Osoita, että kolmion ABC kulman A vieruskulman puolittaja leikkaa sivun BC jatkeen sellaisessa pisteessä P, että

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Vihje: Piirrä pisteen P kautta suoran AC suuntainen suora.

Kosinilause ja Heronin kaava

81. Heronin kaava. Osoita, että kolmion ala voidaan laskea kaavalla $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, missä a, b ja c ovat kolmion sivut ja p kolmion piirin puolikas eli $\frac{1}{2}(a+b+c)$.
(Vihje: kolmion alan sinikaava $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kosinilause)

82. Mikä on kolmion ala, jos sen sivut ovat 3, 4 ja 6? Entä 6, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{50}$?

83. Olkoon tavanmukaisesti kolmion $\triangle ABC$ sivut a, b ja c, kulmat α, β ja γ, sekä piirin puolikas p. Osoita, että $\alpha \leqslant 60°$ jos ja vain jos

$$(p-b)(p-c) \leqslant \frac{bc}{4}.$$

84. Kolmion sivut ovat a, b ja c. Selvitä milloin a^2, b^2 ja c^2 ovat myös jonkin kolmion sivut.

Sinilause

85. Olkoon janat AB ja CD yhtä pitkiä, $\angle ACD = 90°$ ja janojen AC ja BD leikkauspiste M. Osoita, että $BM \leqslant DM$.

86. Todista kulmanpuolittajalause käyttäen sinilausetta.

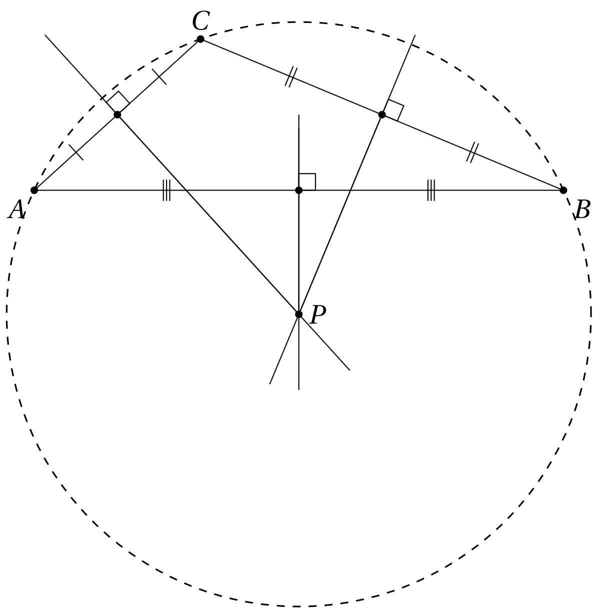
87. Osoita kolmion ala sinikaava: jos kolmion sivujen a ja b välinen kulma on γ, kolmion ala on $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

2.3 KOLMION MERKILLISET PISTEET

Kolmioilla on monia yleisiä ominaisuuksia, joita hyödynnetään jatkuvasti geometrisessa päättelyssä. Erityisen hyödyllisiä ovat niin sanotut kolmion merkilliset pisteet, eli kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste, sivujen keskinormaalien leikkauspiste, keskijanojen eli mediaanien leikkauspiste ja korkeusjanojen leikkauspiste.

Keskinormaalit

Lause: Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat yhdessä pisteessä, ja tämä piste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

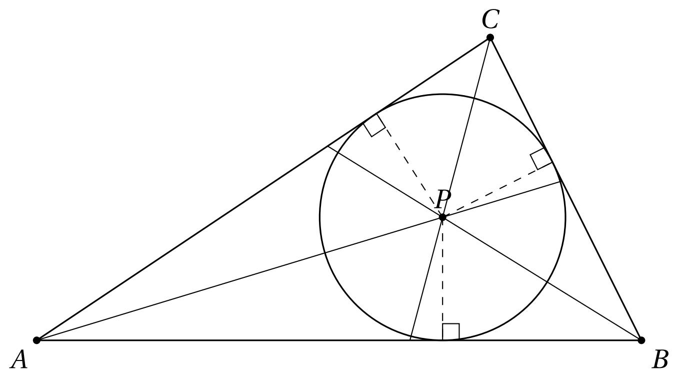


Todistus. Tutkitaan kolmion ABC sivujen AC ja BC keskinormaalien leikkauspistettä P. Koska P on sivun AC keskinormaalilla, se on yhtä etäällä pisteistä A ja C, eli $|PA| = |PC|$. Koska P on myös sivun BC keskinormaalilla, $|PB| = |PC|$. Nämä yhdistämällä saadaan $|PA| = |PB|$, joten P on myös sivun AB keskinormaalilla. Keskinormaalit leikkaavat siis yhdessä pisteessä.

Koska piste P on yhtä etäällä pisteistä A, B ja C, voidaan piste P keskipisteenä ja esimerkiksi jana PA säteenä piirtää ympyrä, jonka kehällä ovat pisteet A, B ja C (kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä). Kolmion ympäri piirrettyjä ympyröitä on vain yksi, koska minkä tahansa sellaisen ympyrän keskipiste on yhtä etäällä kärjistä A, B ja C eli keskipiste on keskinormaalien leikkauspiste. □

Kulmanpuolittajat

Lause: Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat yhdessä pisteessä, ja tämä piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



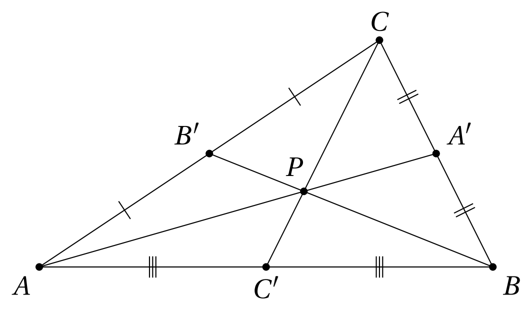
Todistus. Kolmion ABC kulmien A ja B kulmanpuolittajien leikkauspiste olkoon P. Koska piste P on kulman A puolittajalla, se on yhtä etäällä kyljistä AB ja AC. Koska P on kulman B puolittajalla, se on yhtä etäällä kyljistä AB ja BC. Näin ollen P on yhtä kaukana sivuista AC ja BC, joten se on myös kulman C puolittajalla. Kulmanpuolittajat leikkaavat siis yhdessä pisteessä P.

Koska P on yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista, sen kautta voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa jokaista sivua. Näitä sisäympyröitä on vain yksi, sillä jokaisen tällaisen ympyrän keskipiste on yhtä etäällä kolmion sivuista eli kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä. □

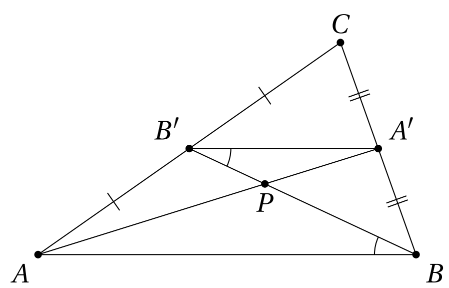
Mediaanit

Kolmion *mediaanit* eli *keskijanat* ovat kolmion kärjen ja sen vastakkaisen sivun keskipisteen yhdistäviä janoja.

Lause: Kolmion mediaanit leikkaavat yhdessä pisteessä (*painopiste*) ja jakavat toisensa 2 : 1 kolmion kärjestä lukien.



Todistus. Piirretään kolmiolle mediaanit AA' ja BB'.
Olkoon niiden leikkauspiste P.



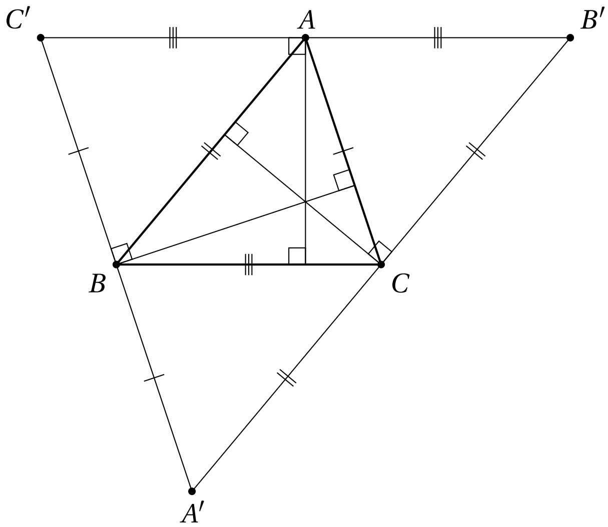
Kolmiot CAB ja $CA'B'$ ovat yhdenmuotoisia (sks), joten $A'B' = \frac{1}{2}AB$ ja samankohtaisten kulmien perusteella $AB \parallel A'B'$. Tästä seuraa, että kolmiot PAB ja $PA'B'$ ovat yhdenmuotoiset (samankohtaiset kulmat B ja B' sekä A ja A'). Koska $A'B' = \frac{1}{2}AB$, myös $PA' = \frac{1}{2}AP$ ja $PB' = \frac{1}{2}PB$.

Mediaanit AA' ja BB' jakavat siis toisensa suhteessa $2:1$ kolmio kärjistä luettuna. Jos sama päättely toistetaan alusta mediaanille AA' ja kolmannelle mediaanille CC', havaitaan että myös ne jakavat toisensa suhteessa $2:1$. Koska BB' ja CC' jakavat AA':n samassa suhteessa, kaikki kolme mediaania leikkaavat yhdessä pisteessä. □

Korkeusjanat

Lause: Kolmion korkeusjanat leikkaavat yhdessä pisteessä (*ortokeskus*).

Todistus. Olkoon ABC kolmio. Piirretään kolmion kärkien kautta niiden vastaisten sivujen suuntaiset suorat, jotka leikkaavat pisteissä A', B' ja C'. Osoitetaan, että kolmion ABC korkeusjanat ovat kolmion $A'B'C'$ sivujen keskinormaaleja, jolloin ne leikkaavat yhdessä pisteessä.



Nelikulmiot $ABCB'$ ja niin edelleen ovat suunnikkaita, koska niiden sivut ovat yhdensuuntaiset. Siis $C'A = AB'$ ja niin edeleen. Kolmion ABC korkeusjanat ovat siis kolmion $A'B'C'$ sivujen keskinormaaleja, joten ne leikkaavat yhdessä pisteessä.

□

Sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet

Lause. Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r ja ympäri piirretyn ympyrän säde R voidaan laskea kaavoilla

$$r = \frac{A}{p}, \quad R = \frac{abc}{4A},$$

missä A on kolmion pinta-ala, a, b ja c kolmion sivut sekä p kolmion piirin puolikas.

Todistus.
Olkoon kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste P. Kolmioiden ABP, BCP ja CAP kannat ovat kolmion ABC sivuja ja kunkin korkeus on r. Kyseisten

kolmioiden pinta-aloille pätee siis

$$\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=A \Leftrightarrow A=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=pr \Leftrightarrow r=\frac{A}{p}. \square$$

Toisaalta ympäri piirretyn ympyrän säteelle pätee sinilauseen nojalla

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{abc}{2bc\sin\alpha}=\frac{abc}{4A}. \square$$

Harjoitustehtäviä

Kolmion merkilliset pisteet

88. Kolmion keskijanojen leikkauspisteen kautta piirretään kolmion yhden sivun suuntainen suora. Tätä vastaan kohtisuoran korkeusjanan pituus on 5. Kuinka pitkiin osiin korkeusjana jakaantuu?

89. AD on teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjana ja O korkeusjanojen leikkauspiste. Todista, että $AD:BD=CD:OD$.

90. Osoita, että kolmion mediaanit jakavat kolmion kuuteen alaltaan yhtä suureen kolmioon.

91. Todista, että suorakulmaisen kolmion keskijanojen neliöiden summa on $\frac{3}{4}$ sivujen neliöiden summasta.

92. Kolmion sivut ovat a, b ja c ja mediaanit m_a, m_b ja m_c. Osoita, että

$$\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=m_a^2+m_b^2+m_c^2.$$

93. Tylppäkulmaisen kolmion ortokeskus sijaitsee kyseisen kolmion ulkopuolella.

94. Osoita, että kolmio, jolla on kaksi yhtä pitkää mediaania, on tasakylkinen.

95. Pisteet D ja E ovat kolmion $\triangle ABC$ sivuilta BC ja AC. Lisäksi janat AF ja BF puolittavat kulmat $\angle CAD$ ja $\angle CBE$. Osoita, että $\angle AEB+\angle ADB=2\cdot\angle AFB$.

96. Kolmion $\triangle ABC$ sivulla AC on piste D siten, että $AB=AD$. Mikä on kulma $\angle CBD$, kun tiedetään, että $\angle ABC=30°+\angle ACB$?

97. Minkä muotoinen kolmio on, jos sen korkeusjanojen keskipisteet sijaitsevat samalla suoralla?

Kolmion sisään ja ympäri piirretyt ympyrät

98. Mihin suhteeseen tasasivuisen kolmion sisään piirretyn ympyrän kehä jakaa kolmion korkeusjanat?

99. Tasasivuisen kolmion sivu on a. Laske sen sisään ja ympäri pirrettyjen ympyröiden säteet.

100. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 2. Laske sen sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet.

101. Tasakylkisen kolmion kanta on 5 ja korkeus 6. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

102. Tasakylkisen kolmion kanta on 6 ja kylki 4. Laske kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

103. Tasakylkisen kolmion kanta on 5 ja kylki 10. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet sekä niiden suhde.

104. Tasakylkisen kolmion kanta on 40 ja kylki 52. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröideniden keskipisteiden väli.

105. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 8 ja 6. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

106. Todista, että suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän halkaisija on $a+b-c$, missä a ja b ovat kateetit ja c hypotenuusa.

107. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 1 ja kolmion kateetti 3. Mihin suhteeseen kolmion pienimmän kulman puolittaja jakaa leikkaamansa sivun?

108. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat $2a-1$ ja $a+2$ sekä hypotenuusa $2a+1$. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

109. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on janojen a ja b summa ja toinen kateetti niiden erotus. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde a:n ja b:n funktiona.

110. Kolmion sivut ovat 3, $\sqrt{6}$ ja $\sqrt{15}$. Laske sen sisään piirretyn ympyrän säde.

111. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 1 ja 2. Kuinka pitkän jänteen kolmion sisään piirretyn ympyrän kehä erottaa kolmion suoran kulman puolittajasta?

112. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet hypotenuusan päätepisteistä ovat 1 ja $\sqrt{2}$. Laske hypotenuusan pituus.

113. Kolmion, jonka sivut ovat a, b ja c, ympäripiirretyn ympyrän säde on 1. Osoita, että $a+b+c \geqslant abc$. Voit olettaa tunnetuksi, että kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on vähintään kolmion sisään piirretyn ympyrän halkaisija (tehtävä 157).

114. Jos kolme ympyrää sivuavat toisiaan pareittain ulkoisesti ja niiden keskipisteet ovat kolmion $\triangle ABC$ kärjet, niin niiden säteet ovat $p-a$, $p-b$ ja $p-c$, missä a, b ja c ovat kolmion $\triangle ABC$ sivut ja p on sen piirin puolikas.

115. Tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ keskipisteen O kautta kulkee suora, joka leikkaa kolmioiden $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ ja $\triangle OCA$ ympäripiirretyt ympyrät pisteissä K, L ja M. Osoita, että

$$OK^2 + OL^2 + OM^2 = 2 \cdot AB^2.$$

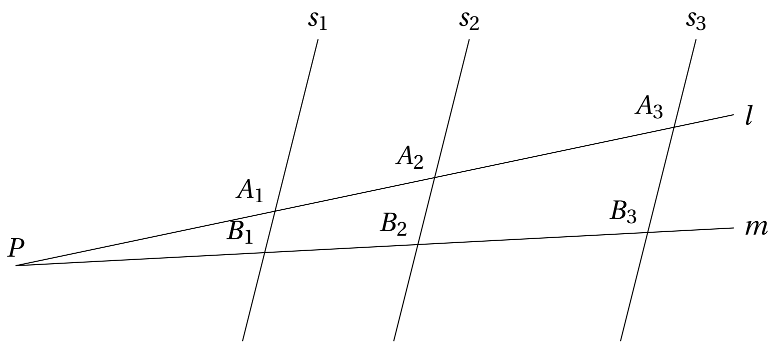
116. Osoita, että seuraava osa leikkausaksioomista seuraa muista postulaateista: Jos kahdella ympyrällä on kolme yhteistä pistettä, ne ovat sama ympyrä.

117. Viidestä ympyrästä millä tahansa neljällä on yhteinen piste. Osoita, että kaikilla viidellä on yhteinen piste.

2.4 YHDENSUUNTAISET LEIKKAAJAT

Lause. Yhdensuuntaiset suorat erottavat leikaamistaan suorista osia, jotka ovat keskenään verrannolliset. Kääntäen: jos erotetut osat ovat verrannolliset, leikkaajat ovat yhdensuuntaiset.

Todistus. Olkoot s_1, s_2 ja s_3 yhdensuuntaisia suoria, jotka leikaavat suoria l ja m pisteissä A_1, A_2 ja A_3 sekä B_1, B_2 ja B_3.



Tapaus 1: Suorat l ja m leikkaavat pisteessä P. Tällöin kolmio $PA_1B_1 \sim PA_2B_2 \sim PA_3B_3$ ($\sim kk$ samankohtaisten kulmien perusteella), joten

$$\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

Tapaus 2: Suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset. Tällöin $A_1B_1B_2A_2$ ja $A_2B_2B_3A_3$ ovat suunnikkaita, joten $A_1A_2 = B_1B_2$ ja $A_2A_3 = B_2B_3$. □

Harjoitustehtäviä

118. Kolmioon ABC, jonka kulma C on suora, piirretään korkeusjana CD sekä D:stä sivun BC normaali, joka leikkaa BC:n pisteessä E. Kuinka suuri on $BC : BE$, kun $AD : BD = \frac{3}{4}$?

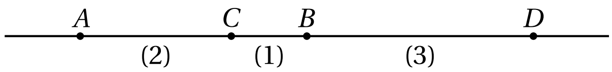
119. Janan AB päätepisteen kautta piirretystä suorasta erotetaan peräkkäin janat $AC = CD = DE$. Janan EB jatkeelta erotetaan $BF = BE$. Osoita, että suora CF puolittaa janan AB.

2.5 JANAN JAKO

Piste P janalla AB tai sen jatkeella jakaa janan osiin. Sanotaan, että piste jakaa janan (sisäpuolisesti tai ulkopuolisesti) suhteeseen $AP : PB$. Tietyillä jakosuhteilla on omat nimityksensä.

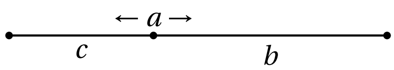
Harmoninen jako. Pisteet C ja D jakavat janan AB *harmonisesti* tiettyyn suhteeseen, mikäli toinen jakaa janan sisäisesti ja toinen ulkoisesti kyseiseen suhteeseen.

Näin on esimerkiksi, jos lukusuoralla ovat järjestyksessä pisteet A,C,B ja D ja $AC = 2$, $CB = 1$, $BD = 3$. Tällöin $AD : DB = AC : CB = 2 : 1$, eli jako on harmoninen.



Tähän määritelmään perustuu myös *harmoninen keskiarvo*:
Olkoot O, A ja B pisteitä janalla niin, että O ei ole keskellä. Olkoot pituudet $OA = a$ ja $OB = b$. Lukujen a ja b harmoninen keskiarvo on janan OC pituus, missä O ja C jakavat janan AB harmonisesti. (Katso tehtävä 124.)

Kultainen leikkaus. *Jatkuva suhde* eli *kultainen leikkaus* syntyy, kun jana, jonka pituus on a, jaetaan osiin b ja c siten, että $c : b = b : a$.



Harjoitustehtäviä

120. Laske kultaisen leikkauksen lukuarvo ja sen käänteisluku.

121. Pisteet A ja C jakavat janan BD harmonisesti suhteessa $\frac{3}{4}$. Mihin suhteeseen pisteet B ja D jakavat janan AC?

122. Pisteet C ja D jakavat janan AB harmonisesti suhteeseen $1 : 3$. Mihin suhteeseen janan AD keskipiste jakaa janan BC?

123. Pisteet C ja D jakavat janan AB harmonisesti jatkuvaan suhteeseen. Mihin suhteeseen B jakaa janan CD?

124. Laske lukujen a ja b harmoninen keskiarvo.

125. Janan pituus on 10. Pisteet A ja B jakavat sen harmonisesti jatkuvaan suhteeseen. Laske janan AB pituus.

126. Jana $AB = 1$. Piste C jakaa sen sisäpuolisesti suhteeseen $1\frac{1}{2}$ ja piste D ulkopuolisesti suhteeseen $\frac{1}{3}$. Mihin suhteisiin pisteet A ja B jakavat janan CD?

127. Jana $AB = 6$. Piste C jakaa sen sisäpuolisesti suhteeseen $2 : 3$ ja piste D ulkopuolisesti suhteeseen 2. Mihin suhteeseen piste A jakaa janan DC?

128. A, B ja C ovat suoran pisteitä (tässä järjestyksessä). Etsi piste D siten, että B ja D jakavat harmonisesti janan A.

129. Osoita, että säännöllisen viisikulmion lävistäjät jakavat toisensa kultaisen leikkauksen suhteessa.

2.6 YMPYRÖISTÄ

Seuraavaksi todistamme ympyröihin liittyvät perustavanlaatuiset lauseet.

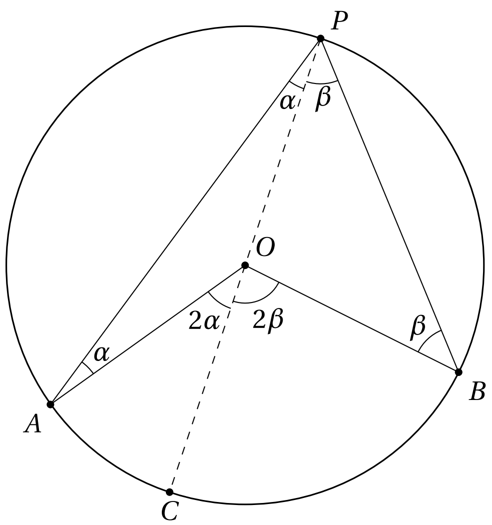
Kehäkulmalause

Ympyrän kaaren *keskuskulma* on kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä ja kyljet rajaavat kyseisen kaaren. Kaarta vastaava *kehäkulman* kärki on ympyrän kehällä ja sen kyljet rajaavat kyseisen kaaren. Kehäkulman kärki ja kaaren toinen päätepiste voivat yhtyä, jolloin kulman toinen kylki on ympyrän tangentti.

Kehäkulmalause. Ympyrän samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret ja puolet vastaavasta keskuskulmasta.

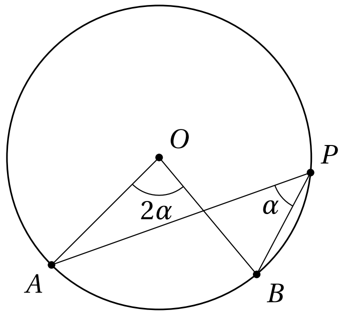
Todistus. Riittää osoittaa, että kehäkulma on aina puolet keskuskulmasta.

Tapaus 1: Ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeamassa

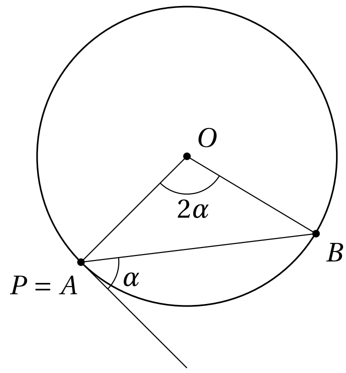


Olkoon $\angle BOA$ keskuskulma ja $\angle BPA$ vastaava kehäkulma. C on piste janan PO jatkeella. Kolmiot AOP ja BOP ovat tasakylkisiä, joten niiden kantakulmat ovat yhtä suuret. Huippukulman vieruskulma on näiden kantakulmien summa kummallakin kolmiolla, joten $\angle BOC = 2\angle BPC$ ja
$\angle COA = 2\angle CPA$. □
Todistus pätee myös, kun toinen kulmista COA ja BOC on nollakulma eli toinen kehäkulman sivuista on ympyrän halkaisija.

Tapaus 2: Ympyrän keskipiste ei ole kehäkulman aukeamassa. Harjoitustehtävä 131.



Tapaus 3: Kehäkulman toinen kylki on ympyrän tangentti. Harjoitustehtävä 132.

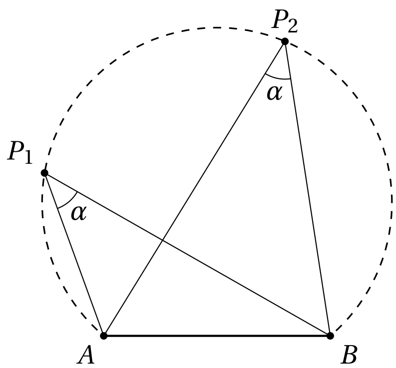


Seuraus 1. Puoliympyrän kehäkulma on suora. (Thaleen lause)

Seuraus 2. Eksplementtikaaria vastaavat kehäkulmat ovat suplementtikulmia. (Tehtävä 130.)

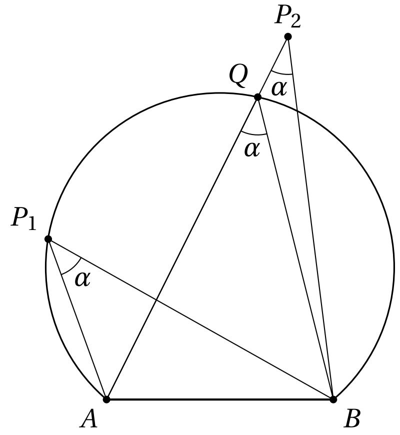
Kehäkulmalause pätee myös kääntäen:

Käänteinen kehäkulmalause. Mikäli pisteet P_1 ja P_2 ovat samalla puolella suoraa AB ja näkevät janan AB samassa kulmassa, pisteet A, B, P_1 ja P_2 ovat samalla ympyrällä.



Todistus. Oletetaan, että $\angle AP_1B = \angle AP_2B = \alpha$, mutta piste P_2 ei olekaan ympyrällä ABP_1. Ainakin toinen suorista P_2A ja P_2B leikkaan ympyrän kaaren, olkoon se P_1A. Olkoon Q janan P_2A (tai sen jatkeen) ja mainitun ympyränkaaren leikkauspiste.

Nyt sekä $\angle AQB = \alpha$ että $\angle AP_2B = \alpha$, mikä on mahdotonta, sillä kolmion kulma on sen toisten kulmien vieruskulmia pienempi. Vastaoletus oli siis väärä. $\square$

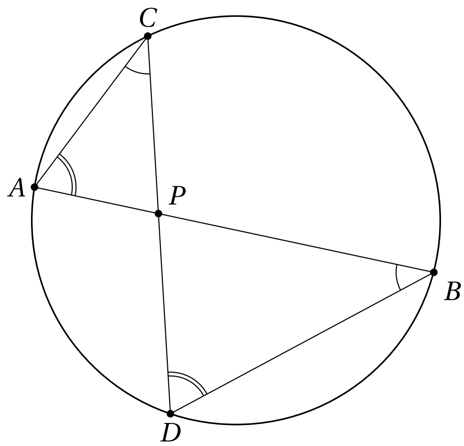


Pisteen potenssi

Määritelmä. Olkoot Γ ympyrä ja P jokin piste. Pisteen P kautta piirretyn suoran s ja ympyrän Γ leikkauspisteet olkoot A ja B. Tuloa $PA \cdot PB$ kutsutaan pisteen P potenssiksi ympyrän Γ suhteen.

Pisteen potenssi
Pisteen P potenssi $PA \cdot PB$ on suoran s valinnasta riippumaton vakio.

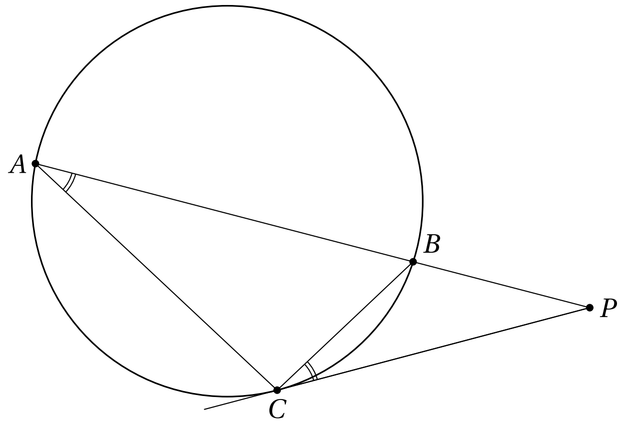
Todistus.
Tapaus 1: Piste on ympyrän sisällä.
Olkoon P ympyrän sisällä ja sen kautta piirretyn suoran ja ympyrän leikkauspisteet A ja B. Toisen P:n kautta piirretyn suoran ja ympyrän leikkauspisteet olkoot C ja D.



Kehäkulmalauseen perusteella $\angle BDC = \angle BAC$ ja $\angle ACD = \angle ABD$, joten kolmiot PAC ja PDB ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis
$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$. $\square$

Tapaus 2: Piste on ympyrän kehällä.
Tällöin pisteen potenssi on nolla suorasta s riippumatta.

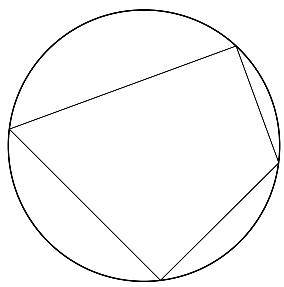
Tapaus 3: Piste on ympyrän ulkopuolella.
Suoraksi kelpaa myös ympyrän tangentti, kun tulkitaan että leikkauspisteet C ja D ovat sama piste. Riittää todistaa, että tulo $PA \cdot PB$ on aina yhtä suuri kuin PC^2, missä C on pisteen P kautta kulkevan tangentin ja ympyrän sivuamispiste.



Olkoot A ja B pisteen P kautta piirretyn suoran ja ympyrän leikkauspisteet ja PC ympyrän kehäpisteen C kautta piirretty tangentti. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle BCP = \angle PAC$, joten kolmiot PAC ja PCB ovat yhdenmuotoisia (kk).
Siis $\frac{AP}{CP} = \frac{CP}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC^2$. □

Jännenelikulmiot

Jännenelikulmio on nelikulmio, jonka ympäri voi piirtää ympyrän.

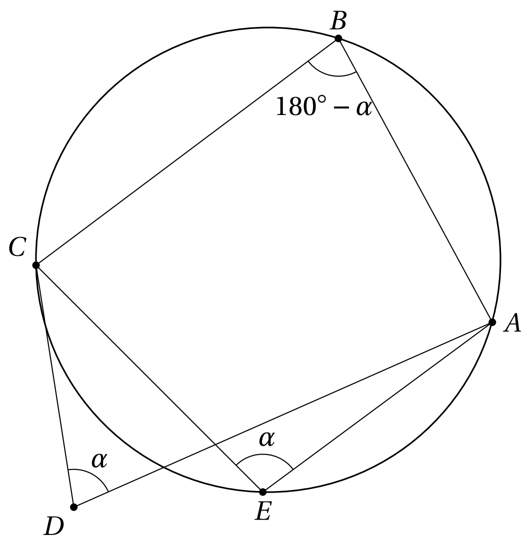


Kaikki nelikulmiot eivät ole jännenelikulmioita, koska jo kolme pistettä määrää ympyrän.

Lause. Nelikulmio on jännenelikulmio täsmälleen silloin kun nelikulmion vastakkaiset kulmat ovat suplementtikulmia.

Todistus. "⇒". Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Tällöin kulmia A ja C vastaavat keskuskulmat ovat eksplementtikulmia eli niiden summa on täysikulma. Kehäkulmien A ja C summa on puolet tästä eli oikokulma. A ja C ovat siis suplementtikulmia.

Koska nelikulmion kulmien summa on täykulma, myös B ja D ovat suplementtikulmia.
"$\Leftarrow$". Olkoot nelikulmion $ABCD$ kulmat A ja C suplementtikulmia, jolloin myös kulmat B ja D ovat. Piirretään kolmion ABC ympäri ympyrä. Kaikki kaaren AC pisteet E näkevät janan AC kulmassa $\angle D$, sillä näitä pisteitä vastaavat kehäkulmat ovat B:n suplementtikulmia edellisen kohdan nojalla. Piste D näkee janan AC siis samassa kulmassa kuin kaaren AC kehäpisteet, joten myös se on kyseisellä kaarella (käänteinen kehäkulmalause). □

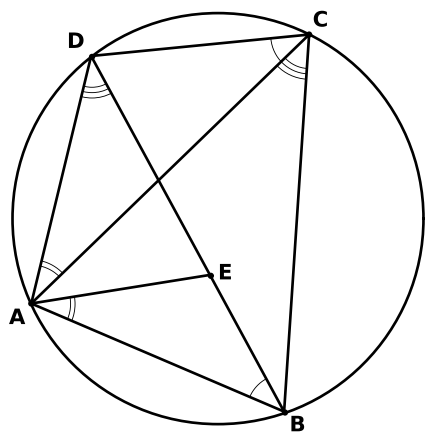


Ptolemaioksen lause

Ptolemaioksen lause. Jännenelikulmion vastakkaisten sivujen tulojen summa on lävistäjien tulo. Toisin sanoen jännenelikulmiolle $ABCD$ pätee

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Todistus. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle DBA = \angle DCA$ ja $\angle ADB = \angle ACB$. Konstruoidaan piste E janalle BD siten, että $\angle BAE = \angle CAD$ eli myös $\angle BAC = \angle EAD$. Koska E on janan BD sisäpiste, $\angle DBA = \angle EBA$ ja $\angle ADB = \angle ADE$. Käytetään yhdenmuotoisuuden kk-sääntöä:



$$\angle EBA = \angle DCA \text{ ja } \angle BAE = \angle CAD \quad \Rightarrow \quad ABE \sim ACD$$
$$\angle ACB = \angle ADE \text{ ja } \angle BAC = \angle EAD \quad \Rightarrow \quad ABC \sim AED$$

Koska E on janan BD sisäpiste, $BD = BE + DE$. Yhdenmuotoisuuksista seuraa, että

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ ja } \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}.$$

Kertomalla ristiin saadaan

$$BE \cdot AC = AB \cdot CD \text{ ja } DE \cdot AC = AD \cdot BC.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan

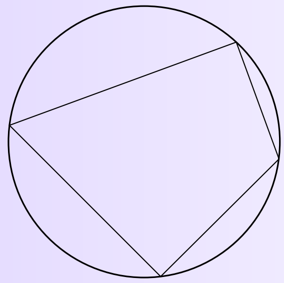
$$AC \cdot BD = AC \cdot (BE + DE) = BE \cdot AC + DE \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \square$$

Brahmaguptan kaava

Brahmaquptan kaava.
(Heronin kaavan yleistys)
Jännenelikulmion ala on

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

missä a, b, c ja d ovat jännenelikulmion sivut ja p puolet sen piiristä.



Todistus harjoitustehtävänä 158.

Harjoitustehtäviä

Kehäkulmalause

130. Todistettava, että jos ympyrän kehä jaetaan kahteen kaareen, näitä kaaria vastaavat kehäkulmat ovat suplementtikulmia.

131. Todista kehäkulmalause tapauksessa, jossa ympyrän keskipiste ei ole kehäkulman aukeamassa.

132. Todista kehäkulmalause tapauksessa, jossa kehäkulman kärki on sitä vastaavan kaaren päätepisteessä (jolloin kehkulman toinen kylki on ympyrän tangentti).

133. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 ja 8. Laske kolmion mediaanien pituudet.

134. Olkoon M ympyrän sisään piirretyn säännöllisen monikulmion $ABC\cdots$ eräs kärkipiste. Lävistäjien AC ja BM leikkauspiste on P. Todista, että $AB : AM = PB : PA$.

135. Osoita, että säännöllisen monikulmion lävistäjät jakavat monikulmion kulmat yhtä suuriin osiin.

136. Ympyrän sisään on piirretty kolmio ABC ja siihen korkeusjana AD. Todista, että kolmiot ADB ja ACE ovat yhdenmuotoiset, jos AE on ympyrän halkaisija.

137. Todista, että jos kolmioon ABC on piirretty mediaani BM ja korkeusjana CH sekä kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O, niin kolmiot OMA ja BHC ovat yhdenmuotoiset.

138. Ympyrään on piirretty kolmio ABC. A:n kautta piirretään sekantti yhdensuuntaiseksi B:n kautta kulkevan tangentin kanssa. Sekantti leikkaa BC:n tai sen jatkeen pisteessä D. Todista, että AB on BC:n ja BD:n keskiverto.

139. On annettu kaksi eri pistettä A ja B. Selvitä, mitkä kaikki pisteet ovat pisteen A projektioita pisteen B kautta kulkeville suorille.

140. On annettu kaksi eri pistettä A ja B. Mitkä pisteet ovat pisteen A peilikuvia pisteen B kautta kulkevien suorien suhteen?

141. Tylppäkulmaisen kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee kyseisen kolmion ulkopuolella.

142. Todista sinilauseen viimeinen yhtälö: jos a on kolmion sivu, α sitä vastaava kulma ja R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

143. Kolmion $\triangle ABC$ sisällä on piste P. Pisteen P projektiot kolmion $\triangle ABC$ sivuille ovat A_1, B_1 ja C_1. Pisteen P projektiot kolmion $\triangle A_1B_1C_1$ sivuille ovat A_2, B_2 ja C_2. Edelleen pisteen P projektiot kolmion $\triangle A_2B_2C_2$ sivuille ovat A_3, B_3 ja C_3. Käy niin, että kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A_3B_3C_3$ ovat yhdenmuotoiset. *(Neuberg)*

144. Kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän säde on R. p-säteinen ympyrä kulkee pisteen A kautta ja sivuaa suoraa BC pisteessä B. q-säteinen ympyrä kulkee myös pisteen A kautta ja sivuaa suoraa BC pisteessä C. Osoita, että $pq = R^2$.

145. Kolmion $\triangle ABC$ pisteistä A, B ja C lähtevät kulmanpuolittajat leikkaavat sen ympäripiirrettyä ympyrää pisteissä D, E ja F. Osoita, että $AD \perp EF$.

Pisteen potenssi

146. Nelikulmion lävistäjät jakavat toisensa osiin, joista voidaan muodostaa verranto siten, että toisen lävistäjän osat ovat verrannon keskimmäisinä jäseninä. Todista, että nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

147. Ympyrään piirretyssä nelikulmiossa $ABCD$ leikaavat AB:n ja DC:n jatkeet toisensa pisteessä E. Todista, että kolmiot EBC ja EDA ovat yhdenmuotoiset.

148. Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä P, jolloin $PC = 3$, $PD = 8$, $AB = 10$. Laske $AP : BP$.

149. Erään ympyrän kahden jänteen AB:n ja CD:n jatkeet leikkaavat toisensa pisteessä P siten, että $AB = 4$, $BP = 2$ ja $PD = 3$. Laske jänteen CD pituus.

150. Tasakylkisen kolmion kanta on 12 ja kylki 10. Kolmion korkeusjana halkaisijana piirretään ympyrä. Mihin suhteeseen ympyrän kehä jakaa leikkaamansa sivut?

151. Tasakylkisen kolmion kanta on puolet kyljestä. Mihin suhteeseen kannalle piirretty korkeusjana halkaisijana piirretyn ympyrän kehä jakaa kolmion kyljet?

152. Tasakylkisen kolmion korkeusjana halkaisijana piirretään ympyrä. Missä suhteessa sen kehä jakaa leikkaamansa sivut, kun kolmion kanta ja korkeus ovat yhtä suuret?

153. Kahden ympyrän leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran mielivaltaisesta pisteestä piirretään ympyröille tangentit. Todista, että ne ovat yhtä suuret.

154. Ympyrän halkaisijan AB päätepisteestä B piirretään ympyrän tangentti BC = 3. Ympyrän kehä leikkaa janan AC pisteessä D siten, että $AD : DC = 4 : 9$. Laske ympyrän säde.

155. Kahden ympyrän säteet ovat 8 ja 16 sekä niiden lyhin välimatka 8. Missä kohden ympyröiden keskijanalla on piste, jonka potenssi kummankin ympyrän suhteen on sama?

156. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I ja säde r. Saman kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja säde R. Osoita *Eulerin kaava*:
$OI^2 = R(R - 2r)$.

157. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ja r sisään piirretyn ympyrän säde. Todista, että $R \geqslant 2r$.

Ptolemaioksen ja Brahmaguptan lauseet

158. Jännenelikulmion sivut ovat a, b, c ja d ja sen piirin puolikas on p. Osoita, että jännenelikulmion ala on $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. *(Brahmaguptan kaava)* Toimiiko kaava myös sellaisilla nelikulmioilla, jotka eivät ole jännenelikulmioita?

159. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kylkien pituus on a, sen kantojen pituudet ovat b ja c ja sen lävistäjien pituus on d. Osoita, että $d^2 = a^2 + bc$.

160. Olkoon $ABCDEFG$ säännöllinen 7-kulmio. Todista, että $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AE}$.

161. Johda sinin ja kosinin summakaavat

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

ja

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Ptolemaioksen lauseen avulla. (Vihje: valitse $BD = 1$ ympyrän halkaisijaksi. Sijoita α ja β sopivasti.)

2.7 PINTA-ALOISTA

Määrittelimme suorakulmion pinta-alaksi luvun, joka saadaan suorakulmion kahden kohtisuoran sivun tulona. Tästä lähtien luvussa 1 osoitettiin harjoitustehtävinä, että kolmion ala on $ah/2$, missä a on kolmion sivu ja h kyseistä sivua vastaan piirretty korkeusjana. Monikulmioiden alat palautuvat kolmioiden aloihin.

Lisäksi postuloimme ympyrän alaksi $A = \pi r^2$ ja totesimme, että yhtenevien kuvioiden alat ovat samat ja yhdenmuotoisten kuvioiden alat verrannolliset vastinsivujen neliöiden suhteessa.

162. Laske tasasivuisen kolmion (sivu s) ala.

163. Kolmio leikataan sen yhden sivun suuntaisella suoralla siten, että syntyneen pikkukolmion sivu on $\frac{3}{4}$ alkuperäisen kolmion vastaavasta sivusta. Laske pikkukolmion ja alkuperäisen kolmion alojen suhde.

164. Kolmion mediaanien leikkauspisteestä piirretään yhden sivun suuntainen suora. Mihin suhteeseen se jakaa kolmion alan?

165. Kolmion ABC mediaanien AD ja BE leikkauspiste on O. Todista, että kolmiot AOE ja BOD ovat yhtä suuret.

166. Jos kolmiolla on kaksi yhtä pitkää korkeusjanaa niin se on tasakylkinen.

167. Kolmio on jaettu sen kannan suuntaisella suoralla kolmioon ja nelikulmioon, joiden alojen suhde on $4:5$. Kuinka suuriin osiin tämä suora jakaa kannalle piirretyn korkeusjanan, jonka pituus on 11?

168. Kolmion sivun suuntainen suora jakaa kolmion kahteen yhtä suureen osaan. Mihin suhteeseen suora jakaa kolmion sivut?

169. Kolmion kannan suuntainen suora jakaa kolmion osiin, joiden alojen suhde on 25:144. Laske syntyneen pikkukolmion ja alkuperäisen kolmion korkeuksien suhde.

170. Kolmiossa ABC on mediaani AD ja mediaanien leikkauspiste O. Laske kolmioiden BOD ja ABC alojen suhde.

171. Suorakulmaisen kolmion terävän kulman puolittaja jakaa vastaisen kateetin suhteessa $2:3$. Mihin suhteeseen toisen terävän kulman puolittaja jakaa kolmion alan?

172. Suorakulmaisen kolmion sisään on piirretty neliö siten, että yksi sen kulmista yhtyy kolmion suoraan kulmaan. Neliön ala on 9 ja kolmion ala 24. Laske kolmion sivujen pituudet.

173. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat x ja y. Laske kolmion ala.

174. Tasasivuisen kolmion ja neliön alojen suhde on puolet niiden sivujen suhteesta. Laske niiden sivujen suhde.

175. Tasasivuisen kolmion ja ympyrän alojen suhde on sama kuin niiden piirien suhde. Laske tämän suhteen suuruus.

176. Todista, että jos nelikulmion $ABCD$ lävistäjä AC puolittaa lävistäjän BD, niin AC jakaa nelikulmion kahteen yhtä suureen osaan.

177. Laske ympyrän sisään ja ympäri piirrettyjen neliöiden alojen suhde.

178. Neliön ja tasasivuisen kolmion alojen suhde on sama kuin niiden sisään piirrettyjen ympyröiden säteiden suhde. Laske tämän suhteen suuruus.

179. Jänne, jonka pituus on a, erottaa ympyrästä segmentin, jonka korkeus on a. Laske ympyrän ala.

180. r-säteisen ympyrän sektorin ala on $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi r^2$. Laske sektorin asteluku $1'$:n tarkkuudella.

181. Ympyrän sektoriin, jonka keskuskulma on $120°$. piirretään ympyrä, joka sivuaa sektorin kaarta ja säteitä. Laske tämän ympyrän ja sektorin alaojen suhde.

182. Laske ympyrän neljännekseen piirretyn ympyrän ja mainitun ympyrän neljänneksen alojen suhde.

183. Tasakylkisen kolmion sivujen suhde on $3:3:2$. Laske kolmion ympäri piirretyn ympyrän ja kolmion alojen suhde.

184. Kolme r-säteistä ympyrää sivuavat toisiaan siten, että jokainen sivuaa molempia muita. Laske niiden keskelle jäävän ympyrän kaarien muodostaman ”kolmion” ala.

185. $120°$ segmentistä leikataan pois $90°$:n segmentin suuruinen osa. Kuinka suuri on jäljelle jäävän kuvion ala, kun ympyrän säde on r?

186. $60°$:n ja $270°$:n sektorit ovat yhtä suuret. Laske ympyräiden säteiden suhde.

187. Laske tasasivuisen kolmion sisään piirretyn ympyrän alan suhde koko kolmion alaan.

188. Ympyrän sisään piirretään neliö, tämän sisään ympyrä ja viimeksi mainittun ympyrän sisään tasasivuinen kolmio. Laske kolmion ja suuremman ympyrän alojen suhde.

189. Tasasivuisen kolmion sisään on piirretty ympyrä, tämän sisään tasasivuinen kolmio, jonka sisään on vielä piirretty ympyrä. Laske pienemmän ympyrän alan suhde alkuperäisen kolmion alaan.

190. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat $a+1$, $3a$ ja $3a+1$. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden alojen suhde.

191. Suorakulmaisen kolmion terävän kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun suhteeseen 2:3. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden alojen suhde.

192. Laske ympyrän sisään ja ympäri piirrettyjen säännöllisten kuusikulmioiden alojen suhde.

193. Ympyrän sisään on piirretty tasakylkinen kolmio, jonka kanta on yhtä kuin ympyrän säde = 2. Laske kolmion ala.

194. Suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on 13 ja sisään piirretyn ympyrän halkaisija 4. Laske kolmion ala.

195. Kuperan nelikulmion sisäpisteestä piirretään janat nelikulmion sivujen keskipisteisiin, jolloin syntyy neljä pienempää nelikulmiota. Osoita, että vastakkaisten pienten nelikulmioiden alojen summat ovat yhtä suuret.

196. Tasasivuisen kolmion sisällä on piste P. Osoita, että summa pisteen P ja kolmion sivujen välisistä etäisyyksistä ei riipu pisteen P valinnasta.

197. Suunnikkaan $ABCD$ kärki C on suunnikkaan $DEFG$ sivulla FG ja samoin piste E on janalla AB. Osoita, että suunnikkailla $ABCD$ ja $DEFG$ on sama ala.

198. Osoita, että jos nelikulmion lävistäjä jakaa kyseisen nelikulmion kahteen yhtä suureen kolmioon, niin se myös jakaa toisen lävistäjän kahteen yhtä pitkään osaan. Osoita myös että jos nelikulmion lävistäjä jakaa vastakkaisen lävistäjän kahteen yhä pitkään osaan, niin se myös jakaa koko nelikulmion kahdeksi alaltaan yhtä suureksi kolmioksi.

199. Kolmesta eri r-säteisestä ympyrästä jokainen kulkee kahden muun keskipisteiden kautta. Mikä on ympyröiden yhteisen alueen ala?

200. Kolmion korkeusjanat ovat h_a, h_b ja h_c ja sisäänpiirretyn ympyrän säde r. Osoita, että

$$\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\geqslant\frac{1}{3r^2}.$$

201. Jännenelikulmion ala on S ja piirin puolikas p. Osoita, että jos $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2$, niin kyseinen nelikulmio on neliö.

202. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio ja P sen lävistäjien leikkauspiste. Osoita, että

$$|\triangle PAB|+|\triangle PCD|=|\triangle PBC|+|\triangle PDA|$$

jos ja vain jos P on toisen lävistäjän keskipiste.

203. Kolmion $\triangle ABC$ sivulla BC sijaitsevat pisteet M ja N siten, että $\angle BAM = \angle CAN$. Osoita, että

$$\frac{MB}{MC}+\frac{NB}{NC}\geqslant 2\frac{AB}{AC}.$$

LUKU 3

Harppi ja viivain -konstruktioita

Klassisen geometrian perinteeseen kuuluvat keskeisesti harppi ja viivain -konstruktiotehtävät. Tarkoitus on piirtää tietty geometrinen kuvio käyttäen apuvälineenä vain harppia ja viivoitinta.

Tämä on hieman eri asia kuin aiemmin tarkastelmamme geometria. Käyttöön otetut postulaatit puhuvat erilaisten geomertisten objektien (suorien kulmien, kulmnapuolittajien, keskipisteiden) olemassaolosta ja ominaisuuksista, mutta eivät kerro miten ne voi piirtää. Ei ole itsestään selvää, että ”kaiken olemassa olevan” voisi piirtää harpilla ja viivaimella. Esimerksi yleisen kulman kolmijako on mahdotonta.

Harppi ja viivain -konstruktioissa käytössä on ympyröitä piirtävä harppi ja suora viiivain, jossa ei ole mitta-asteikkoa. Täsmällisyyden nimissä ”piirtäminen” abstrahoidaan kahdeksi postulaatiksi:

Viivainpostulaatti (VP): Kahden pisteen kautta voidaan piirtää suora.

Harppipostulaatti (HP): Kahden pisteen avulla voidaan piirtää ympyrä siten, että toinen piste on keskipisteenä ja pisteinen välinen jana säteenä.

Lisäämme tähän myös mukavuuden vuoksi postulaattina lauseen, jonka todistaminen on harjoitustehtävänä (244):

Mittauspostulaatti (MP): Voidaan piirtää ympyrä, kun keskipiste ja säteen mittainen jana on annettu. Harpilla voi siis mitata janan.

Seuraavissa tehtävissä ei niinkään ole tarkoitus keskittyä huolelliseen piirtelyyn vaan löytää toimiva konstruktio ja perustella se oikeaksi. Aiempia konstruktioita voi luonnollisesti hyödyntää myöhemmissä. Konstruktiotehtävät on merkitty harppisymbolilla .

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

Peruskonstruktoita

204. Siirrettävä jana toiselle suoralle.

205. Siirrettävä annettu kulma siten, että uutena kylkenä on annettu puolisuora.

206. Puolitettava jana.

207. Piirrettävä janalle keskinormaali.

208. Puolitettava kulma.

209. Piirrettävä suoralle normaali annetun pisteen kautta, kun piste on a) suoran ulkopuolella b) suoralla.

210. Piirrettävä suoran kanssa yhdensuuntainen suora annetun suoran ulkopuolisen pisteen kautta.

211. Piirrettävä tasasivuinen kolmio sekä neliö.

212. Piirrettävä säännöllinen kuusikulmio.

213. Etsittävä annetun ympyrän keskipiste.

214. Piirrettävä kolmen annetun pisteen kautta ympyrä.

215. Piirrettävä ympyrälle tangentti annetun *a*) kehällä olevan *b*) ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta.

216. Piirrettävä ympyrälle tangentti, joka on annetun suoran suuntainen.

217. Jaettava jana kolmeen yhtä suuren osaan. Keksittävä ainakin neljä erilaista ratkaisua.

218. Jaettava jana n yhtä suureen osaan.

219. Jaettava jana suhteessa $p : q$, missä p ja q ovat annettuja janoja.

220. Olkoon annettu kolme janaa, joiden pituudet ovat a, b ja c. Konstruoitava jana, jonka pituus on ab/c.

221. Olkoon janat a ja b annettu. Piirrettävä a:n ja b:n aritmeettisen, geometrisen ja harmonisen keskiarvon mittaiset janat.

222. Piirrettävä säännöllinen viisikulmio.

Huomautus: Harppi- ja viivainaksioomat nojaavat siihen, että kaksi pistettä on annettuna. Oletimme siksi edellisissä tehtävissä implisiittisesti, että esimerkiksi suoralta ja ympyrältä voidaan valita satunnaisia pisteitä tarpeen mukaan. Seuraavat tehtävät osoittavat kuitenkin, että tämä oletus on tarpeeton kunhan meillä on kaksi pistettä joista lähteä konstruoimaan.

223. Olkoon kaksi pistettä annettuna. Konstruoi jokin piste annetulta suoralta.

224. Olkoon kaksi pistettä annettuna. Konstruoi jokin piste annetulta ympyrältä.

Laskutoimituksia harpilla ja viivaimella

Koska janoilla on pituus, ne voidaan rinnastaa positiivisiin lukuihin. Janoilla voidaan siis myös laskea: konstruktion tuloksena on halutun laskutoimituksen mittainen jana.

225. Janat a ja b on annettu. Konstruoitava janat $a+b$ ja $a-b$.
(Helppo! Mitä pitää huomioida?)

226. Janat a ja b on annettu, sekä jana jonka pituus on 1. Konstruoi tulon ab mittainen jana. (Vinkki: yhdenmuotoiset kolmiot)

227. Miksi edellisessä tehtävässä ykkösen mittainen jana on välttämätön?

228. Janat a ja b on annettu, sekä jana jonka pituus on 1. Konstruoi osamäärän $\frac{a}{b}$ mittainen jana.

229. Janan AB pituus on a. Suoralta AB valitaan pisteen B toiselta puolelta piste C siten, että $BC = 1$. Piirretään ympyrä, jonka halkaisija on AC. Piirretään pisteen B kautta suoran AB normaali. Minne syntyi jana, jonka pituus on $\sqrt{a}$?

230. Janat a ja b on annettu, mutta ei yksikköjanaa. Konstruoitava janojen geometrisen keskiarvon $\sqrt{ab}$ mittainen jana.

231. Lukusuoralle on merkitty lukujen 0 ja 1 sijainnit. Mitä lukuja pystyt merkitsemään lukusuoralle harpin ja viivaimen avulla?

Tässä esiintyneitä konstruktioita voitaisiin pitää myös janojen yhteen- vähennys- kerto- ja jakolaskun määritelminä, jolloin ei tarvitsisi postuloidan, että janan pituus on *luku*. Voitaisiin vain puhua yhtenevistä janoista sekä suuremmista ja pienemmistä.

Sekalaisia tehtäviä

232. Piirrettävä ympyrä, jonka säde on annetun janan pituinen ja joka sivuaa kahta annettua toisensa leikkaavaa suoraa.

233. Piirrettävä tasakylkinen kolmio, jonka kanta ja kyljen vastainen korkeus ovat tunnetut.

234. Piirrettävä kahden toistensa ulkopuolella olevan ympyrän yhteiset tangentit.

235. Suorat ℓ_1 ja ℓ_2 sekä piste A suoralta ℓ_1 on annettu. Etsittävä kaikki sellaiset pisteet suoralta ℓ_1 joiden etäisyys pisteestä A on sama kuin niiden etäisyys suorasta ℓ_2.

236. Piirrettävä kolmio, jonka korkeusjanat tunnetaan.

237. Piirrettävä kolmio, jonka mediaanit tunnetaan.

238. Määritettävä piste, jossa annetun kolmion sivut näkyvät yhtäsuurissa kulmissa.

239. Piirrä suorakulmainen kolmio, kun sen sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet tunnetaan.

240. Erota kolmiosta sen sivun suuntaisella suoralla kolmio, jonka ala on alkuperäisen kolmion alan kolmannes.

241. Piirrä ympyrän sektori, joka on yhtä suuri kuin annetun ympyrän puolisko ja jonka keskuskulma on $36°$.

242. Jaettava jana kultaisen leikkauksen suhteessa.

243. On annettu ympyrä Γ ja sen sisältä kaksi eri pistettä A ja B. Jos mahdollista, piirrä harpilla ja viivaimella ympyrän Γ sisään sellainen suorakulmainen kolmio, että pisteet A ja B ovat sen eri kateeteilla.

3.1 RUOSTUNUT HARPPI, LYHYT VIIVAIN JA MUITA RAJOITUKSIA

Välineistöämme voidaan rajoittaa merkittävästi, mutta kaikki aiemmat konstruktiot ovat yhä mahdollisia.

Löysä harppi

244. Osoitettava ”mittauspostulaatti”: Voidaan piirtää ympyrä, kun keskipiste ja säteen mittainen jana on annettu, vaikka harpilla ei voisikaan mitata.

Tämän jälkeen löysä harppi on yhtä hyvä kuin mittaamiseen kykenevä.

Ruostunut harppi

Nyt käytössä on harppi, jonka säde on vakio.

245. Piirrettävä janalle keskinormaali. (Huomioi kaikki tapaukset.)

246. Puolitettava kulma.

247. Piirrettävä suoralle normaali annetun pisteen kautta. (Huomioi kaikki tapaukset.)

248. Siirrettävä jana suoralla alkamaan määrätystä pisteestä.

249. Siirrettävä jana määrätylle suoralle alkamaan määrätystä pisteestä.

250. Olkoon annettu kolme janaa, joiden pituudet ovat a, b ja c. Konstruoitava jana, jonka pituus on ab/c.

251. Annettu suora, ympyrän keskipiste ja piste ympyrän kehältä. Selvitettävä suoran ja ympyrän leikkauspisteet.

252. Annettu kahden ympyrän keskipisteet ja pisteet kummankin kehältä. Selvitettävä ympyröiden leikkauspisteet.

Tehtävien 251 ja 252 ratkaisun jälkeen on osoitettu, että ruostuneella harpilla voi tehdä kaiken, mikä onnistuu tavallisellakin (kunhan viivain on käytössä). Kokeile siis myös kaikkia aiempia konsturointitehtäviä tällä rajoituksella!

Lyhyt viivain

Käytössä on viivain, joka on rajoitetun mittainen.

253. Yhdistettävä kaksi kaukaista pistettä.

Tämän jälkeen lyhyt viivain on yhtä hyvä kuin pitkäkin.

Pelkkä harppi

Käytössä on tavallinen harppi, mutta ei lainkaan viivainta. Harpilla ei voi mitata.

254. Jatka jana kaksinkertaiseksi, sitten mielivaltaiseksi monikerraksi.

255. Pisteet A ja B on annettu. Etsi C siten, että AB ja AC ovat kohtisuorassa.

256. Pisteet A, B ja C on annettu. Etsi C', joka saadaan peilaamalla C janan AB suhteen.

257. Puolitettava jana.

258. Kolme pistettä (ei annetulla suoralla) on annettu. Täydennä suunnikkaaksi.

259. Jana AB on annettu. Piirrettävä pisteen C kautta ympyrä, jonka säde on AB. Tämän jälkeen harpilla voi mitata.

260. Janan AB päätepisteet, ympyrä ja sen keskipiste O on annettu. Lisäksi O ei ole suoralla AB. Selvitä suoran AB ja ympyrän leikkauspisteet.

261. Selvitä, ovatko kolme annettua pistettä samalla suoralla.

262. Olkoon ympyrän keskipiste O ja kaksi pistettä A ja B sen kehältä annettu. Selvitettävä pisteiden A ja B rajaamien ympyrän kehien keskipisteet.

263. Kuten tehtävä 260, mutta keskipiste O on suoralla AB.

264. Piirrä neliö, kun sivujana on annettu.

265. a, b ja c ovat janoja. Etsi x, jolle $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

266. Pisteet A, B, C, D on annettu. Selvitä suorien AB ja CD leikkauspiste.

Tehtävien 260, 263 ja 266 jälkeen on osoitettu, että pelkällä harpilla voi piirtää kaiken minkä viivaimen kanssakin voi, kunhan suora katsotaan piirretyksi, kun sen kaksi pistettä tunnetaan. (*Mohr* ja *Mascheroni*).

Yleistys kolmeen ulottuvuuteen

Vuonna 2010 Sakke Suomalainen (silloin opiskelija Helsingin matematiikkalukiossa) todisti Mohrin ja Macheronin lauseen kolmiulotteisen vastineen:

Olkoon palloharppi työkalu, joka piirtää avaruuteen pallokuoria ja tasoviivain tasoja piirtävä työkalu. Kaiken, minkä voi piirtää palloharpilla ja tasoviivaimella, voi piirtää pelkällä palloharpilla, mikäli avaruudessa on annettuna yksi suora. Ehtoa suorasta ei ole todistettu välttämättömäksi. [S]

LUKU 4

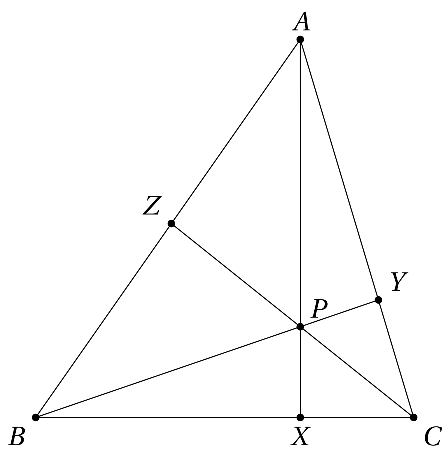
Klassisia Euklidisen geometrian tuloksia

4.1 CEVAN JA MENELAOKSEN LAUSEET

Cevan ja Menelaoksen lauseet ovat hyvin läheistä sukua toisilleen. Niissä esiintyy sama yhtälö, mutta Ceva kertoo yhdessä pisteessä leikkaavista suorista, Menelaos samalla suoralla olevista pisteistä.

Cevan lause

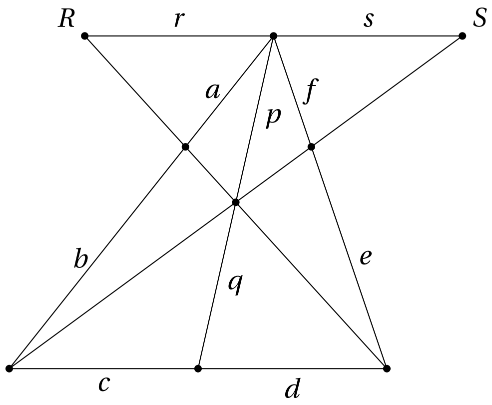
Olkoon kolmion ABC sisällä piste P. Suorat AP, BP ja CP leikatkoot kolmion sivut pisteissä X, Y ja Z.



Cevan lause.
Kolmion ABC kärjistä vastakkaisten sivujen pisteisiin X, Y ja Z piirretyt janat kulkevat yhteisen pisteen P kautta täsmälleen silloin, kun pätee

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Todistus. Todistetaan ensin, että yhtälö pätee kun janat kulkevat yhteisen pisteen kautta. Piirretään kärjen A kautta sivun BC suuntainen suora, jonka suorat CZ ja BY leikkaavat pisteissä R ja S. Nimetään sivun kuvan mukaisesti.



Yhdenmuotoisista kolmioista saadan

$$\frac{c}{s} = \frac{q}{p} = \frac{d}{r}, \text{ eli } \frac{c}{d} = \frac{s}{r}.$$

Yhdistetään tämä vielä kahteen yhdenmuotoisuudesta saatavaan yhtälöön:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{r}{c+d} \\ \frac{c}{d} &= \frac{s}{r} \\ \frac{e}{f} &= \frac{c+d}{s}. \end{aligned}$$

Kertomalla nämä puolittain saadaan

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{r}{c+d} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{c+d}{s} = 1. \quad \square$$

Cevan lauseen käänteislause. Mikäli $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$, ceviaanit AX, BY ja CZ leikkaavat samassa pisteessä.

Todistus. Leikatkoot AX ja BY pisteessä P ja CP leikatkoon janan AB pisteessä Z'. Cevan lauseen mukaan

$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1,$$

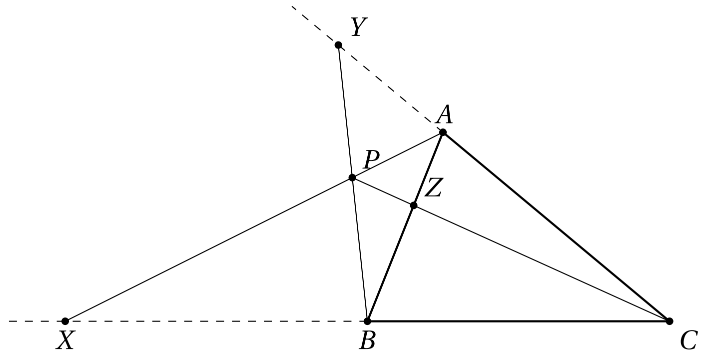
mutta koska oletettiin myös

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1,$$

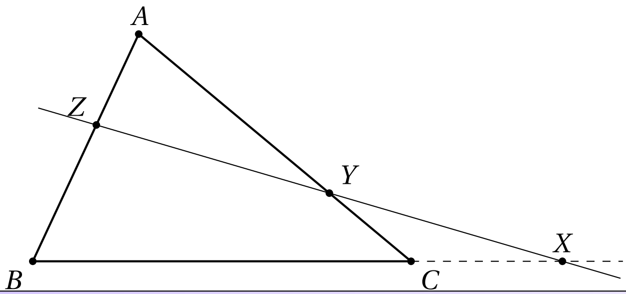
saadaan $\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}$. Pisteet Z' ja Z jakavat siis janan AB samassa suhteessa, eli ovat sama piste. $\square$

Cevan lauseen innoittamana kaikkia kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle kulkevia janoja kutsutaan *ceviaaneiksi*.

Laajennus. Cevan lause on voimassa myös silloin, kun piste P on kolmion ABC ulkopuolella. Silloin osa pisteistä X, Y, Z on sivujen jatkeilla. Myös käänteislause on voimassa, elleivät AX, BY ja CZ ole yhdensuuntaisia. Todistus harjoitustehtävänä 273.



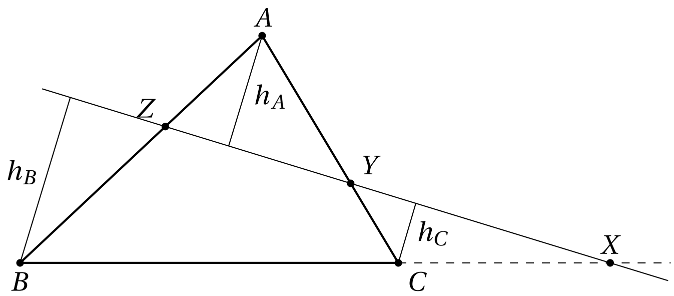
Menelaoksen lause



Menelaoksen lause. Kolmion ABC sivuilta BC, CA ja AB (tai niiden jatkeilta) valitut pisteet X, Y ja Z ovat samalla suoralla täsmälleen silloin, kun yksi tai kolme näistä pisteistä on kolmion ulkopuolella ja

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Todistus. Todistetaan ensin, että yhtälö pätee kun pisteet ovat samalla suoralla. Olkoot kolmion kärkien etäisyydet pisteiden X, Y ja Z määräämästä suorasta h_A, h_B ja h_C.



Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{AZ}{ZB} &= \frac{h_A}{h_B} \\ \frac{BX}{XC} &= \frac{h_B}{h_C} \\ \frac{CY}{YA} &= \frac{h_C}{h_A},\end{aligned}$$

jotka puolittain kertomalla saadaan $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$. □

Käänteistulos ja muut yksityiskohdat ovat harjoitustehtävänä 272.

Harjoitustehtäviä

267. Osoita Cevan lauseen avulla, että

1. Kolmion mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.
2. Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.
3. Kolmion korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

268. Kolmion $\triangle ABC$ sisäänpiirretty ympyrä leikkaa kolmion sivua BC pisteessä X, sivua CA pisteessä Y sekä sivua AB pisteessä Z. Osoita, että janat AX, BY ja CZ kulkevat saman pisteen kautta. Tätä pistettä kutsutaan kolmion $\triangle ABC$ *Gergonnen pisteeksi*.

269. Osoita, että ei-tasakylkisen kolmion kahden kulman kulmanpuolittajat ja kolmannen kulman vieruskulman puolittaja leikkaavat vastakkaisten sivujen jatkeet kolmessa pisteessä jotka ovat samalla suoralla.

270. Osoita, että ei-tasakylkisen kolmion kulmien vieruskulmien puolittajat leikkaavat niitä vastassa olevat sivut kolmessa pisteessä jotka ovat samalla suoralla.

271. Nelikulmion $ABCD$ sivujen AB ja CD jatkeet leikkaavat pisteessä P ja sivujen AD ja BC jatkeet leikkaavat pisteessä Q. Lisäksi lävistäjät AC ja BD kohtaavat suoran PQ pisteissä X ja Y. Osoita, että $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YQ}$.

272. Täydennä Menelaoksen lauseen todistus.

273. Osoita, että Cevan lause on voimassa myös silloin, kun piste P on kolmion ABC ulkopuolella ja osa pisteistä X, Y, Z kolmion sivujen jatkeilla.

274. Annettu kaksi yhdensuuntaista ja eripituista janaa, jotka eivät ole samalla suoralla. Konstruoi pelkällä viivaimella janojen keskipisteet.

275. On annettu jana AB, sen keskipiste M sekä suoran AB ulkopuolelta piste P. Konstruoi pelkällä viivaimella pisteen P kautta kulkeva suoran AB suuntainen suora.

276. Kontruoi pelkällä viivaimella annetun suunnikkaan keskipisteen kautta jonkin kyseisen suunnikkaan sivun suuntainen suora.

277. **Van Obelin lause.** Olkoon P piste kolmion ABC sisällä ja AX, BY ja CZ sen kautta kulkevat ceviaanit. Tällöin $\frac{AP}{PX} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AY}{YC}$.

278. Kolmion ABC sivuilta valitaan pisteet P, Q ja R siten että $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Ceviaanit AQ, BR ja CP leikkaavat pisteissä A', B' ja C'. Laske kolmioiden $A'B'C'$ ja ABC alojen suhde.

279. Kolmion $\triangle ABC$ mediaani AM ja kulmanpuolittaja BN leikkaavat pisteessä P. Puolisuora CP leikkaa sivun AB pisteessä Q. Osoita, että kolmio $\triangle BNQ$ on tasakylkinen.

280. Olkoon M kolmion $\triangle ABC$ sisäpiste. Suorat AM, BM ja CM leikkaavat sivut BC, CA ja AB vastaavasti pisteissä A', B' ja C'. Olkoot S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ja S_6 kolmioiden $\triangle MA'B$, $\triangle MA'C$, $\triangle MB'C$, $\triangle MB'A$, $\triangle MC'A$ ja $\triangle MC'B$ alat. Osoita, että jos

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3,$$

niin M on kolmion $\triangle ABC$ painopiste.

281. Olkoon M kolmion $\triangle ABC$ sisäpiste ja olkoot N, P ja Q sivujen AB, BC ja CA jatkeiden pisteitä siten, että ne ovat samalla suoralla. Osoita, että jos

$$\frac{|\triangle MAN|}{|\triangle MBN|} + \frac{|\triangle MBP|}{|\triangle MCP|} = 2\sqrt{\frac{|\triangle MAQ|}{|\triangle MCQ|}},$$

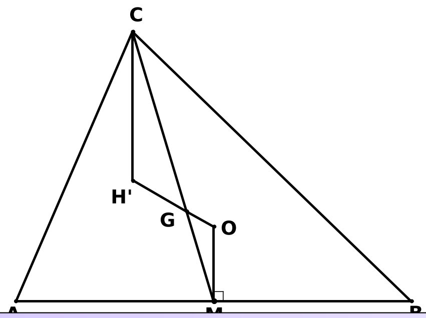
niin $\frac{AN}{NB} = \frac{BP}{PC}$.

4.2 EULERIN SUORA JA YMPYRÄ

Eulerin lause. Olkoon kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O, painopiste G ja ortokeskus H. Tällöin pisteet O, G ja H ovat samalla suoralla (ns. Eulerin suoralla), G pisteiden O ja H välissä, ja $GH = 2OG$.

Todistus. Olkoon H' piste suoralla OG siten, että G on pisteiden O ja H' välissä ja $GH' = 2OG$. Olkoon M suoran AB keskipiste. Kolmion ABC painopiste G on keskijanalla MC ja jakaa sen suhteessa 1:2, eli $GC = 2MG$. Koska kulmat MGO ja CGH' ovat ristikulmia, $\angle MGO = \angle CGH'$.

Edellisistä tuloksista ja yhdenmuotoisuuden sks-säännöstä seuraa, että $MOG \sim CGH'$. Siis $\angle OMG = \angle H'CG$, eli $H'C \| MO$. Koska $MO \perp AB$, $H'C \perp AB$ eli H' on pisteen C vastaisella korkeusjanalla. Vastaavanlaisella päättelyllä saadaan, että H' on myös pisteiden A ja B vastaisilla korkeusjanoilla, eli $H' = H$.$\square$



Yhdeksän pisteen ympyrä. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus. Kolmion ABC sivujen keskipisteet, korkeusjanojen kantapisteet ja janojen AH, BH ja CH keskipisteet ovat samalla ympyrällä. Ympyrän keskipiste on kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipisteen O ja ortokeskuksen H välisen janan keskipiste ja säde puolet kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän säteestä.

Todistus. Olkoon M_A, M_B, M_C kärkien A, B, C vastaisten sivujen keskpisteet, H_A, H_B, H_C kärkien A, B, C vastaisten korkeusjanojen kantapisteet ja K_A, K_B, K_C janojen HA, HB, HC keskipisteet.

Pisteiden valinnasta seuraa sks-säännön nojalla, että

$$\begin{aligned} ABC &\sim M_C B M_A \\ AHC &\sim K_A H K_C \\ ABH &\sim A M_C K_A \\ CHB &\sim C K_C M_A \end{aligned}$$

yhdenmuotoisuussuhteella 2:1. Tästä seuraa, että

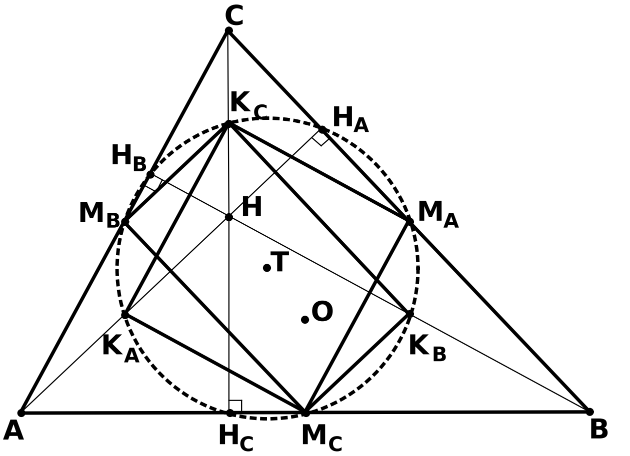
$$M_C M_A \| AC \| K_A K_C \text{ ja } M_C K_A \| BH \| M_A K_C.$$

Lisäksi koska $BH \perp AC$, $M_C M_A \perp M_C K_A$ eli $K_A M_C M_A K_C$ on suorakulmio. Samanlaisella päättelyllä voidaan todistaa, että $M_C K_B K_C M_B$ on suorakulmio.

Olkoon ω se ympyrä, jonka halkaisija on $M_C K_C$. Koska suorakulmion lävistäjät puolittavat toisensa ja ovat yhtä pitkät, muutkin suorakulmioiden lävistäjät K_AM_A, K_BM_B ja K_CM_C ovat ympyrän ω halkaisijoita. Siis pisteet K_A, K_B, K_C, M_A, M_B ja M_C ovat ympyrällä ω.

Thaleen lauseella nähdään, että pisteet H_A, H_B ja H_C ovat ympyröillä, joiden halkaisijat ovat K_AM_A, K_BM_B ja K_CM_C, eli ympyrällä ω.

Koska $AB \parallel K_AK_B$, $BC \parallel K_BK_C$ ja $CA \parallel K_CK_A$, $ABC \sim K_AK_BK_C$, ja koska $AB = 2K_AK_B$, yhdenmuotoisuussuhde on 2:1. Selvästi H on myös kolmion $K_AK_BK_C$ ortokeskus. Olkoon O kolmion ABC ja T kolmion $K_AK_BK_C$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Koska ω on kolmion $K_AK_BK_C$ ympäripiirretty ympyrä, T on ympyrän ω keskipiste. Yhdenmuotoisuudesta $ABC \sim K_AK_BK_C$ seuraa $AOH \sim K_ATH$ yhdenmuotoisuussuhteella 2:1. Siis $\angle AHO = \angle AHT$ ja $HO = 2HT$, eli T on janan HO keskipiste. $AO = 2K_AT$, eli ympyrän ω säde on puolet kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säteestä.$\square$



282. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus. Osoita, että pisteen H peilikuvat kolmion sivujen ja niiden keskipisteiden suhteen ovat kolmion ABC ympäripiirretyllä ympyrällä. Todista tämän avulla edellinen lause.

283. Olkoon H kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus. Osoita, että kolmioiden $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$ ja $\triangle CAH$ ympäripiirretyillä ympyröillä on sama säde.

284. Mikä on kolmion mediaalikolmion yhdeksän pisteen ympyrän keskipiste?

285. Nelikulmio $ABCD$ on jännenelikulmio, ja pisteet H_A, H_B, H_C ja H_D ovat kolmioiden $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ ja $\triangle ABC$ ortokeskukset. Osoita, että nelikulmiot $ABCD$ ja $H_AH_BH_CH_D$ ovat yhtenevät.

286. Kolmio $\triangle A_1B_1C_1$ on kolmion $\triangle ABC$ ortokolmio ja kolmion $\triangle A_1B_1C_1$ sisäänpiirretty ympyrä sivuaa sen sivuja pisteissä A_2, B_2 ja C_2. Osoita, että kolmioilla $\triangle ABC$ ja $\triangle A_2B_2C_2$ on sama Eulerin suora.

287. Olkoon kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O, ortokeskus H sekä sivujen pituudet a, b ja c. Todista *Leibnizin kaava*:

$$OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

288. Jos kolmion $\triangle ABC$ Eulerin suora on yhdensuuntainen sivun BC kanssa, niin $\tan\beta \cdot \tan\gamma = 3$.

289. Kolme R-säteistä ympyrää leikkavat toisensa pisteessä H. Lisäksi ne leikkavat pareittain toisiaan myös pisteissä A, B ja C. Osoita, että kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän säde on R ja sen ortokeskus on H.

290. Kolmiosta on annettu sen ympäri piirretty ympyrä, yksi kärki ja ortokeskus. Piirrettävä kolmio.

4.3 KOLMION ULKOYMPYRÄT

291. Osoita, että kolmion kahden kulman vieruskulmien puolittajat leikkaavat kolmion kolmannen kulman kulmanpuolittajan samassa pisteessä. Tämä piste on sellaisen ympyrän (n.s. *ulkoympyrän*), joka sivuaa kolmion erästä sivua sekä kahden muun sivun jatkeita, keskipiste.

292. Kolmion $\triangle ABC$ ulkoympyröiden keskipisteet ovat I, J ja K. Osoita, että kolmio $\triangle ABC$ on kolmion $\triangle IJK$ ortokolmio.

293. Jos kolmion $\triangle ABC$ sivut ovat $a = BC$, b ja c, piirin puolikas p, ala S ja r_a sivua BC sivuavan ulkoympyrän säde, niin $S = (p - a)\, r_a$.

294. Olkoon kolmion sisäänpiirretyn ympyrän säde r ja sen ulkoympyröiden säteet r_a, r_b ja r_c. Osoita, että

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

295. Olkoon kolmion $\triangle ABC$ ulkoympyröiden keskipisteet I, J ja K. Mikä on kolmion $\triangle IJK$ yhdeksän pisteen ympyrä?

296. Kolmion sisäänpiirretyn ympyrän säde on r ja sen ulkoympyröiden säteet ovat r_a, r_b ja r_c. Osoita, että jos

$$\sqrt{r_a} + \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c} = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r},$$

niin kyseinen kolmio on tasasivuinen.

297. Osoita, että jos kolmion sisäänpiirretyn ympyrän säde on r ja sen ulkoympyröiden säteet ovat r_a, r_b ja r_c, niin

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} \geqslant 9r.$$

4.4 STEWARTIN LAUSE

298. Olkoon piste X kolmion $\triangle ABC$ sivulla BC. Merkitään $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $m = BX$, $n = CX$ ja $p = AX$. Osoita, että

$$a\left(p^2 + mn\right) = b^2 m + c^2 n.$$

(Stewartin lause)

299. Kolmion $\triangle ABC$ kärjen C kautta kulkee suora, joka leikkaa sivun AB jatkeen pisteessä F. Osoita, että

$$BC^2 \cdot AF - AC^2 \cdot BF = AB\left(CF^2 - AF \cdot BF\right).$$

300. Tasakylkisen kolmion kyljet ovat pituudeltaan 17 ja kolmion kärjestä lähtee 16 pituinen jana, jonka toinen päätepiste on kolmion kannalla ja jakaa sen kahteen osaan joista toinen 8 yksikköä pidempi kuin toinen. Mitkä ovat nämä osat?

301. Osoita, että suorakulmaisen kolmion kärjestä hypotenuusan kolmeen yhtäsuureen osaan jakaviin pisteisiin piirrettyjen janojen neliöiden summa on täsmälleen viisi yhdeksäsosaa hypotenuusan neliöstä.

302. Osoita, että suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa vasten piirretty mediaani on pituudeltaan täsmälleen puolet hypotenuusan pituudesta.

303. Kolmion $\triangle ABC$ kulma $\angle ACB$ on suora ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Sivun AB pisteet $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ ja P_n jakavat sivun AB n yhtä pitkään janaan. Laske $CP_1^2 + CP_2^2 + \ldots + CP_n^2$.

304. Osoita, että mielivaltaisesti valitun kolmion $\triangle ABC$ sisältä löytyy piste P siten, että kolmioilla $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ ja $\triangle CAP$ on sama ympäripiirretyn ympyrän säde.

305. Osoita, että

1. Jos kolmiolla on kaksi yhtä pitkää mediaania, niin se on tasakylkinen.
2. Jos kolmiolla on kaksi yhtä pitkää korkeusjanaa, niin se on tasakylkinen.

306. Osoita, että jokaisessa kolmiossa kulmanpuolittajan neliö on yhtäsuuri kuin sen viereisten sivujen pituuksien tulo vähennettynä niiden osien tulolla mihin sen vastakkainen sivu jakaantuu.

307. Osoita, että jos kolmion $\triangle ABC$ sivuja BC, CA ja AB vasten piirrettyjen mediaanien pituudet ovat m_a, m_b ja m_c, ja jos samoja sivuja sivuavien ulkoympyröiden säteet ovat r_a, r_b ja r_c, niin

$$m_a m_b m_c \geqslant r_a r_b r_c.$$

308. Olkoot $\triangle ABC$, m_a, m_b, m_c, r_a, r_b ja r_c kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} = \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}$$

jos ja vain jos kolmio $\triangle ABC$ on tasasivuinen.

309. Osoita *Steinerin ja Lehmusin lause*: Jos kolmiolla on kaksi yhtä pitkää kulmanpuolittajaa, niin se on tasakylkinen.

4.5 SIMSONIN SUORA

310. Osoita, että minkä tahansa kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän pisteen P projektiot kolmion $\triangle ABC$ sivuille ovat samalla suoralla (n.s. pisteen P *Simsonin suoralla*). Osoita myös, että jos jonkin tason pisteen P projektiot kolmion $\triangle ABC$ sivuille ovat samalla suoralla, niin se on kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyllä ympyrällä.

311. Mitkä kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän pisteet ovat omalla Simsonin suorallaan?

312. Mikä on kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän pisteiden P ja Q Simsonin suorien välinen kulma?

313. Olkoon H kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja olkoon piste P kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyllä ympyrällä. Osoita, että pisteen P Simsonin suora leikkaa janan HP sen keskipisteessä.

314. Olkoon PQ kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän halkaisija. Osoita, että pisteiden P ja Q Simsonin suorat kohtaavat toisensa kohtisuorasti kolmion $\triangle ABC$ yhdeksän pisteen ympyrällä.

315. Piste P on ympyrällä Γ ja siitä piirretään ympyrälle Γ jänteet PA, PB ja PC. Lisäksi piirretään kolme ympyrää joilla on halkaisijat PA, PB ja PC. Osoita, että näiden ympyröiden kolme leikkauspistettä ovat samalla suoralla.

316. Ympyrän Γ sisälle piirretään kaksi eri kolmiota ja ympyrän Γ kehältä valitaan piste P. Osoita, että pisteen P Simsonin suorien edellä mainittujen kahden kolmion suhteen välinen kulma ei riipu pisteen P valinnasta.

317. Kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretylle ympyrälle piirretään jänne PQ siten, että se on yhdensuuntainen sivun BC kanssa. Osoita, että pisteiden P ja Q Simsonin suorat leikkaavat toisensa kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanalla AD.

4.6 MUITA KLASSIKOITA

318. Olkoon pisteet D, E ja F kolmion $\triangle ABC$ sivuilla BC, CA ja AB, vastaavasti. Todista *Miquelin (pienempi) lause*: Ympyrät AEF, BDF ja CDE kulkevat yhteisen pisteen M kautta.

319. Tason kolme eri pistettä A, B ja C eivät ole samalla suoralla. Pisteen A kautta kulkeva ympyrä Γ leikkaa janan AB pisteen A ohella myös pisteessä P, ja janan AC pisteen A ohella myös pisteessä Q. Pisteiden P ja B kautta kulkeva ympyrä Γ_1 leikkaa ympyrän Γ pisteen P ohella myös pisteessä S. Lopuksi pisteiden S, Q ja C kautta kulkeva ympyrä Γ_2 leikkaa ympyrän Γ_1 pisteen S ohella myös pisteessä R. Osoita, että pisteet B, R ja C ovat samalla suoralla.

320. Ympyrän jänteen PQ keskipisteen M kautta piirretään kaksi muuta jännettä AB ja CD. Jänteet AD ja BC leikkaavat jännettä PQ pisteissä X ja Y. Nyt M on janan XY keskipiste. *(Perhoslause)*

321. Kolmion kulmien vierekkäisten kolmijakajien leikkauspisteet ovat tasasivuisen kolmion (n.s. *Morleyn kolmion*) kärjet. *(Morleyn ihme)*

322. Kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde on R, ja sen kulmat ovat 3α, 3β ja 3γ. Osoita, että sen Morleyn kolmion sivun pituus on $8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

LUKU 5

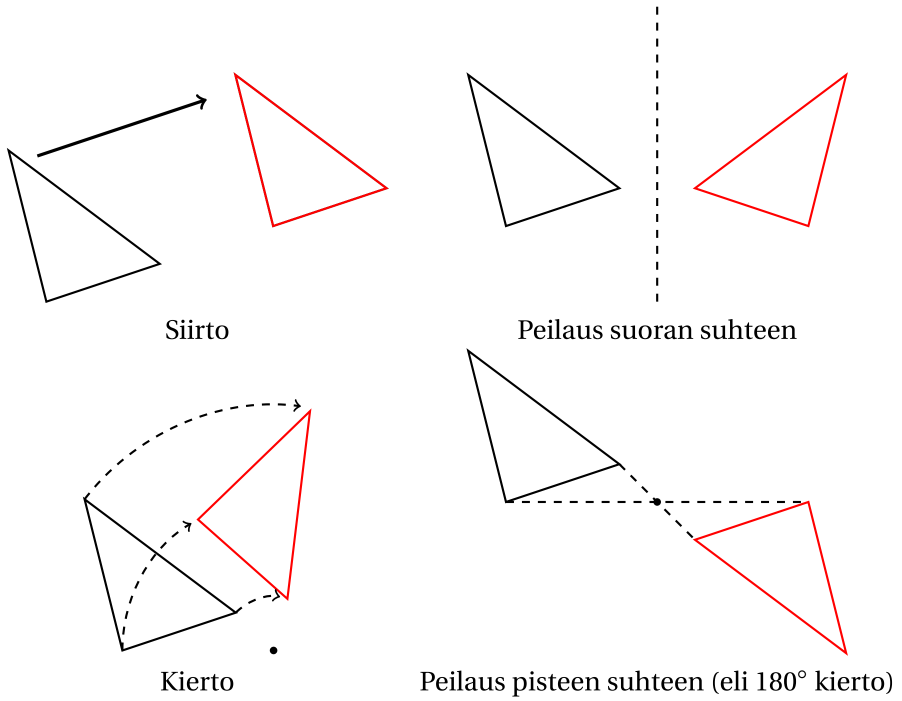
Geometrisia kuvauksia

Geometriset kuvaukset, kuten kierrot ja peilaukset, liittävät kuhunkin tason pisteeseen toisen pisteen jonkin säännön mukaisesti. Mielenkiintoiset kuvaukset muuttavat joitakin kuvioiden ominaisuuksia ja pitävät toiset muuttumattomina.

Geometriset kuvaukset ovat tehokas työkalu, koska kuvioiden siirtäminen, venyttäminen, peilaaminen ja niin edelleen on intuitiivinen tapa hahmottaa geometriaa. Tässä luvussa käsitellään muutamia hyödyllisiä kuvauksia.

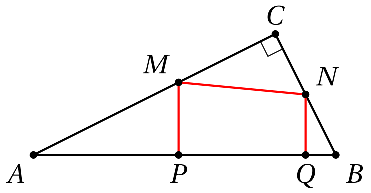
5.1 YHTENEVYYSKUVAUKSET

Tasokuvion siirtäminen, kiertäminen tai peilaaminen säilyttää janojen pituudet ja kulmien suuruudet, joten syntyvät kuviot ovat alkuperäisten kanssa yhteneviä.

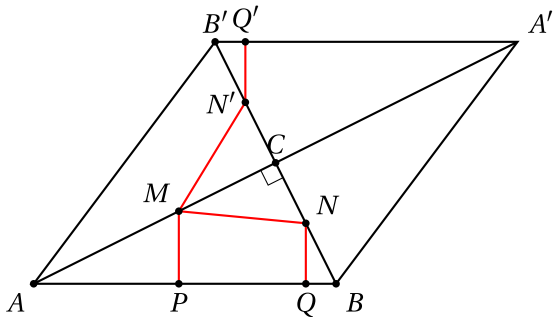


ESIMERKKI 5.7

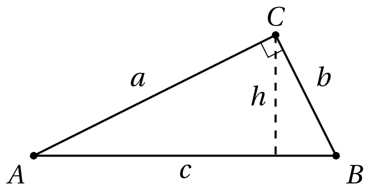
Ongelma. Suorakulmaisen kolmion ABC kateetit ovat pituudeltaan a ja b ja hypotenuusa c. Kateetilta AC valitaan piste M ja kateetilta BC piste N. Olkoot pisteet P ja Q pisteiden M ja N kohtisuorat projektiot hypotenuusalla. Mikä on murtoviivan $PMNQ$ pienin mahdollinen pituus?



Ratkaisu. Peilataan kuvio ensin suoran AC suhteen ja sitten suoran BC suhteen, jolloin saadaan neljä alkuperäisen kolmion kanssa yhtenevää kolmiota. Kolmiot muodostavat suunnikkaan.



Murtoviiva $PMN'Q'$ on yhtä pitkä kuin alkuiperäinen $PMNQ$. Murtoviiva $PMN'Q'$ yhdistää suunnikkaan $ABA'B'$ kaksi vastakkaista sivua, joten murtoviivan pituus on pienimmillään suunnikkaan korkeus. Suunnikkaan korkeus on kaksi kertaa alkuperäisen kolmion hypotenuusan vastainen korkeus h.



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\dfrac{h}{a} = \dfrac{b}{c}$, eli $h = \dfrac{ab}{c}$. Murtoviivan $PMNQ$ pienin mahdollinen pituus on siis $\dfrac{2ab}{c}$.

Harjoitustehtäviä

323. Mikä on lyhyin reitti talolta A rannan kautta saunalle B?

324. **a)** Mistä kohtaa kaupunkeja A ja B erottavan joen yli pitäisi rakentaa silta MN, kun halutaan, että matka $AMNB$ kaupungista A kaupunkiin B olisi mahdollisimman lyhyt? (Tässä oletetaan, että joen rannat ovat yhdensuuntaisia suoria, ja että

silta rakennetaan kohtisuorasti joen rantoja vasten.)
b) Ratkaise a)-kohdan tehtävä kun kaupunkeja A ja B erottaa useampia jokia, joiden yli on rakennettava siltoja.

325. On annettu kaksi ympyrää S_1 ja S_2 ja yksi suora ℓ. Löydettävä suoran ℓ kanssa yhdensuuntainen suora jonka leikkauspisteet ympyröiden S_1 ja S_2 kanssa ovat täsmälleen annetun etäisyyden a päässä toisistaan. (Vihje: siirrä toista ympyrää.)

326. Olkoot D, E ja F kolmion $\triangle ABC$ sivujen AB, BC ja CA keskipisteet. Olkoot O_1, O_2 ja O_3 kolmioiden $\triangle ADF$, $\triangle BDE$ ja $\triangle CEF$ ympäripiirrettyjen ympyröiden keskipisteet, ja olkoot Q_1, Q_2 ja Q_3 samojen kolmioiden sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Osoita, että kolmiot $\triangle O_1O_2O_3$ ja $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ovat yhtenevät.

327. Olkoot M ja N annetun nelikulmion $ABCD$ sivujen AD ja BC keskipisteet. Osoita, että jos janan MN pituus on puolet janojen AB ja CD summasta, niin nelikulmio $ABCD$ on puolisuunnikas.

328. On annettu kaksi ympyrää S_1 ja S_2. Piirrä suora ℓ, joka **a)** …on yhdensuuntainen annetun suoran ℓ_1 kanssa ja joka leikkaa ympyröistä S_1 ja S_2 yhtä pitkä jänteet.

329. On annettu suora ℓ, ympyrä S ja piste A. Piirrettävä pisteen A kautta suora, jonka leikkauspiste suoran ℓ kanssa ja leikkauspiste ympyrän S kanssa ovat yhtä etäällä pisteestä A, samalla suoralla pisteen A kanssa, ja eri puolilla pistettä A. (Vihje: $180°$ kierto)

330. Annetut ympyrät S_1 ja S_2 leikkaavat pisteessä A ja B. Piirrä pisteen A kautta suorat ℓ_1 ja ℓ_2, jotka leikkaavat kumpikin ympyröistä S_1 ja S_2 yhtä pitkät jänteet.

331. Kahden yhdensuuntaisen suoran muodostama kuvio on selvästi symmetrinen äärettömän monen pisteen suhteen. Voiko geometrinen kuvio olla symmetrinen useamman kuin yhden, mutta kuitenkin vain äärellisen monen, pisteen suhteen?

332. Todista, että peilaus suoran suhteen, siirto ja kierto ovat todella yhtenevyyskuvauksia. Miksi $180°$ kierto ja peilaus pisteen suhteen ovat sama asia?

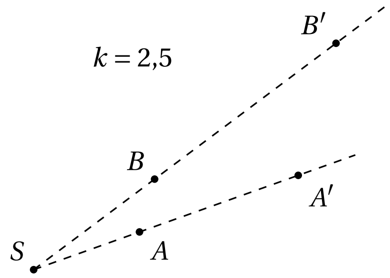
5.2 HOMOTETIA

Homotetian tutumpi nimi on skaalaus. Tietty tason piste (homotetiakeskus) pysyy paikoillaan ja muut pisteet siirtyvät joko sitä kohti tietyn osuuden etäisyydestään tai vastaavasti siirtyvät kauemmas. Muodollisesti homotetia määritellään seuraavasti:

Määritelmä.
Pisteen A homotetia pisteen S suhteen on suoran SA piste A', jolle

$$\frac{SA'}{SA} = k.$$

Vakio $k \neq 0$ on homotetiakerroin eli verrannollisuuskertoin. Määritellään, että kun $k > 0$, pisteet A ja A' ovat samalla puolella pistettä S, ja vastaavasti eri puolilla kun $k < 0$. Negatiivinen osamäärä voidaan selittää suunnatuilla janoilla.



Homotetian perusominaisuuksia

Lause 1. Janojen pituus k-kertaistuu homotetiassa.

Todistus. Olkoot S, A ja B kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Pisteet A ja B kuvautukoot pisteiksi A' ja B' homotetiassa, jonka keskus on S ja verrannollisuuskerroin k. Homotetian määritelmän mukaan

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = k,$$

joten kolmiot SAB ja $SA'B'$ ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $A'B' = k \cdot AB$. □ Tapaus, jossa S, A ja B ovat samalla suoralla on harjoitustehtävänä 333.

Lause 2. Kulmien suuruus säilyy homotetiassa.

Todistus. Olkoon ABC kulma. Homotetiassa janojen AB, BC ja CA pituudet k-kertaistuvat, joten kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis $\angle ABC = \angle A'B'C'$. □

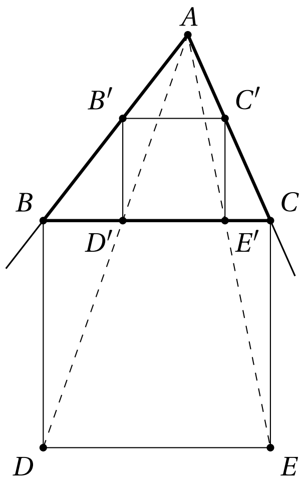
Seuraus. Kuvion homotetia on alkuperäisen kuvion kanssa yhdenmuotoinen. Tämä seuraa suoraan kahdesta edellisestä lauseesta. □

Homotetia on yksinkertaisen oloinen temppu, mutta se on hyödyllinen työkalu esimerksi konstruktiotehtävisää.

ESIMERKKI 5.8

Konstruktio. Piirrettävä kolmion sisään neliö, jonka sivu on annetulla kolmion sivulla.

Ratkaisu. Olkoon ABC kolmio, jonka sisään sivulle BC neliö piirretään. Piirretään ensin sivulle BC neliö $BDEC$ kolmion ABC ulkopuolelle.



Piirretään neliön kärjistä D ja E janat DA ja EA, jotka leikkaavat sivun BC pisteissä D' ja E'. Jaetaan sivut AB ja AC pisteillä B' ja C' samassa suhteessa kuin missä D' jakaa janan AD. Nyt $B'D'E'C'$ on nelikulmio kolmion ABC sisällä. Se on neliö, koska se on neliön $BDEC$ homotetia.

Harjoitustehtäviä

333. Todista lause 1 loppuun: homotetia k-kertaistaan jana AB pituuden, kun A, B ja homotetiakeskus S ovat samalla suoralla. Miksi tapaus $A = S$ on helppo?

334. Piirrettävä kolmion sisään kolmio, jonka sivut ovat annetun kolmion sivujen suuntaiset.

335. Piirrettävä ympyräsektorin sisään neliö, jonka a) yksi b) kaksi kärkeä on sektorin kehällä.

336. Piirrettävä puoliympyrään suorakulmio, joka on annetun suorakulmion kanssa yhdenmuotoinen.

337. Paperiarkille on piirretty kaksi suoraa, joiden leikkauspiste P ei mahtunut paperille. Piirrä pisteen P kautta kulkeva suora annetun arkin pisteen kautta.

338. Piirrettävä puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen suuntainen, kaksi sivua yhdistävä jana, jonka puolisuunnikkaan lävistäjät jakavat kolmeen yhtäsuureen osaan.

339. Piirrettävä ympyrälle jänne, jonka kaksi annettua sädettä jakavat kolmeen yhtäsuureen osaan.

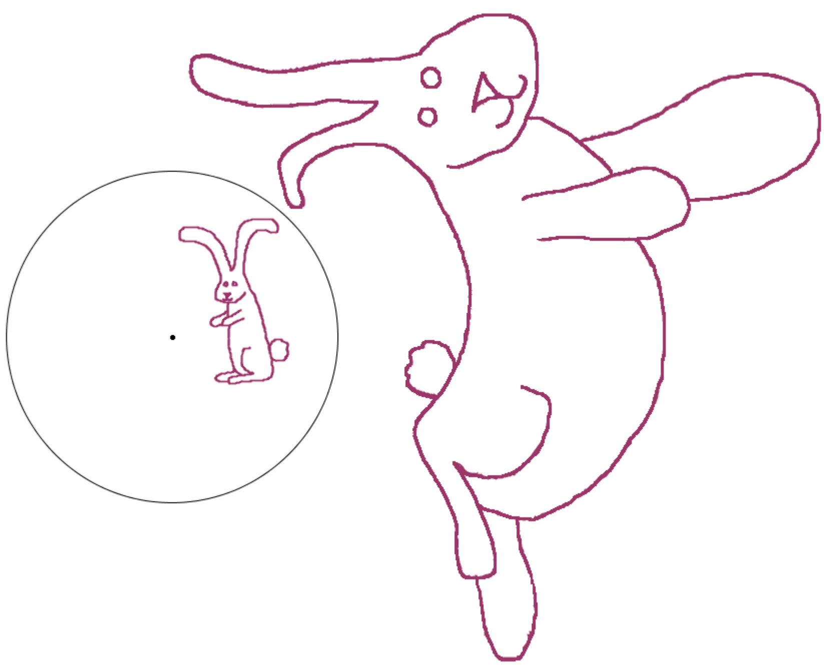
340. Piirrettävä annetun kolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio, jonka kärjet ovat kolmella annetulla suoralla (Milloin tämä on mahdollista?)

341. Teräväkulmaisen kolmion ABC sisäpiste P peilataan suorien AB ja AC suhteen pisteiksi Q_B ja Q_C sekä sivujen AB ja AC keskipisteiden yli pisteiksi R_B ja R_C. Oletetaan, että kaikki saadut neljä pistettä ovat eri pisteitä ja että suorat Q_BR_B ja Q_CR_C leikkaavat pisteessä S. Osoita, että $SR_BR_C \sim ABC$.

342. Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan yksi mediaani sekä sen ja viereisten sivujen väliset kulmat.

343. Piirrettävä ympyrälle jänne, jonka annettu jänne puolittaa.

5.3 INVERSIO



Pupun inversio.

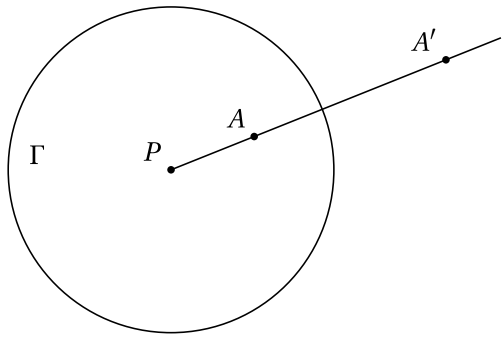
Määritelmä ja ominaisuudet

Inversio on eräs geometrinen kuvaus tasossa. Se siis liittää jokaiseen tason pisteeseen jonkin toisen pisteen. Kuten nimestä voi arvata, kyse on eräänlaisesta kääntämisprosessista: Inversio kuvaa annetun ympyrän sisäosan sen ulko-osaksi ja päinvastoin. Itse ympyrä pysyy kuvauksessa paikallaan. Tällaisia kuvauksia on kuitenkin monia, tarvitaan täsmällinen määritelmä.

Määritelmä.
Pisteen $A \neq P$ inversio P-keskisen, r-säteisen ympyrän Γ suhteen on puolisuoralla PA oleva piste A', jolle pätee

$$PA \cdot PA' = r^2.$$

Piste A' on yksikäsitteinen, joten inversiomme on hyvin määritelty. Sanotaan myös, että A' on pisteen A peilikuva ympyrän Γ suhteen, ja sitä merkitään aina pilkulla.

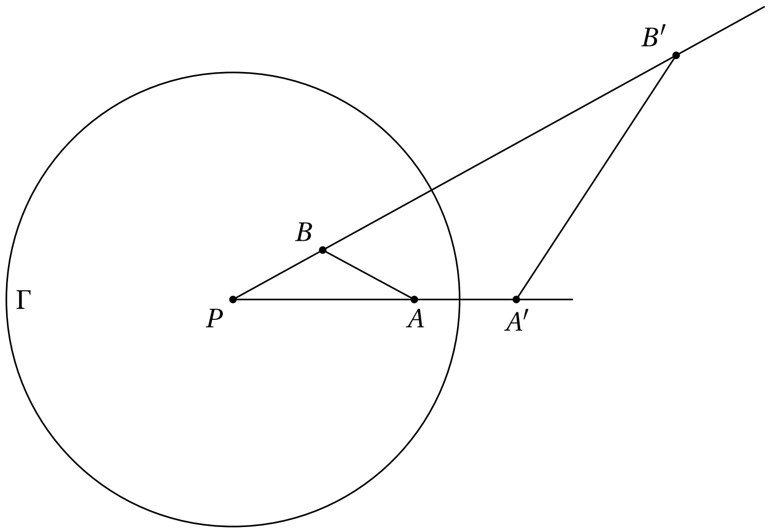


Inversion määritelmä sanoo, että pistettä P lähellä olevat pisteet kuvautuvat kauaksi pisteestä P ja toisinpäin. Erityisesti pisteelle P ei voida määritellä kuvaa inversiossa, sillä sen tulisi kuvautua äärettömän kauas! On tapana kuitenkin liittää tasoon ns. äärettömyyspiste ∞ ja sopia, että P ja ∞ kuvautuvat inversiossa toisilleen. Seuraavaksi hieman perusominaisuuksia inversiolle.

Lause 1. Ympyrä Γ kuvautuu inversiossa itselleen.
Todistus. Olkoon A ympyrällä Γ. Tällöin $PA = r$, joten $PA \cdot PA = r^2$. Koska A on puolisuoralla PA, niin $A' = A$.

Lause 2. Olkoon $A \neq P$. Jos A' on pisteen A peilikuva Γ:n suhteen, ja A'' on pisteen A' peilikuva Γ:n suhteen, niin $A'' = A$.
Todistus. Toisin sanottuna kaksinkertainen inversio kuvaa jokaisen pisteen itselleen. Tämä seuraa suoraan siitä, että ehto $PA \cdot PA' = r^2$ on symmetrinen A:n ja A':n suhteen ja siitä, että jos A' on puolisuoralla PA, niin myös A on puolisuoralla PA'.

Lause 3. Olkoon A,B ja P eri pisteitä. Tällöin pätee $\triangle PAB \sim \triangle PB'A'$.



Todistus. Kulma P on molemmissa kolmioissa sama. Toisaalta sivuille pätee

$$r^2 = PA \cdot PA' = PB \cdot PB', \quad \text{eli} \quad \frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'}.$$

Siis $\triangle PAB \sim \triangle PB'A'$ (sks). □

Lause 4. Tarkastellaan inversiota P-keskisen ympyrän Γ suhteen. Tällöin pätee, että

1. Pisteen P kautta kulkevat suorat kuvautuvat itselleen.
2. Suora joka ei kulje pisteen P kautta kuvautuu ympyräksi joka kulkee pisteen P kautta.
3. Ympyrä joka kulkee pisteen P kautta kuvautuu suoraksi joka ei kulje pisteen P kautta.
4. Ympyrä joka ei kulje pisteen P kautta kuvautuu ympyräksi joka ei kulje pisteen P kautta.

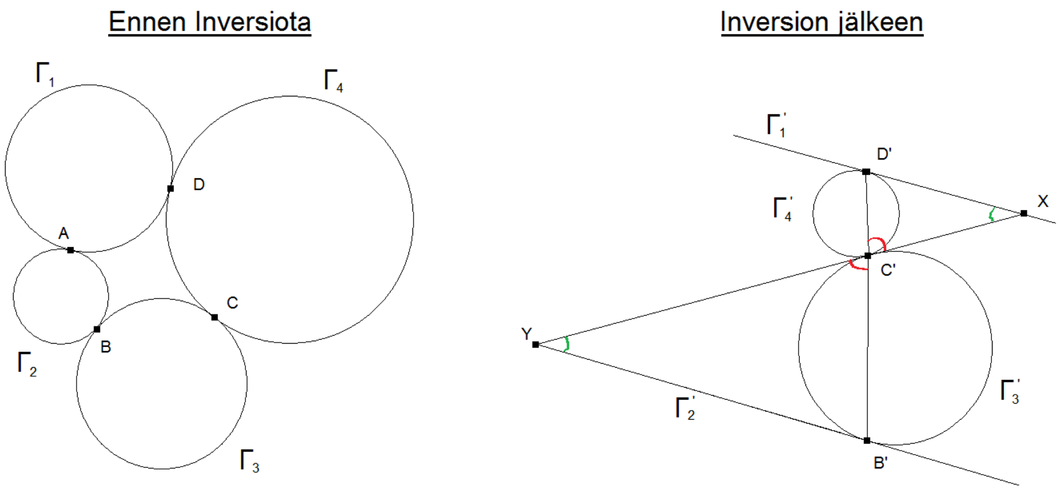
Huomautus. Vaikka inversio kuvaisi ympyrän toiseksi ympyräksi, se ei yleensä kuvaa näiden kahden keskipisteitä toisilleen!

Todistus. Todistamme kohdan 2 ja jätämme loput tehtäväksi 344. Olkoon siis suora s annettu, ja merkitään Q:lla P:n projektiota suoralle s. Valitaan nyt jokin suoran piste $R \neq Q$. Tällöin kolmio $\triangle PRQ$ on suorakulmainen. Lauseesta 3 seuraa, että myös kolmio $\triangle PQ'R'$ on suorakulmainen, suorana kulmana $\angle PR'Q'$. Siis jokainen piste R kuvautuu pisteeksi R', joka muodostaa suoran kulman pisteiden P ja Q' kanssa. Toisaalta nämä pisteet R' sijaitsevat käänteisen kehäkulmalauseen nojalla ympyrällä, jonka halkaisija on PQ'. Siis suora s kuvautuu tälle ympyrälle.

Seuraavaksi esimerkki siitä, miten inversiolla voi näppärästi todistaa arkipäiväisiä geometrian tuloksia.

ESIMERKKI 5.9

Lause. Olkoon Γ_1, Γ_2, Γ_3 ja Γ_4 neljä ympyrää, jotka sivuavat toisiaan allaolevan kuvan mukaisesti. Jos sivuamispisteet ovat A, B, C ja D, niin $ABCD$ on jännenelikulmio.



Todistus. On siis todistettava, että pisteet A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä. Tehdään inversio A-keskisen 1-säteisen ympyrän suhteen (säteellä ei niin väliä). Edellisen lauseen nojalla

- Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 kuvautuvat suoriksi Γ_1' ja Γ_2'.
- Ympyrät Γ_3 ja Γ_4 kuvautuvat ympyröiksi Γ_3' ja Γ_4'.

Tästä voidaan päätellä seuraavaa: Koska ympyröillä Γ_1 ja Γ_2 oli vain yksi yhteinen piste A, niin suorilla Γ_1' ja Γ_2' ei ole yhteisiä pisteitä, joten ne ovat yhdensuuntaisia. Samasta syystä ympyrällä Γ_3' on vain yksi yhteinen piste suoran Γ_2' ja ympyrän Γ_4' kanssa, joten se sivuaa niitä. Samoin Γ_4' sivuaa suoraa Γ_1'.

Tutkitaan pisteiden B,C ja D kuvia B', C' ja D' inversiossa. Jos nämä olisivat samalla suoralla, niin edellisen lauseen nojalla pisteet B,C ja D olisivat ympyrällä, joka kulkee pisteen A kautta - juuri kuten haluisimme! Riittää siis osoittaa, että pisteet B',C' ja D' ovat samalla suoralla. Piirretään ympyröille Γ_3' ja Γ_4' yhteinen tangentti, jonka leikkauspisteet suorien Γ_1' ja Γ_2' olkoot X ja Y. Riittää osoittaa, että kulmat $XC'D'$ ja $YC'B'$ ovat samoja (punaiset kulmat kuvassa). Toisaalta suorien Γ_1' ja Γ_2' yhdensuuntaisuuden nojalla kulmat $B'YC'$ ja $D'XC'$ ovat samoja (vihreät kulmat kuvassa). Koska kolmiot $YB'C'$ ja $XD'C'$ ovat tasakylkisiä, niin huippukulmien yhtäsuuruudesta seuraa kantakulmien yhtäsuuruus, eli olemme valmiita.

Harjoitustehtäviä

344. Todista kohdat 1,3 ja 4 lauseesta 4.

345. Todista kaava, joka kertoo miten inversio muuttaa kahden pisteen etäisyyttä:

$$A'B' = \frac{r^2 AB}{PA \cdot PB}.$$

346. Yksi- ja kaksisäteiset ympyrät sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Piste A on ympyröiden keskipisteiden välissä etäisyydellä 3/5 yksisäteisen ympyrän keskipisteestä. Tehdään ensin inversio 1-säteisen ympyrän suhteen ja sitten 2-säteisen ympyrän suhteen. Minne A kuvautuu?

347. Piirrä ympyrän Γ sisään- ja ympäripiirrettyjen neliöiden kuvat inversiossa sen suhteen.

348. Olkoon Γ P-keskinen ympyrä, $Q \neq P$ ja $R \neq P$ tason pisteitä siten, että Q, P ja R eivät ole samalla suoralla ja Q' ja R' pisteiden Q ja R peilikuvat ympyrän Γ suhteen. Osoita, että pisteet Q, R, Q' ja R' ovat samalla ympyrällä.

349. Jännenelikulmion lävistäjien tulo on sama kuin vastakkaisten sivuparien tulojen summa *(Ptolemaioksen lause)*. (Vihje: tee inversio yhden kärjen suhteen.)

350. Olkoon $ABCD$ nelikulmio. Osoita, että

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD \geqslant BD \cdot AC,$$

ja että tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $ABCD$ on jännenelikulmio. *(Ptolemaioksen epäyhtälö)*

Määritelmä. Olkoot Γ_1 ja Γ_2 kaksi käyrää, jotka leikkaavat pisteessä Q. Käyrien välinen kulma pisteessä Q on niiden pisteeseen Q piirrettyjen tangenttejen välinen kulma.

Vakuuttaudu siitä, että suorien ja ympyröiden välinen kulma ei riipu valitusta leikkauspisteestä.

351. Tarkastellaan edelleen inversiota P-keskisen ympyrän Γ suhteen. Osoita, että

1. Jos ympyrä Γ' kulkee jonkin pisteen $Q \neq P$ ja sen inversiopisteen Q' kautta, niin ympyrä Γ' leikkaa ympyrän Γ kohtisuorasti.
2. Erityisesti ympyrä Γ' kuvautuu inversiossa itselleen.
3. Jos $R \neq P$ ja $S \neq P$ ovat kaksi eri pistettä jotka eivät ole samalla ympyrän Γ halkaisijalla, niin löytyy täsmälleen yksi ympyrä joka kulkee pisteiden R ja S kautta ja leikkaa kohtisuorasti ympyrän Γ.

352. Olkoon Γ P-keskinen ympyrä ja Γ' Q-keskinen ympyrä joka kulkee pisteen P kautta. Olkoon Q' pisteen Q peilikuva ympyrän Γ suhteen, ja leikatkoon ympyrän Γ' peilikuva ympyrän Γ suhteen puolisuoran PQ pisteessä R. Osoita, että $PR = RQ'$.

353. Olkoon Γ_1 ja Γ_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisiaan kohtisuorasti. Osoita, että inversiossa ympyrän Γ_1 suhteen ympyrän Γ_2 keskipiste kuvautuu ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 yhteisen jänteen keskipisteelle.

354. Olkoot O, P ja Q kolme eri pistettä samalta suoralta siten, että piste O ei ole pisteiden P ja Q välissä. Konstruoi O-keskinen ympyrä Γ siten, että piste Q on pisteen P kuva inversiossa ympyrän Γ suhteen.

355. Olkoon ympyrä Γ ja sen keskipiste P annettu. Konstruoi harpilla ja viivaimella annetun pisteen $Q \neq P$ kuva Γ-keskisessä inversiossa. Keksitkö helpon tavan tehdä tämä pelkällä harpilla?

356. Olkoon ympyrä Γ ja sen keskipiste P annettu. Konstruoi kahden annetun pisteen $Q \neq P$ ja $R \neq P$ kautta ympyrä, joka leikkaa ympyrän Γ kohtisuorasti.

357. On annettu O-keskinen ympyrä Γ, suora ℓ sekä piste $P \neq O$ suoralta ℓ. Konstruoi ympyrä joka kulkee pisteen P mutta ei pisteen O kautta, sivuaa suoraa ℓ ja leikkaa ympyrän Γ kohtisuorasti.

358. (**Tärkeä**). Osoita, että suorien ja ympyröiden väliset kulmat pysyvät vakioina inversiossa.

359. Olkoot Γ_1 ja Γ_2 kaksi ympyrää jotka leikkavat toisensa pisteissä P ja Q. Osoita, että jos ympyrät Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat molemmat kohtisuorasti jonkin kolmannen, O-keskisen, ympyrän Γ_3, niin pisteet P, Q ja O ovat samalla suoralla.

360. Olkoon Γ_1, Γ_2 ja Γ_3 kolme ympyrää, jotka sivuavat toisiaan pareittain pisteissä A_{12}, A_{23} ja A_{31} vastaavasti. Lisäksi ympyrä Γ_4 sivuaa kaikkia kolmea ympyrää pisteissä B_1, B_2 ja B_3 vastaavasti. Osoita, että a) Pisteet A_{31}, A_{21}, B_2 ja B_3 ovat samalla ympyrällä. b) Tämä ympyrä leikkaa kaikkia muita ympyröitä kulmassa 45°.

361. Kolme ympyrää Γ_1, Γ_2 ja Γ_3 sivuavat toisiaan ulkopuolisesti pisteissä A, B ja C. Osoita, että kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretty ympyrä leikkaa ympyröitä Γ_1, Γ_2 ja Γ_3 kohtisuorasti.

362. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 sivuavat toisiaan pisteessä A. Ympyrä Γ_3 sivuaa ympyrää Γ_1 pisteessä B ja leikkaa ympyrän Γ_2 kohtisuorasti pisteessä C. Osoita, että kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretty ympyrä leikkaa ympyröitä Γ_1, Γ_2 ja Γ_3 kulmassa 45°.

363. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat pisteissä A ja B ja suora s sivuaa ympyröitä Γ_1 ja Γ_2 pisteissä S_1 ja S_2, ja suora t sivuaa samoja ympyröitä samassa järjestyksessä pisteissä T_1 ja T_2. Osoita että kolmioiden $\triangle S_1S_2A$ ja $\triangle T_1T_2A$ ympäripiirretyt ympyrät sivuavat toisiaan.

364. Piste L on ympyrän Γ sisäpiste mutta ei sen keskipiste O. Osoita, että kaikkien pisteen L kautta piirrettyjen jänteiden päätepisteiden kautta piirrettyjen ympyrän Γ tangenttien parien leikkauspisteet ovat kaikki samalla suoralla.

365. Olkoon PQ ympyrän Γ halkaisija, ja pisteet A ja B ympyrällä Γ samalla puolella halkaisijaa PQ. Olkoon C pisteisiin A ja B piirrettyjen tangenttejen leikkauspiste. Leikatkoon pisteeseen Q piirretty tangentti suorat PA, PB ja PC pisteissä A_0, B_0 ja C_0. Osoitettava, että C_0 on janan A_0B_0 keskipiste.

366. Olkoon Γ_1, Γ_2, Γ_3 ja Γ_4 neljä ympyrää, joista mitkään kolme eivät kulje saman pisteen kautta. Oletetaan, että ympyrät Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat pisteissä P ja P', että ympyrät Γ_2 ja Γ_3 leikkaavat pisteissä Q ja Q', että ympyrät Γ_3 ja Γ_4 leikkaavat pisteissä R ja R', ja että ympyrät Γ_4 ja Γ_1 leikkaavat pisteissä S ja S'. Tällöin pisteet P, Q, R ja S ovat samalla suoralla jos ja vain jos pisteet P', Q', R' ja S' ovat samalla suoralla. *(Miquelin suurempi lause)*

Kirjallisuutta

[A-C] ALTSHILLER-COURT, N.: *College Geometry*, Dover Publications, Inc, Mineola, New York 2007.

[A&A] ANDREESCU, T., ja D. ANDRICA: *360 Problems for Mathematical Contests*, GIL Publishing House, Zalau, Romania, 2003.

[B&E] BECHEANU, M., ja B. ENESCU: *Balkan Mathematical Olympiads 1984–2006*, GIL Publishing House, Zalău, Romania, 2007.

[B] BLAIR, D. E.: *Inversion Theory and Conformal Mapping*, Student Mathematical Library, **9**, American Mathematical Society, 2000.

[C&G] COXETER, H. S. M., ja S. L. GREITZER: *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, **19**, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1967.

[En] ENGEL, A.: *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.

[Ev] EVES, H.: *Fundamentals of Modern Elementary Geometry*, Jones and Bartlett Publishers, London, 1992.

[FGM] F. G.-M.: *Exercices de géométrie*, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1991.

[J] JOHNSON, R. A.: *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 2007.

[L] LEHTINEN, M, MERIKOSKI, J. ja TOSSAVAINEN, T.: *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY Oppimateriaalit, 2007.

[M] MELZAK, Z. A.: *Invitation to Geometry*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2008.

[N] NEGUT, A.: *Problems for the Mathematical Olympiads*, GIL Publishing House, Zalau, Romania, 2005.

[O] OGILVY, C. S.: *Excursions in Geometry*, Dover Publications, New York, 1990.

[P] PEDOE, D.: *Circles: A Mathematical View*, Dover Publications, New York, 1979.

[P&S] POSAMENTIER, A. S., ja C. T. SALKIND: *Challenging Problems in Geometry*, Dover Publications, New York, 1996.

[R] REPO, Y.: *11 sarjaa tasogeometrian harjoitustehtäviä*, Weilin & Göös, Helsinki, 1965.

[S&S] SORTAIS, Y., ja SORTAIS, R.: *La géométrie du triangle*, Hermann, Paris, 2002.

[S] SUOMALAINEN, S.: *Mohrin-Mascheronin lause kolmiulotteisessa harppi-viivaingeometriassa*, http://www.aka.fi/Tiedostot/Viksu/2010työt/Sakke_Suomalainen_Kilpailutyö[1].pdf

[T] TAO, T.: *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*, Oxford University Press, New York, 2006.

[V] VÄISÄLÄ, K. *Geometria*, WSOY, Porvoo, 1968.

[Y1] YAGLOM, I. M.: *Geometric Transformations I*, New Mathematical Library, **8**, Random House, New York, 1962.

[Y2] YAGLOM, I. M.: *Geometric Transformations II*, New Mathematical Library, **21**, Random House, New York, 1968.