Tapettiryhmät: Symmetrioiden matematiikkaa

Aleksis Koski

Symmetria ja sen eri muodot

Symmetria on perustavanlaatuinen matemaattinen käsite jota esiintyy paljon etenkin luonnossa ja taiteessa. Symmetrialla on myös perustavanlaatuinen rooli matematiikassa, sillä sitä esiintyy omilla tavoillaan monissa eri matemaattisissa käsitteissä. Esimerkiksi plus- ja kertolaskun riippumattomuutta laskettavien lukujen järjestyksestä voidaan pitää eräänä symmetrian muotona. Myös fysiikan lait toteuttavat usein erilaisia symmetrioita.


Kuva 1: Symmetriaa luonnossa.

Tämä teksti keskittyy symmetrian esittämiseen matemaattisena käsitteenä, erityisesti sen ilmenemiseen geometrisissa kuvioissa. Geometriassa symmetria tyypillisesti tarkoittaa sitä, että annettu objekti tai kuvio on muuttumaton (eli **invariantti**) tietynlaisen geometrisen muodonmuutoksen alla. Tutustutaan nyt eri symmetrioiden muotoihin pääasiassa kahdessa ulottuvuudessa:

Peilisymmetria. Peilisymmetriassa on kyse siitä, että kuvio on muuttumaton jonkin peilauksen suhteen. Kahdessa ulottuvuudessa peilaukseen liittyy aina **peilausakseli**, eli suora jonka suhteen peilaus tapahtuu.

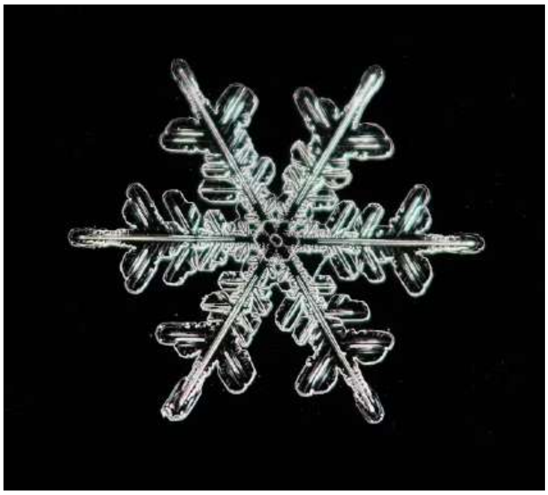
Kuva 2: Peilisymmetriaa. Symmetria-akseli näkyy punaisella.

Peilisymmetriaa esiintyy paljon luonnossa, etenkin suurimmassa osassa nisäkkäitä. Biologisesti peilisymmetrian ylivoimaisuutta voidaan selittää esimerkiksi sillä, miten se auttaa eliöitä tasapainossa ja liikkumisessa. Symmetrisyys myös yleisesti ottaen vähentää vaadittavaa geneettistä informaatiota, mitä tarvitaan eliön kehittymiseen sikiöstä, ja täten osittain mahdollistaa monimutkaisempien eliöiden olemassaolon.

Yhdellä kuviolla voi olla myös useampia peilisymmetrioita eri akseleiden suhteen.

Kuva 3: Ikkunassa on kaksi peilausakselia.

Kiertosymmetria. Kierto- tai rotaatiosymmetriaa esiintyy kuvioissa, jotka pysyvät ennallaan jonkin kierron suhteen. Kiertoon liittyy aina **kiertokeskipiste** sekä **kiertokulma**, eli minkä pisteen suhteen kierretään ja minkä verran.

Kuva 4: Kiertosymmetriaa apiloissa ja lumihiutaleessa.

Kiertosymmetriassa esiintyvä kiertokulma on yleensä jokin kokonaisosa täysikulmasta, eli $\frac{360°}{n}$ astetta tai $\frac{2\pi}{n}$ radiaaneissa, missä n on positiivinen kokonaisluku. Tätä kokonaislukua n kutsutaan kiertosymmetrian **kiertoluvuksi**, eli se kuvastaa kuinka monta kertaa kierto pitää toistaa että tulee tehtyä täysi kierros. Tässä tapauksessa puhutaan myös n-**kertaisesta kiertosymmetriasta**.

Kuviossa voi esiintyä useampi kiertosymmetria kerrallaan. Esimerkiksi nelilehtisessä apilassa esiintyy sekä nelinkertainen, että kaksinkertainen kiertosymmetria. Kuusiteräisessä lumihiutaleessa taas esiintyy kiertosymmetriat kiertoluvuilla $2, 3$ ja 6. Kiertoluvut ovat aina suurimman kuvion kiertoluvun tekijöitä.

Poikkeustapauksena on vielä kuviot, jotka ovat kiertosymmetrisiä joka ikisen kiertokulman suhteen (tietyllä kiertokeskipisteellä). Tällaista kiertosymmetriaa kutsutaan myös **radiaalisymmetriaksi**.

Kuva 5: Lautaset ja kulhot ovat usein radiaalisymmetrisiä.

Siirtosymmetria. Siirto- tai translaatiosymmetriaa esiintyy kuvioissa, jotka toistavat itseään tiettyyn suuntaan. Siirtosymmetriassa on siis kyse siitä, että kuvio on muuttumaton vaikka sitä siirretään tietyn verran tiettyyn suuntaan.

Kuva 6: Tässä tomaateista muodostuvassa kuviossa esiintyy siirtosymmetriaa useampaan eri suuntaan. Kuvitellaan, että kuvio toistuu kuvan ulkopuolella samanlaisena.

Emme hyväksy siirtosymmetriaa, jossa siirron suuruus on 0 eli mitään siirtämistä ei tapahdu. Siirtosymmetriaa esiintyy siis yksinomaan kuvioissa, jotka toistuvat loputtomiin. Tämän takia siirtosymmetria on lähinnä abstrakti käsite (luonnossa asioilla ei ole taipumus jatkua loputtomina), mutta se on hyvin tyypillistä etenkin kuvioihin liittyvässä taiteessa ja geometriassa.

Muita symmetrian muotoja. Keskitymme tässä tekstissä lähinnä edellä mainittuihin kolmeen symmetrian perusmuotoon, eli peilaus-, kierto-, ja siirtosymmetriaan. Mutta mainittakoon, että symmetria on varsin yleinen käsite ja monia muitakin ominaisuuksia voidaan luokitella symmetrian eri muodoiksi. Esimerkkinä luonnossa toisinaan esiintyvä **fraktaalisymmetria**, jossa kuvio toistuu pienempinä versioina itseään.

Kuva 7: Saniaisessa sama kuvio toistaa itseään pienemmissä skaaloissa.

Tapettikuviot

Tapettikuviot ovat erityisnimi tietynlaisille itseään toistaville tasokuvioille. Nimi tulee kirjaimellisesti siitä, miten seinien tapeteilla esiintyvät kuviot ovat tyypillisesti tapettikuvioita.

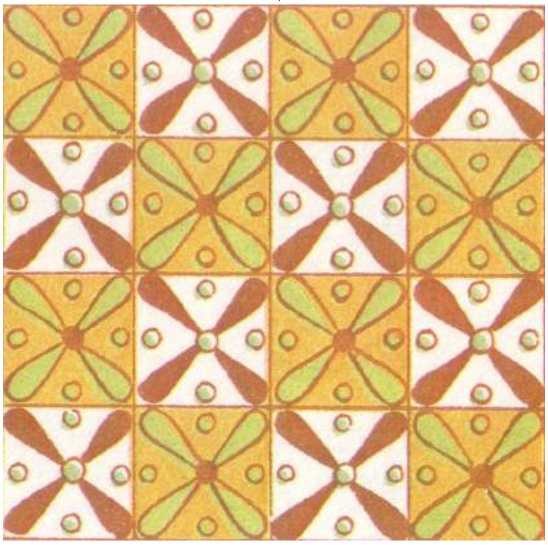
Tapettikuvioiden matemaattinen määritelmä. Tason kuviota sanotaan tapettikuvioksi, jos siinä esiintyy **siirtosymmetriaa ainakin kahteen eri suuntaan.**

Kuva 8: Kaksi tapettikuviota. Löydätkö siirtosymmetriat?

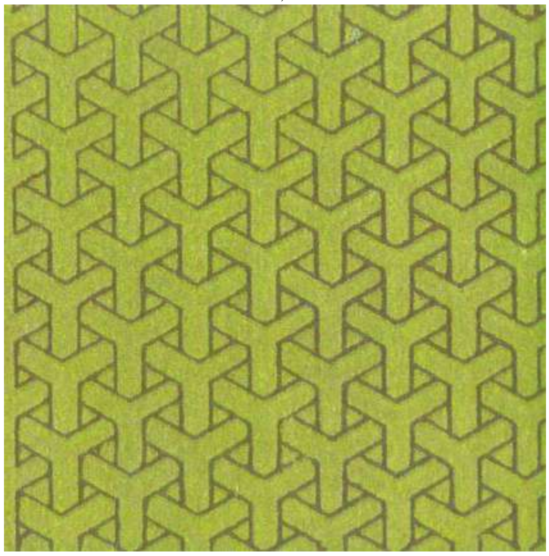
Tapettikuviot ovat matemaattisesti mielenkiintoisia, koska niissä voi esiintyä siirtosymmetrian lisäksi myös muita symmetrian muotoja kuten peili- ja kiertosymmetriaa. Kaikkien mahdollisten tapettikuvioissa esiintyvien symmetriamuotojen luokittelu on varsin haastava matemaattinen ongelma, johon tarjoamme myöhemmin tässä tekstissä vastauksen. Tutkitaan kuitenkin ensin tapettikuvioissa esiintyviä mahdollisia symmetrian muotoja esimerkkien kautta.

Tehtävä 1. Selvitä seuraavien tapettikuvioiden symmetrioita. Tarkista ensin, että kuvio on tapettikuvio paikantamalla kaksi siirtosymmetriaa. Selvitä sitten millaisia peili- tai kiertosymmetrioita kuviossa esiintyy.

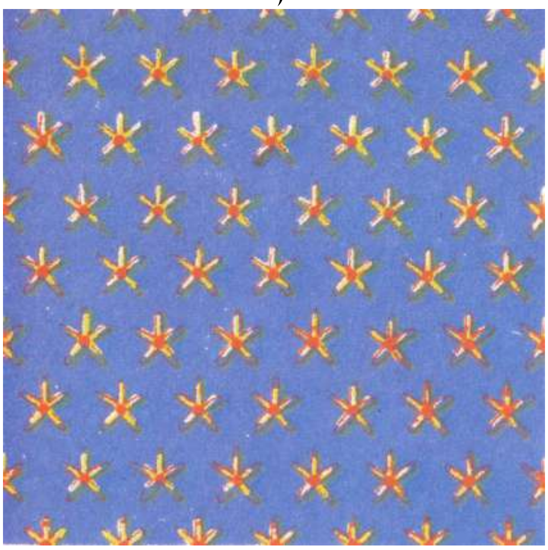
a)



b)



c)



d)

Isometriat

Ennen kuin tutkimme tapettikuvioita tarkemmin, tehdään niiden matemaattisesta tarkastelusta vielä vähän tarkempaa. Olemme tähän mennessä tutustuneet kolmeen eri symmetrian perusmuotoon, joihin kaikkiin liittyy jokin geometrinen muodonmuutos kahdessa ulottuvuudessa (peilaus, kierto, tai siirto). Ilmaisemalla tason pisteet koordinaateissa voidaan näille muodonmuutoksille tarvittaessa johtaa myös kaavat, mutta emme tule tarvitsemaan näitä tarkkoja kaavoja tässä tekstissä. Sen sijaan on lähinnä tärkeä ymmärtää, että nämä kaikki muodonmuutokset ovat tason $\mathbb{R}^2$ funktioita, eli kuvauksia $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jotka liittävät jokaiseen tason pisteeseen p jonkin uuden tason pisteen, jota merkitsemme $K(p)$.

Isometriat. Peilaukset, kierrot, ja symmetriat ovat esimerkkejä tason *isometrioista*. Kuvausta K sanotaan **isometriaksi**, jos se säilyttää pisteiden väliset etäisyydet ennallaan. Matemaattisesti tämän voi tarvittaessa ilmaista kaavalla

$$|p - q| \quad = \quad |K(p) - K(q)|, \qquad \text{kaikilla tason pisteillä } p, q \in \mathbb{R}^2.$$

Lukijan on hyvä tässä vaiheessa vakuuttaa itselleen, että peilaus, kierto, ja siirto todellakin pitävät minkä tahansa kahden pisteen etäisyyden ennallaan. Tämän matemaattinen todistaminen vaatii hieman kaavojen pyörittelyä, mutta se on geometrisesti melko uskottavaa.

Herää toki kysymys, onko tässä kaikki mahdolliset isometriat. Kahden isometrian yhdiste on edelleen isometria, joten yhdistämällä peilauksia, kiertoja ja siirtoja voidaan toki tuottaa lisää isometrioita. Ensimmäinen isometrian perustuloksemme sanoo, että näitä kolmea yhdistämällä voidaan itse asiassa tuottaa kaikki mahdolliset isometriat.

Isometrioiden peruslause 1. Jokainen tason isometria voidaan tuottaa yhdisteenä peilauksista, kierroista, ja siirroista.

Tehtävä 2. Todista isometrioiden peruslause 1. **Ohje:** Lähde liikkeelle jostain isometriasta K, ja pyri yksinkertaistamaan sitä yhdistämällä siihen siirtoja, kiertoja, ja peilauksia. Voit esimerkiksi aloittaa sopimalla, että isometria kuvaa origon $(0,0)$ jollekin annetulle pisteelle p. Voitko nyt yhdistää isometriaan K sopivan kuvauksen, että yhdistetty kuvaus kuvaakin origon itselleen? Jatka pohdintaa tutkimalla seuraavaksi esim. pisteen $(1,0)$ kuvapistettä.

Esitämme seuraavaksi hieman syvällisemmän matemaattisen käsitteen nimeltä *ryhmä*. Tämä osio on vapaaehtoinen, mutta se voi auttaa ymmärtämään tulevia tarkasteluja teoreettisemmalla ja korkealentoisemmalla tasolla. Mikäli haluat ohittaa tämän osion, hyppää kappaleeseen **Liukupeilaus**.

Ryhmäteoriaa. Kun kaikkia mahdollisia tason isometrioita tarkastelee yhdessä, muodostavat ne matemaattisen objektin nimeltä *ryhmä*. Matemaatiikassa **ryhmä** viittaa mihin tahansa kokoelmaan objekteja G, joille on annettu jokin laskutoimitus $*$, eli operaatio, joka liittää mihin tahansa kahteen ryhmän jäseneen $a, b \in G$ uuden ryhmän jäsenen $a*b$. Jotta joukkoa G laskutoimituksella $*$ voidaan kutsua ryhmäksi, täytyy sen toteuttaa vielä seuraavat perusominaisuudet:

- **Liitännäisyys:** Jokaisella kolmella ryhmän G jäsenellä a, b, c täytyy päteä

  $$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

- **Neutraalialkion olemassaolo:** Ryhmässä G täytyy olla sellainen alkio e, jolle pätee

  $$a * e = a = e * a$$

  kaikilla ryhmän G jäsenillä a. Tätä alkiota e kutsutaan ryhmän **neutraalialkioksi.**

- **Käänteisalkioiden olemassaolo:** Jokaiselle ryhmän G jäsenelle a löytyy ryhmän G jokin jäsen b, jolle pätee

  $$a * b = e = b * a,$$

  tätä alkiota merkitään $b = a^{-1}$ ja sitä kutsutaan a:n käänteisalkioksi.

Todetaan nyt, että isometriat muodostavat ryhmän, missä laskutoimitus $*$ korvataan isometrioiden yhdistämisellä. Selitämme tämän vielä tarkemmin: Kahden isometrian K_1 ja K_2 **yhdiste** on kuvaus, jota merkitään $K_2 \circ K_1$ ja se määritellään kuvauksena, joka kuvaa pisteen p ensin isometrialla K_1 pisteeksi $K_1(p)$, ja sitten kuvaa tämän kuvapisteen isometrialla K_2 lopputulokseksi $K_2(K_1(p))$, jota merkitään myös $(K_2 \circ K_1)(p)$
.
Isometriat muodostavat yhdistämisen $\circ$ suhteen ryhmän, sillä:

- Kahden isometrian yhdiste on edelleen isometria.
- Yhdistäminen on liitännäistä (tarkista!).
- Yhdistämiselle löytyy neutraalialkio. Nimittäin ns. **identtinen kuvaus** joka kuvaa jokaisen pisteen itselleen on juurikin tämä neutraalialkio (tarkista!).
- Jokaisella isometrialla on myös käänteisalkio, sillä peilauksella, kierrolla, ja siirrolla on selkeät käänteisoperaatiot (pohdi miten nämä löydetään).

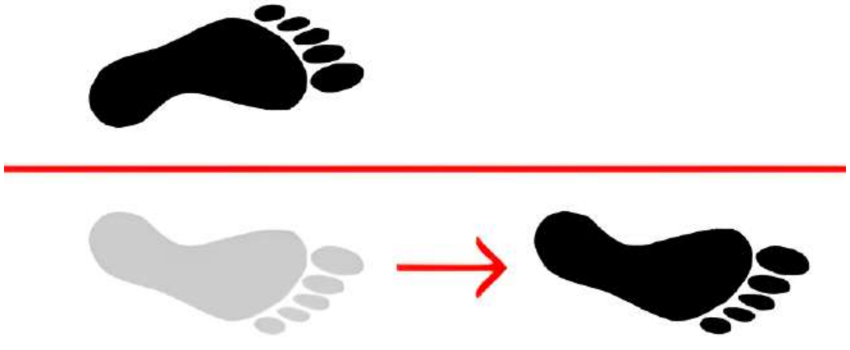
Liukupeilaus

Määrittelemme seuraavaksi vielä yhden erikoismuodon isometrioista, jonka lisääminen työkalupakkiimme tekee asioista huomattavasti yksinkertaisempaa.

Liukupeilaus. Tason muodonmuutosta sanotaan **liukupeilaukseksi**, jos se saadaan yhdisteenä seuraavista kahdesta toimenpiteestä:

- Peilaus jonkin **peilausakselin** suhteen.
- Siirto, joka on edellä mainitun **peilausakselin suuntainen**.

Liukupeilauksessa siis ensin peilataan tietyn suoran suhteen, sitten liu'utetaan lopputulosta suoran myötäisesti.



Kuva 10: Liukupeilaus havainnollistettuna.

Liukupeilaus on selvästi isometria, koska se on yhdiste kahdesta perusisometriasta (peilaus ja siirto). Mikä tekee liukupeilauksesta mielenkiintoisen on seuraava tason isometrioita koskeva luokittelutulos.

Isometrioiden peruslause 2. Jokainen tason isometria on joko siirto, kierto, tai liukupeilaus.

Tämä tulos saattaa tulla yllättävänä, sillä se sanoo, että vaikka kuinka yhdistelisimme peilauksia, kiertoja, ja siirtoja on lopputulos kuitenkin jokin yksittäinen siirto, kierto, tai liukupeilaus. Esimerkiksi sattuu käymään niin, että minkä tahansa kahden kierron yhdiste (vaikka kierroilla olisikin eri kiertokeskipiste) tulee itse asiassa olemaan aina esitettävissä kolmantena kiertona (jonkun mahdollisesti uuden kiertokeskipisteen ja kulman suhteen).

Peruslauseen 2 todistaminen olisi ehkä paikallaan, koska se ei välttämättä ole mitenkään geometrisesti ilmiselvä tulos, mutta sivuutamme sen kuitenkin tilan säästämiseksi. Tuloksen voi todistaa geometrisesti pienellä vaivalla, pyörittämällä kaavoja vähän isommalla vaivalla, tai vähemmällä vaivalla jos tuntee hieman ns. *kompleksilukujen* geometrisia perusteita.

Liukupeilaussymmetria. Liukupeilaukseen liittyy myös oma symmetrian muoto. Sanomme että kuvio toteuttaa **liukupeilaussymmetrian** mikäli se pysyy muuttumattomana jonkin liukupeilauksen suhteen.

Kuva 11: Tapettikuvio, jossa esiintyy liukupeilaussymmetriaa (liukupeilausakselit ovat pystysuoria).

Palaamme nyt takaisin tapettikuvioiden tarkasteluun, koska meillä on riittävät työkalut kasassa esittämään niiden ominaisuuksia tarkemmin ja selkeämmin.

Tapettiryhmät ja niiden luokittelu

Olemme jo huomanneet, miten tapettikuvioissa voi esiintyä monenlaisia symmetrian muotoja. Jokaista tapettikuvion mahdollista symmetriaa vastaa jokin tason isometria, joka pitää tapettikuvion paikallaan. Näiden kaikkien mahdollisten kuvion ennallaan säilyttävien isometrioiden kokoelmaa kutsutaan kuvion **tapettiryhmäksi**.

(Ryhmäteoriaa) Kuvion tapettiryhmä on ryhmä myös matemaattisessa mielessä, ryhmätoimituksena edelleen kuvausten yhdistäminen. Se on myös aina kaikkien isometrioiden ryhmän ns. **aliryhmä**, eli ryhmä joka on osa isompaa ryhmää samalla laskutoimituksella.

Pyrimme vastaamaan seuraavaksi luonnollisiin kysymyksiin.

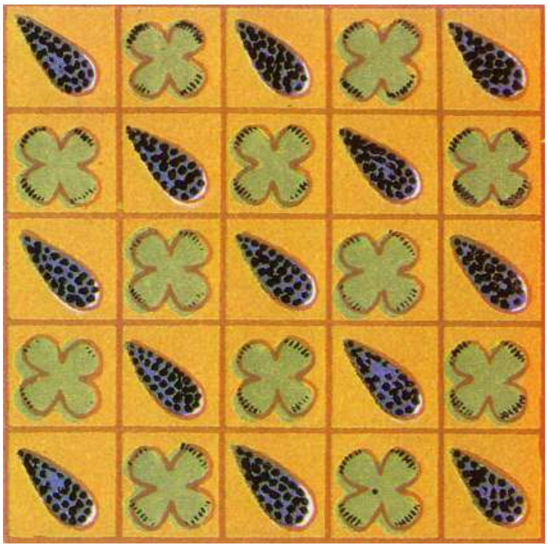
1. Miten tapettikuvioita voidaan luokitella niiden symmetrioiden perusteella?
2. Mitä symmetrioita tapettikuvioissa voi ylipäätään esiintyä?
3. Onko erityyppisiä tapettiryhmiä äärettömän monta?

Luokittelu. Aloitetaan tapettikuvioiden luokittelukysymyksellä. Kuvitellaan olevamme tilanteessa, missä meille on annettu kaksi tapettikuviota ja meidän tulee päättää ovatko niissä esiintyvät symmetriat samaa vai eri tyyppiä. Esimerkkitehtävä:

Tehtävä 3. Pohdi, edustavatko seuraavat kaksi kuviota samaa vai eri tapettiryhmää.

Kuvio 1

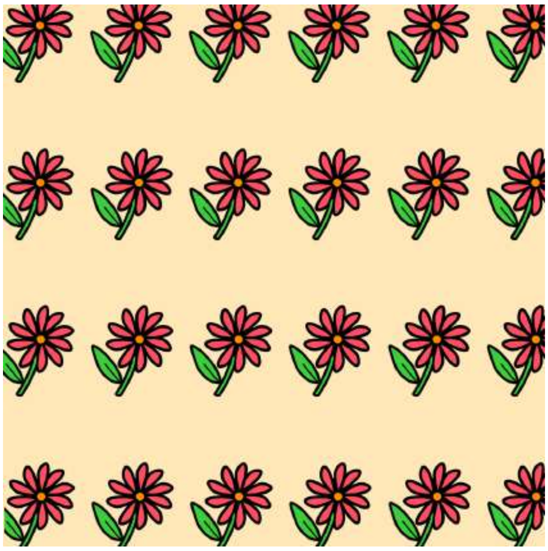
Kuvio 2

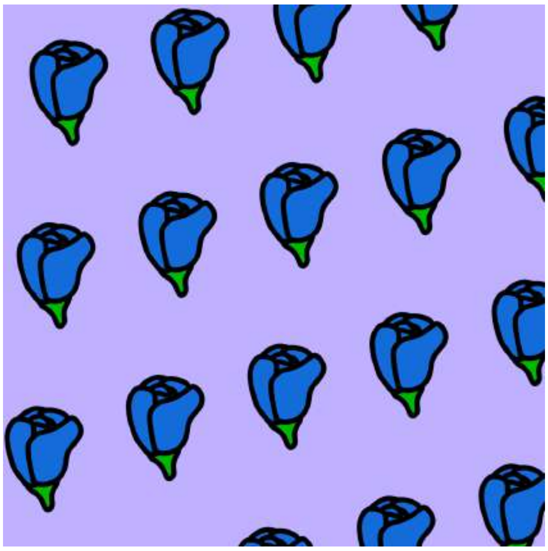


On hyvin luonnollista sopia, että kaksi tapettikuviota edustavat **eri tapettiryhmää**, jos niissä esiintyvät symmetrian muodot eroavat jollain selvällä tavalla toisistaan. Mahdollisia syitä eroavaisuudelle voisi olla vaikkapa:

- Ensimmäisessä kuviossa esiintyy liukupeilaussymmetriaa, mutta toisessa ei.
- Ensimmäisessä kuviossa esiintyy nelinkertaisia kiertosymmetrioita, mutta toisessa kuviossa vain kaksinkertaisia.
- Ensimmäisessä kuviossa esiintyy peilisymmetriaa kahden eri suuntaisen suoran suhteen, mutta toisessa vain yhteen suuntaan.

Tarkalleen ottaen kaksi tapettikuviota edustaa samaa tapettiryhmää, jos niissä esiintyvien symmetrioiden välillä on ns. **ryhmäisomorfismi**, eli tapa liittää jokaiseen ensimmäisen kuvion symmetriaan täysin samankaltainen toisen kuvion symmetria. Siis kuvioiden siirtosymmetrioilla, (liuku)peilaussymmetrioilla, ja kiertosymmetrioilla täytyy olla vastaavuudet. Tämä ei välttämättä tarkoita, että symmetriat ovat täsmälleen samat, esimerkkinä seuraavat kaksi kuviota:





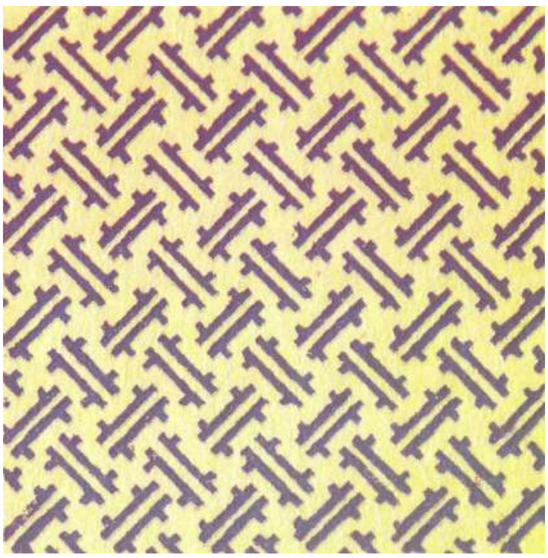
Näissä kuvioissa ainoat esiintyvät symmetrian muodot ovat siirtosymmetrioita. Ensimmäisessä kuviossa on vaaka- ja pystysuoraa siirtosymmetriaa, kun taas toisessa kuviossa siirtosymmetriat ovat vinoja. Nämä kuviot edustavat kuitenkin samaa tapettiryhmää, sillä vaikka kuvioiden siirtosymmetriat ovat eri suuntaisia ja -kokoisia, niin niiden välillä on kuitenkin yksi-yhteen vastaavuus.

Harjoitellaan nyt kuvioiden luokittelua seuraavien esimerkkien kautta.

Tehtävä. Selvitä, kuuluvatko seuraavat parit kuvioita samaan tapettiryhmään vai onko niissä esiintyvissä symmetrioissa eroavaisuuksia.

Kuvio 1a

Kuvio 1b



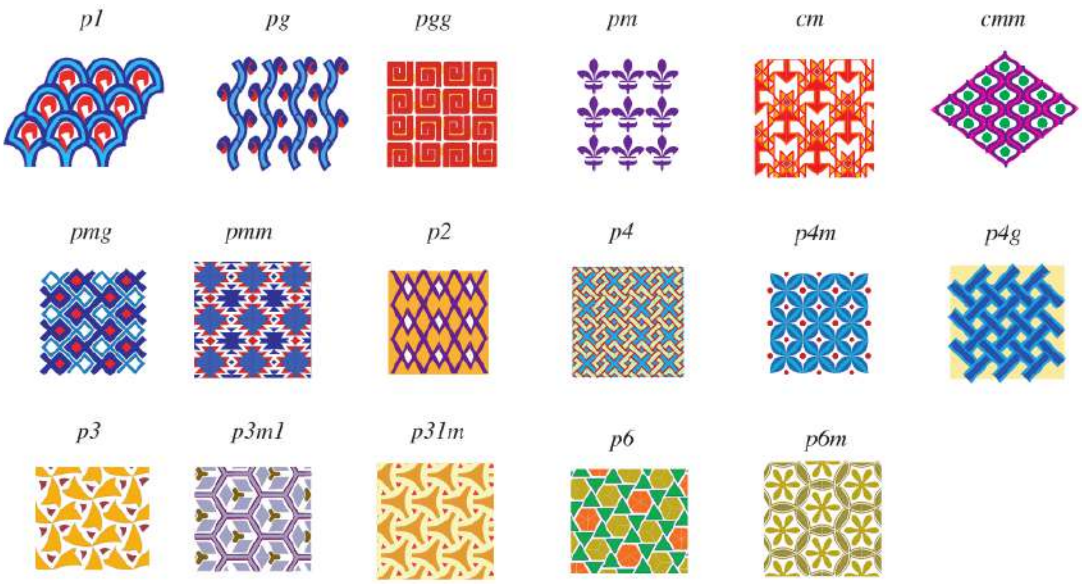
Kuvio 2a

Kuvio 2b

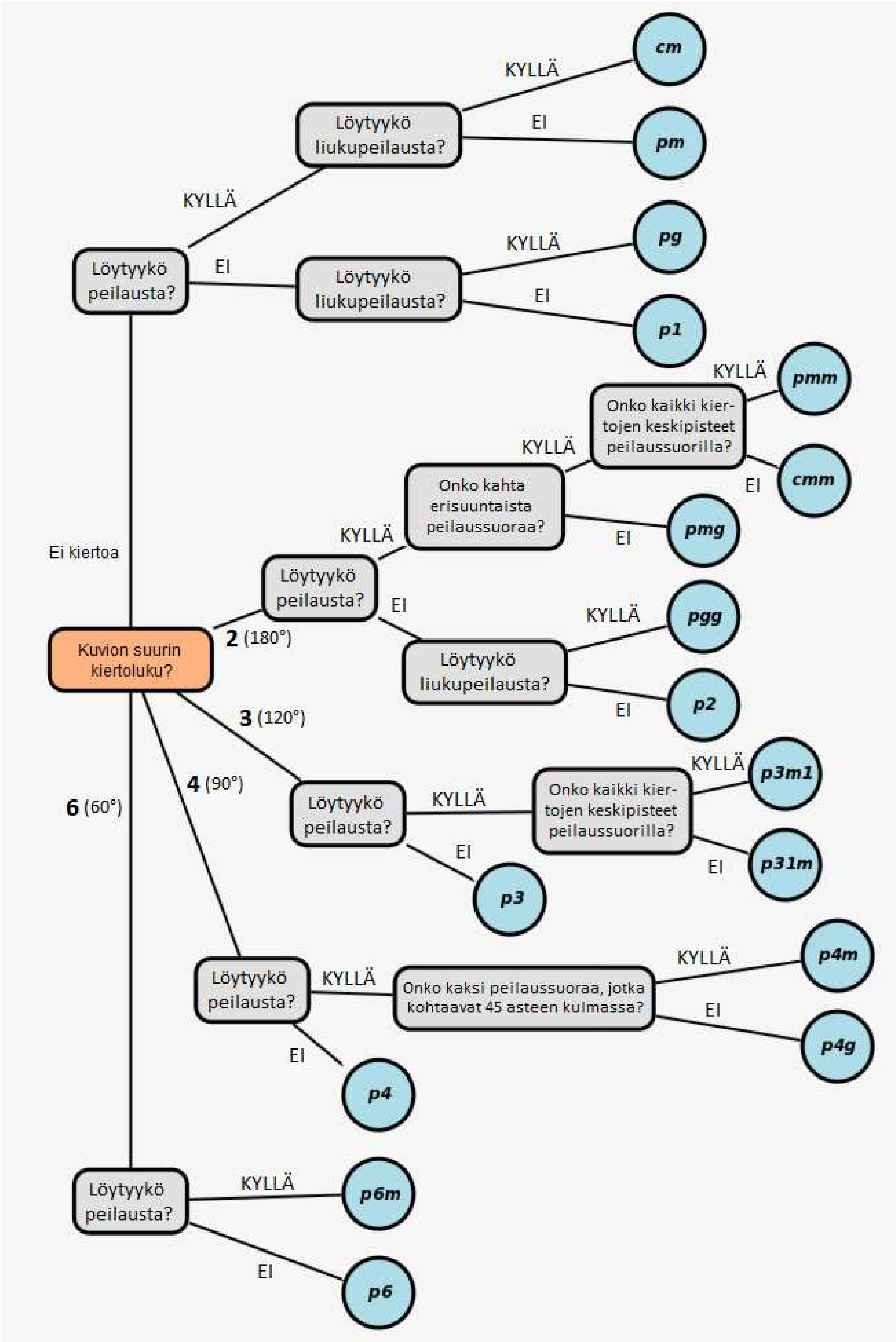
Olemme nyt huomanneet, että tapettikuviot voidaan luokitella niissä edustetun tapettiryhmän perusteella. Mutta kuinka monta tällaista mahdollista luokkaa, eli tapettiryhmää on oikeastaan olemassa? Tähän syvälliseen matemaattiseen kysymykseen tarjosi vastauksen venäläinen matemaatikko nimeltä Evgraf Fedorov vuonna 1981, ja vastaus on seuraava.

Tapettiryhmien lukumäärä. Tapettiryhmiä on tasan 17 kappaletta.

Seuraava kuva nimeää ja havainnollistaa nämä kaikki tapettiryhmät.



Koska tapettiryhmiä on äärellisen monta, voidaan jokainen kuvio luokitella sitä vastaavaan tapettiryhmään havaitsemalla riittävän monta siinä esiintyvien symmetrioiden piirrettä. Tähän auttaa esimerkiksi seuraava vuokaavio, jota seuraamalla minkä tahansa kuvion tapettiryhmän voi määrittää.

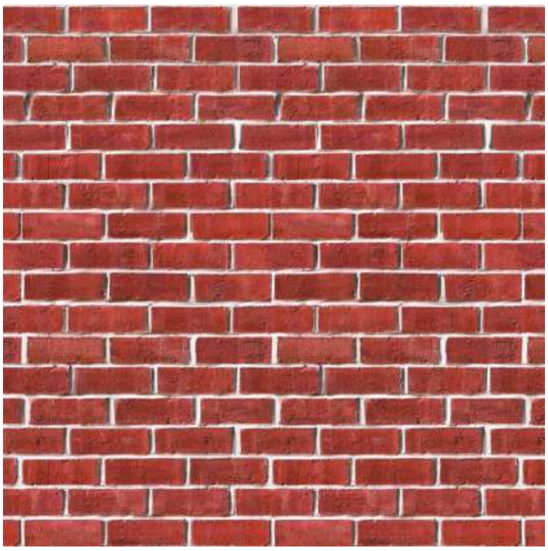

Kuvion suurin kiertoluku?
Ei kiertoa
Löytyykö peilausta?
KYLLÄ
Löytyykö liukupeilausta?
KYLLÄ
cm
EI
pm
EI
Löytyykö liukupeilausta?
KYLLÄ
pg
EI
p1
2 (180°)
Löytyykö peilausta?
KYLLÄ
Onko kahta erisuuntaista peilaussuoraa?
KYLLÄ
Onko kaikki kier-tojen keskipisteet peilaussuorilla?
KYLLÄ
pmm
EI
cmm
EI
pmg
EI
Löytyykö liukupeilausta?
KYLLÄ
pgg
EI
p2
3 (120°)
Löytyykö peilausta?
KYLLÄ
Onko kaikki kier-tojen keskipisteet peilaussuorilla?
KYLLÄ
p3m1
EI
p31m
EI
p3
4 (90°)
Löytyykö peilausta?
KYLLÄ
Onko kaksi peilaussuoraa, jotka kohtaavat 45 asteen kulmassa?
KYLLÄ
p4m
EI
p4g
EI
p4
6 (60°)
Löytyykö peilausta?
KYLLÄ
p6m
EI
p6

Ylläolevassa vuokaaviossa liukupeilauksen esiintyvyydellä tarkoitetaan sellaista liukupeilausta, joka ei ole yhdistelmä kuviossa jo esiintyvästä tavallisesta peilauksesta ja siirtosymmetriasta.

Lopuksi tarjoamme vielä tehtävän tapettiryhmien luokittelusta. Voit jatkaa tehtävää etsimällä ympäriltäsi ja netistä erilaisia tapettikuvioita, ja pohtimalla miten ne luokitellaan.

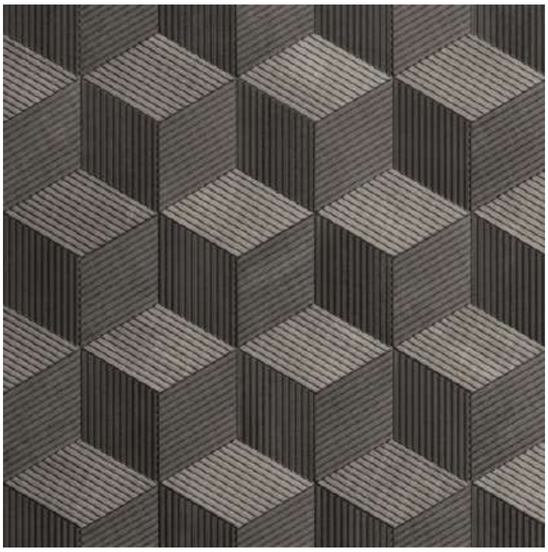
Tehtävä 5. Seuraa ylläolevaa vuokaaviota, ja selvitä mitkä tapettiryhmät esiintyvät seuraavissa kuvioissa.

a)

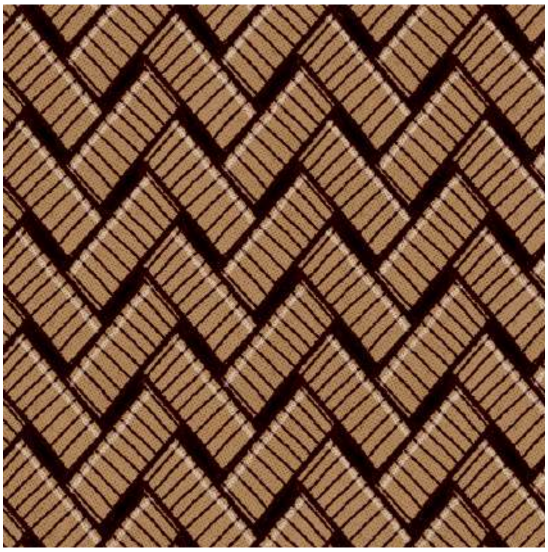


b)

c)



d)



Viitteet

Tekstissä esiintyvät kuvat ovat joko kirjoittajan itse tuottamia, tai vapaalla lisenssillä käytettäviä kuvia osoitteista:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group`

`https://unsplash.com`