Ville Tilvis
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

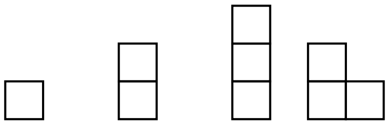
Polyominot

Polyomino on tasokuvio, joka koostuu sivuistaan toisiinsa liitetyistä, keskenään saman-kokoisista neliöistä. Yleensä polyominot lasketaan samoiksi, vaikka ne olisivatkin tasossa eri asennoissa. Myös pelikuvat lasketaan samoiksi, jolloin puhutaan vapaista polyominoista. Jos peilikuvat erotetaan toisistaan, puhutaan kiinnitetyistä polyominoista.

Ruutujen lukumäärä ilmaistaan etuliittein:

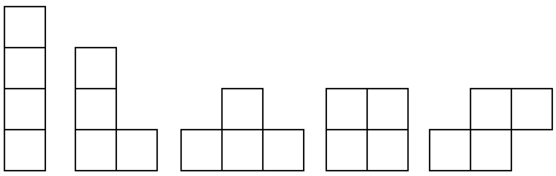
Nimi	Ruutuja
monomino	1
domino	2
tromino	3
tetromino	4
pentomino	5
heksomino	6

Monomino, domino, tetrominot



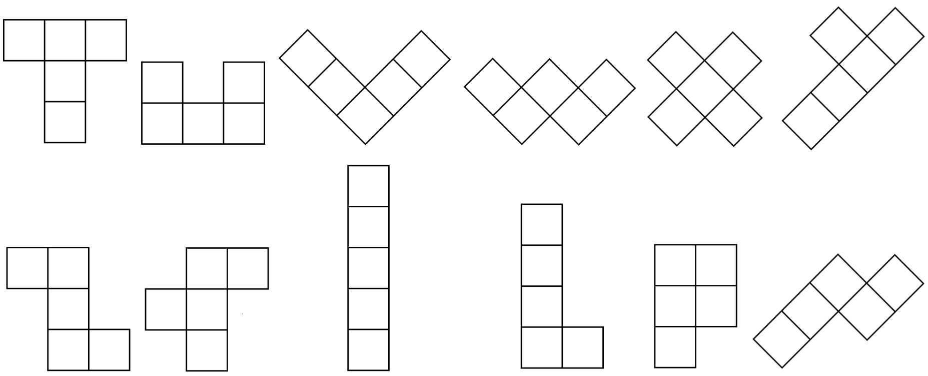
$\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ ja $\mathbf{v}_3$

Vapaat tetrominot



i, **l**, **t**, **o** ja **z**

Vapaat pentominot



Ylärivissä **T**, **U**, **V**, **W**, **X** ,**Y**,
alarivissä **Z**, **F**, **I**, **L**, **P**, **N**.

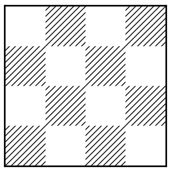
Polyominot tutuiksi

Tehtävä 1. Etsi piirtämällä – ilman mallikuvaa – kaikki monominot, dominot, trominot, tetrominot ja pentominot. Peilikuvat lasketaan samoiksi.

Tehtävä 2. Neuvostoliittolaisen Tetris-pelin (1984) palikat ovat tetrominoja. Peilikuvia ei lasketa samoiksi palikoiksi, ellei niitä voi palauttaa toisikseen kiertämällä. Kuinka monta erilaista Tetris-palaa on?

Tehtävä 3. Mitkä pentominoista ovat suoran suhteen symmetrisiä? Entä kiertosymmetrisiä?

Tehtävä 4. Käytössä on vain yhdenlaisia tetrominoja. Millä tetrominoilla 4×4 -ruudukko voidaan peittää?

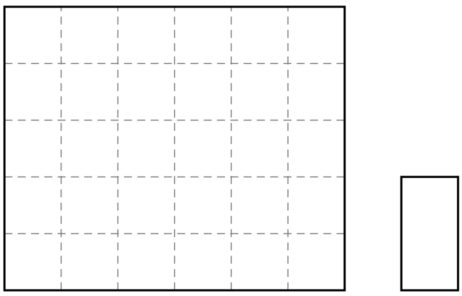


Tehtävä 5. Sovittele kaikki 12 vapaata pentominoa 8×8-neliöön. Neljä ruutua jää tyhjäksi.

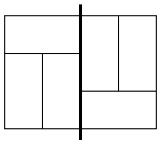
Tehtävä 6. Kasaa kaikkia vapaita pentominoja kerran käyttäen 6×10-suorakulmio.

Tehtävä 7. Kasaa kaikkia vapaita pentominoja kerran käyttäen 3×20-suorakulmio.

Tehtävä 8. Huoneen mitat ovat 5×6 ja huoneen lattia halutaan päällystää dominon muotoisilla 2×1-tatamimatoilla. Neljän maton kulmat eivät saa kohdata samassa paikassa. Miten tämän voisi tehdä?



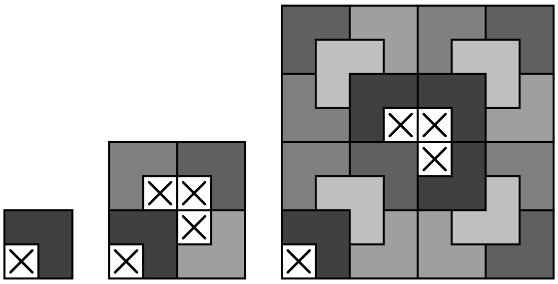
Tehtävä 9. Voiko jostakin määrästä dominoita latoa suorakulmion, jossa ei ole "murroslinjoja", eli koko suorakulmion läpäiseviä suoria saumoja? Esimerkiksi kuvan 3×4-suorakulmio ei käy, koska sen keskellä on murroslinja.



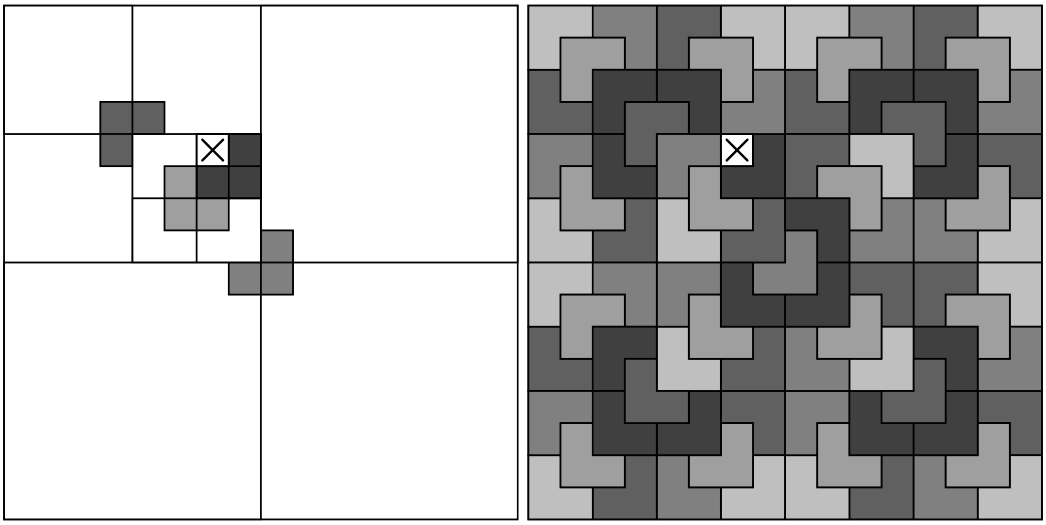
Suorakulmio voi olla kuinka suuri hyvänsä, kunhan dominoita on enemmän kuin yksi.

Tehtävä 10. Mitä tahansa yhtä pentominoa käyttäen voi laatoittaa koko tason. Laatoita taso
(A) X-pentominoilla
(B) T-pentominoilla.

Tehtävä 11. Kun neliön koko on $2^n \times 2^n$, missä n on positiivinen kokonaisluku, neliön voi aina täyttää v_3-trominolla ja yhdellä nurkassa olevalla monominolla. Miten tämä voitaisiin todistaa seuraavalla idealla?

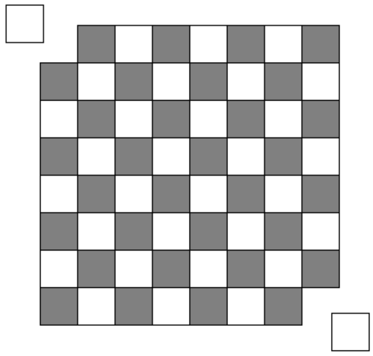


Tehtävä 12. Yleistetään tehtävän 11 tulosta: $2^n \times 2^n$-neliön, missä n on positiivinen kokonaisluku, voi aina laatoittaa yhdellä missä tahansa ruudussa olevalla monominolla ja v_3-trominolla. Perustele väite.

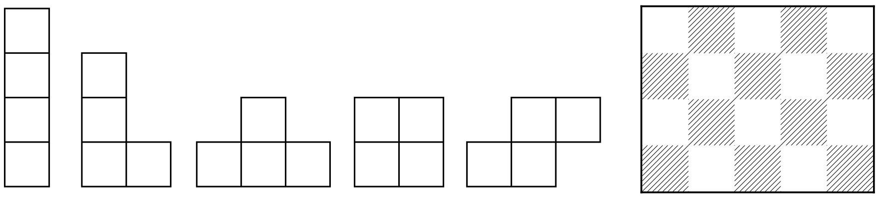


Värityksiä

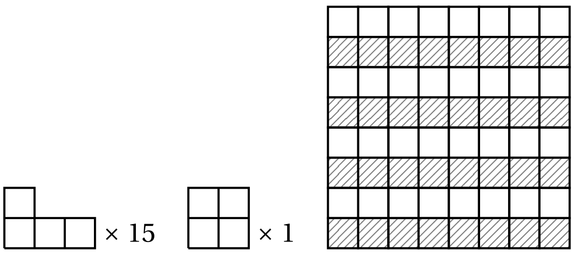
Tehtävä 13. Tärvelty shakkilauta. Shakkilaudasta poistetaan vastakkaiset nurkkaruudut. Voiko jäljelle jääneen laudan peittää dominoilla?



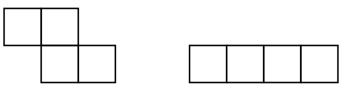
Tehtävä 14. Kaikkia vapaita tetrominoja kerran käyttäen ei voi koota 4×5 -suorakulmiota. Miten tämän voisi perustella shakkilautavärityksellä?



Tehtävä 15. Osoita seuraavan värityksen avulla, että 8×8 -ruudukkoa ei voi laatoittaa 15 kappaleella neljän ruudun L-paloja ja yhdellä 2×2-neliöllä.

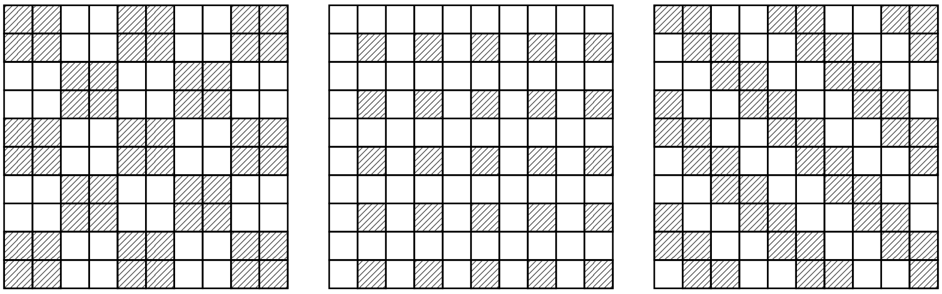


Tehtävä 16. Mielenkiintoista kyllä 10×10-ruudukkoa ei voi laatoittaa millään yhdistelmällä neljän ruudun Z-paloja ja 4×1-paloja.



Alla on kolme erilaista väritystä. Minkä avulla edellä esitetty väite voitaisiin todistaa?

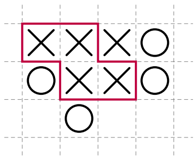
Väritys 1 Väritys 2 Väritys 3



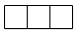
Tehtävä 17. Jatkoa tehtävään tärvelty shakkilauta: Entä jos poistetaan jotkin toiset kaksi ruutua? Missä tilanteissa loppu lauta on mahdollista peittää dominoilla?

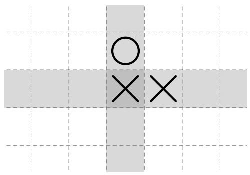
Frank Hararyn eläin-ristinolla

Muutetaan äärettömällä ruudukolla pelattavan ristinollan sääntöjä: Voittaja on se, joka ensimmäisenä muodostaa omista merkeistään tietyn ennalta sovitun polyominon, joita Frank Harary kutsui erilaisiksi eläimiksi. Esimerkiksi seuraavassa pelissä tavoitteena on ollut z-tetromino ja pelin aloittanut risti on vienyt voiton.

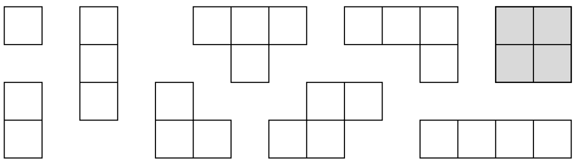


Jos aloittaja pystyy pakottamaan voiton jossakin määrässä siirtoja, tavoitteena ollut polyomino on ”voittaja”. Mikäli taas toisena pelaava pystyy pitkittämään peliä loputtomiin, tavoitekuvio on ”häviäjä” (Täsmällisempää olisi sanoa ”tasapelaaja”, sillä ristinollassa täydellisesti pelaava aloittava pelaaja ei voi hävitä, mutta nimitys ”häviäjä” on vakiintunut.)

Esimerkiksi suora tromino  on voittaja, ja voiton voi pakottaa suoraan kolmessa siirrossa. Ensimmäisen siirron jälkeen vastustaja ei voi tukkia sekä pystysuoraa että vaakasuoraa linjaa, joten aloittaja saa toiselle näistä linjoista molemmista päistä auki olevan kahden suoran, ja voittaa seuraavalla siirrolla.

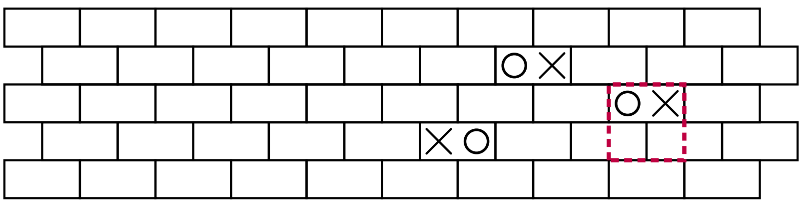


Itse asiassa monomino, domino, molemmat trominot ja kaikki paitsi yksi tetrominoista ovat voittajia. Pienin häviäjä on neliötromino.



Kahdeksan voittajaa ja yksi häviäjä.

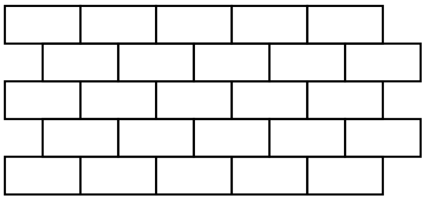
Voittajaksi todistaminen käy palojen koon kasvaessa työlääksi, mutta neliötetrominon voi todistaa häviäjäksi nokkelan yksinkertaisella tavalla. Toisena pelaava voi nimittäin estää neliön muodostumisen loputtomiin ajattelemalla, että peliruudukko koostuu kahden ruudun kokoisista dominotiilistä, jotka on ladottu seuraavasti.



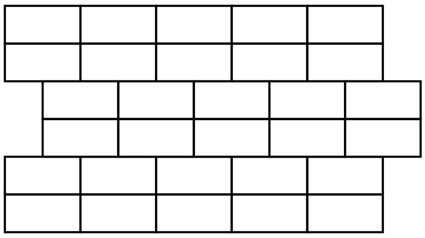
Puolustuksen ideana on pelata aina samaan dominoon kuin mihin vastustaja on juuri pelannut. Koska jokainen 2×2-neliö sisältää ainakin yhden kokonaisen dominon, kokonainen neliö ei voi koskaan täyttyä aloittajan risteistä, ja puolustus on siis voittamaton.

Pentominoista kolme on voittajia ja loput yhdeksän häviäjiä. Seuraavissa tehtävissä etsitään nämä yhdeksän häviäjää.

Tehtävä 18. Mitkä viisi pentominoa voidaan osoittaa häviäjäksi eläin-ristinollassa tällä dominolaatoituksella?



Tehtävä 19. Tällä dominolaatoituksella voi todistaa häviäjäksi yhden sellaisen pentominon, johon edellinen laatoitus ei riittänyt. Mikä pentomino on kyseessä?



Tehtävä 20. Todista uudenlaisten dominolaatoitusten avulla eläin-ristinollan häviäjiksi vielä kolme uutta pentominoa. Viimeiset kolme pentominoa ovat voittajia.

Viitteet

[1] BELLOS, A.: *Can You Solve My Problems?*, Guardian Books, 2016.

[2] CUMMINGS, J.: *Proofs: A Long-Form Mathematics Textbook*, Amazon, 2021.

[3] GARDNER, M.: *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, Inc., 2001

[4] GOLOMB, S.W.: *Polyominoes*, Princeton University Press, 1994.

[5] ITO, H. ja H. MIYAGAWA, *Snaky is a winner with one handicap*, 8th Hellenic European Conference on Computer Mathematics and its Applications, 2007.

[6] MASON, J.: *Counting polyominoes of size 50*, `https://oeis.org/A000105/a000105_1.pdf`, luettu 11.4.2024

[7] TILVIS, V. ja E.V. VESALAINEN: *Pitkän matematiikan lisäsivut 1: Täsmällinen päättely*, Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio, 2020.