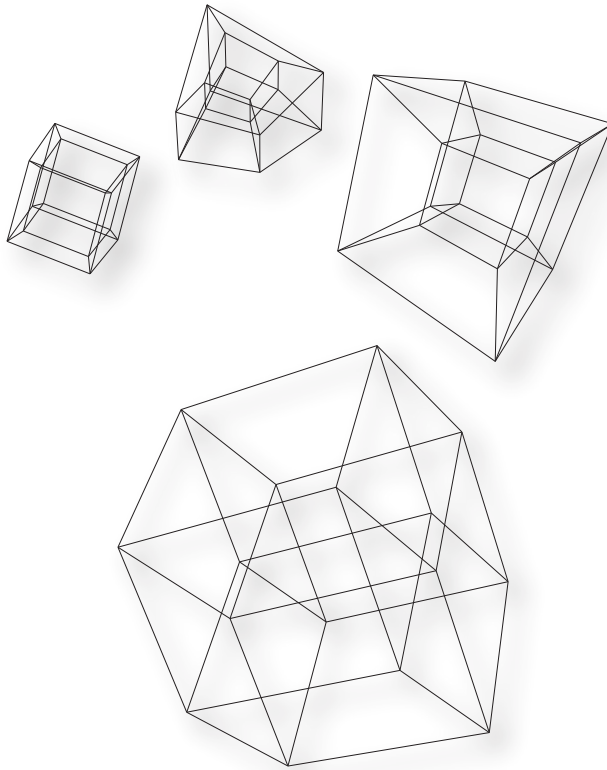
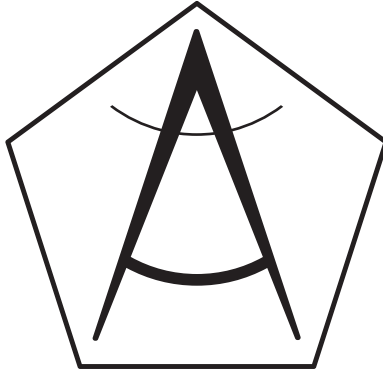


PITKÄN
MATEMATIIKAN
LISÄSIVUT
4

GEOMETRIA A ERI
ULOTTUVUUKSISSA



VILLE TILVIS
VALONSÄDE VESALAINEN



PITKÄN MATEMATIIKAN LISÄSIVUT 4

GEOMETRIAA ERI ULOTTUVUUKSISSA

Ville Tilvis ja Valonsäde Vesalainen

Pitkän matematiikan lisäsivut 4: Geometriaa eri ulottuvuuksissa

Viipurin Reaalikoulu Oy

Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Matematiikan opetuksen valtakunnallinen kehittämissihteri Harppi

Helsinki 2025

1. Painos

Jotta kirjan käyttö olisi mahdollisimman mutkatonta, sen sisältö on lisensoitu avoimella Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -käyttöluvalla.



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>

Kirjaa ja sen osia saa vapaasti levittää ja muokata, kunhan alkuperäiset tekijät mainitaan.

Kannen suunnittelu Salli Kulmala

ISBN 978-952-69550-8-7 (pehmeäkantinen)

ISBN 978-952-69550-9-4 (PDF)

Sisällys

Esipuhe	5
1 Tilaulottuvuudet ja hyperkuutio	6
Kaksiulotteiset maailmat	6
Kolmesta ulottuvuudesta neljään: hyperkuutio	8
Korkeammat ulottuvuudet	11
Harjoitustehtäviä	12
2 Korkeampiulotteinen koordinaatisto ja vektorit	16
Avaruuden määritelmä koordinaattien avulla	17
Vektorit	18
Pistetulo ja kulma n ulottuvuudessa	19
Harjoitustehtäviä	22
3 Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö	23
Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön todistus	24
Yhtäsuuruus Cauchyn–Schwarzin epäyhtälössä	25
Harjoitustehtäviä	27
4 Summausmerkintä Σ	38
Aritmeettinen summa	39
Summaus kahden indeksin yli	40
Harjoitustehtäviä	42
5 Korrelaatiokerroin	45
Korrelaatiokertoimen laskeminen	46
Pearsonin korrelaatiokertoimen yleinen kaava n lukuparille	48
Harjoitustehtäviä	49

6 RGB-värit koordinaatistossa	52
RGB-kuutio	54
Epälineaariset värikoordinaatit	55
RGB ja muut värikoordinaatit	56
Värien muunnoksia	57
Neljäs ulottuvuus: tetrakromaattisuus	58
Harjoitustehtäviä	59
7 Ellipsi, hyperbeli ja paraabeli	61
Ellipsi	61
Hyperbeli	63
Paraabeli	65
Optiset ominaisuudet	66
Kartioleikkaukset	70
Newtonin mekaniikka ja kartioleikkaukset	73
Harjoitustehtäviä	74
8 Kartioleikkaukset koordinaatistossa	78
Paraabelin yhtälö	78
Ellipsin yhtälö	79
Hyperbelin yhtälö	80
Kierrot ja siirrot koordinaatistossa	82
Toisen asteen tasokäyrät	86
Eksentrisyys	88
Harjoitustehtäviä	89
Liitteet	93
Ensimmäiset vihjeet	96
Toiset vihjeet	115
Lähteet	137

Esipuhe

Pitkän matematiikan lisäsivut ovat itseopiskelumateriaalia niille, jotka kaipaavat haasteita ja haluavat laajentaa matematiikan osaamistaan lukio-oppimäärän ulkopuolelle. Lisäsivuihin on valittu aihepiirejä, joita lukiossa ei yleensä kohtaa, mutta joihin matematiikasta innostuneen voisi olla kiintoisaa ja palkitsevaa tutustua.

Materiaali sisältää lyhyet teoriaosiot ja runsaasti harjoitustehtäviä, joihin on kattavat vihjeet ja useimpiin toiset vihjeet. Tehtäviä on syytä yrittää aina ensin itse, mutta vihjeet ja toiset vihjeet on tarkoitettu käytettäväksi. Monet tehtävistä ovat huomattavan vaikeita, eikä kannata huolestua, jos osa niistä jää ratkaisematta.

Tässä lisäsivujen neljännessä osassa käsittelemme analyttistä ja hieman klassistakin geometriaa eri ulottuvuuksissa. Tutustumme neliulotteiseen avaruuteen ja korkeampiin ulottuvuuksiin luvuissa 1 ja 2, ja sovellamme näitä tekniikoita luvussa 3, joka käsittelee Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä. Luvussa 4 käsittelemme summausmerkinnän Σ . Luvut 5 ja 6 esittelevät korrelaation ja RGB-värien avulla avaruuksia, joissa koordinaatit eivät kuvaa paikkoja vaan esimerkiksi värejä. Luvut 7 ja 8 puolestaan kattavat kartioleikkausten teorian perusteet ensin klassisen geometrian ja sitten analyttisen geometrian työkaluin.

Haluamme kiittää kaikkia kollegoita ja opiskelijoita, jotka ovat antaneet kannustavaa palautetta kirjan luonnoksista. Erityiset kiitokset kuuluvat värien asiantuntija Harald Arnkilille, joka antoi arvokkaita kommentteja lukuun 6, ja Anu Mäkijärvelle, joka oikoluki käsikirjoituksen. Lisäksi Ville Tilvis haluaa kiittää perhettään tuesta ja huomattavasta pitkämielisyydestä kirjaprojektin suhteen.

Kaikista virheistä, puutteista ja parannusehdotuksista toivotaan sähköpostia osoitteeseen ville.tilvis (at) mayk.fi. Kirjan sähköinen versio on saatavilla sivulla www.lisasivut.fi.

Antoisia hetkiä lisäsivujen parissa!

Helsingissä ja Vantaalla 12.6.2025

Ville Tilvis ja Valonsäde Vesalainen

Opettaja! Tehtävien ratkaisut voi tilata osoitteesta ville.tilvis (at) mayk.fi

1 Tilaulottuvuudet ja hyperkuutio

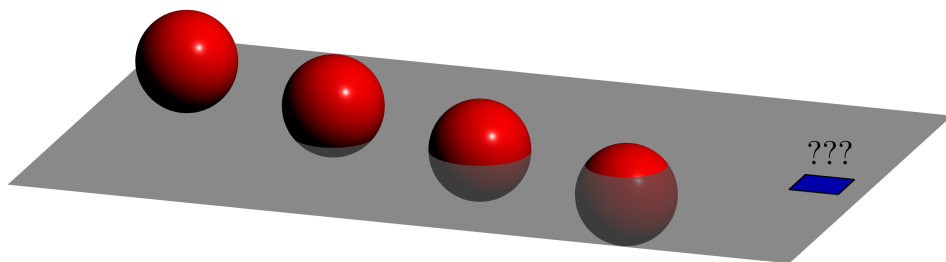
Elämme kolmiulotteisessa maailmassa, ja olemme harjaantuneet piirtämään kaksikulotteisille pinnoille. Intuitiomme toimiikin taso- ja avaruusgeometriassa varsin hyvin. Jos sen sijaan pohdiskelemme, miltä neliulotteinen maailma näyttäisi, hahmotuskykymme horjuu pahasti.

Korkeammista ulottuvuuksista löytyy kaikenlaista mielenkiintoista ja hyödyllistä, joten tarvitsemme työkaluja, joilla vajavaista hahmotuskykyämme voisi tukea. Analyttinen geometria on tähän luonteva työkalu, sillä koordinaatiston avulla geometria palautuu luvuiksi, ja lukujen kanssa olemme näppäriä. Tähän lähestymistapaan sukelletaan luvussa 2.

Tässä luvussa yritämme rakentaa intuitiivista käsitystä neljännestä ulottuvuudesta. Etenemme ilman kunnollisia määritelmiä, joten esitetyt päättelyt eivät ole matemaattisen täsmällistä. Aloitamme analogialla: jos ymmärrämme, miltä kolmiulotteinen maailma näyttää kahdesta ulottuvuudesta käsin, voimme yleistää nämä ajatukset koskemaan siirtymää kolmesta ulottuvuudesta neljään.

Kaksiulotteiset maailmat

Edwin Abbott Abbott julkaisi vuonna 1884 klassikkoteoksen *Tasomaa* [1], joka kuvaa janojen, monikulmioiden ja ympyröiden elämää tiukan kaksikulotteisessa maailmassa. Kirjan päähenkilö A. Neliö kohtaa Tasomaan ulkopuolelta saapuvan kolmiulotteisen Pallon, jonka herra Neliö näkee tyhjältä ilmestyvänä ympyränä, joka vuoroin kasvaa ja kutistuu Pallon liikkuesssa tasomaan läpi.



Hiemankin tasomaan ulkopuolella pysytellessään Pallo on Tasomaan kahteen ulottuvuuteen sidotuille asukeille näkymätön.

Herra Neliön on vaikea ymmärtää, kun Pallo kertoo voivansa tulla sisään kaksikulotteiseen taloon kulkematta sen seinien läpi ja näkevänsä talon kaikki huoneet yhtä

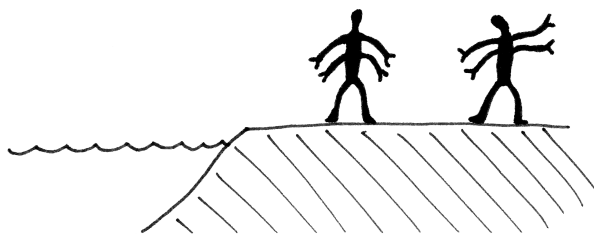
aikaa kolmannesta ulottuvuudesta käsin. Pallolle esineiden poimiminen lukitusta kaapista on vaivatonta ja herra Neliölle kauhistus.

Pallo johdattaa Neliön kolmen ulottuvuuden saloihin ("ylös, vaan ei pohjoiseen!"), mutta kun Neliö alkaa pohtia vielä korkeampien ulottuvuuksien olemassaoloa, on Pallon vuoro olla ymmällään ja lopulta suuttua: tokihan kolme ulottuvuutta on kaikki, mitä on, tai edes voi olla!

Jos neljäs tilaulottuvuus todella olisi olemassa, oma kolmiulotteinen maailmamme olisi sen rinnalla yhtä alkeellinen ja suojaton kuin Tasomaa sitä avaruudesta tarkkailevalle Pallolle. Samalla tavalla kuin Pallo näkee herra Neliön koko sisäosan, olisi meidän kehojemme, kaupunkiemme ja planeettamme jokainen atomi nähtävissä siististi vierekkäin ja yhtä aikaa neliulotteisesta avaruudesta käsin.

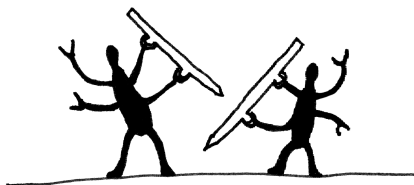
Tasomaa on innoittanut lukuisia jatko-osia, joista erityisen hyviä ovat (valitettavasti suomentamattomat) *Flutterland* [47] ja *The Planiverse* [9].

Sata vuotta *Tasomaan* julkaisun jälkeen ilmestynyt *The Planiverse* kertoo fysikaalisesti uskottavasta kaksiulotteisesta maailmasta Ardesta, jossa kiekkomaisella planeetalla asuu kaksiulotteisia, nelikäisiä otuksia.



Kirjoittaja A. K. Dewdney on koonnut lukuisten vapaaehtoisten ehdotuksista biologiaa ja teknologiaa myöten toimivan maailman, jonka kaksiulotteinen logiikka yllättää yhä uudestaan epäintuitiivisuudellaan. Esimerkiksi solmut ovat mahdottomia, kahden kaupungin välinen tie peittää alleen kaiken viljelysmaan ja kahden Arden asukin on mahdollista ohittaa toisensa vain kiipeämällä.

Yksityiskohtana todettakoon, että Arden muinaisissa taisteluissa kaksikahvaiset keihäät toimivat myös erinomaisesti suojaavina kilpinä.



Kolmesta ulottuvuudesta neljään: hyperkuutio

Ennen korkeampiulotteisiin avaruuksiin sukeltamista todettakoon, että mahdollinen neljäs tilaulottuvuus on fysiikan osalta puhtaasti spekulaaation puolella. Teoreettisessa fysiikassa on kyllä rakennettu lukuisia malleja, joissa tilaulottuvuuksia on yli kolme (kuten vaikkapa 10, 11 tai 26 ulottuvuutta), mutta ainakaan kirjoitushetkellä ei ole kokeellisia todisteita siitä, että mikään näistä malleista kuvaisi todellisuutta.

Toisaalta moniulotteista matematiikkaa käytetään fysiikassa erittäin paljon, ja hyvin menestyksekkäästi. Esimerkiksi Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria käsittelee neliulotteista aika-avaruutta, jossa neljäs ulottuvuus on aika.

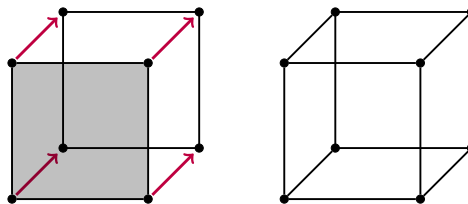
Voimme kuitenkin vallan mainiosti pohtia neljää tilaulottuvuutta puhtaan matemaattisesti. Tarkastelemme nyt neliulotteista kuutiota eli *hyperkuutiota* eli *tesse-raktia*. Etenemme intuition varassa alemmista ulottuvuuksista kohti korkeampia.

Piste on esimerkki nollaulotteisesta objektista: sillä ei ole kokoa. Jos taas käytössä on yksi tilaulottuvuus, piste voi siirtyä sitä pitkin, jolloin alkuperäisen ja lopullisen sijainnin välille muodostuu jana.

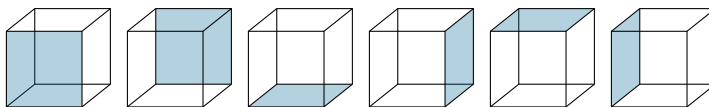


Jos tämä jana liikkuu pituutensa verran uuteen, edellistä liikettä vastaan kohtisuoraan suuntaan, se piirtää mennessään kaksiulotteisen neliön.

Jos neliön annetaan liikkua sivunsa pituuden verran kahta aikaisempaa suuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan, muodostuu kuutio. Jokainen neliön sivu piirtää mennessään uuden neliön, jotka alkuperäisen ja loppuneliön kanssa muodostavat kuutiota rajoittavat kuusi kaksiulotteista tahkoa.

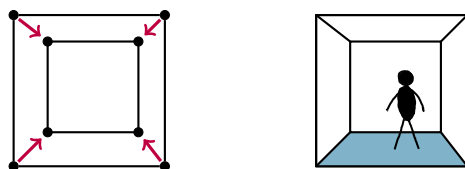


Koska kuutio on tässä piirretty kaksiulotteiselle alustalle, jotkin neliön muotoisista tahkoista näkyvät vääristyneinä suunnikkaiksi.

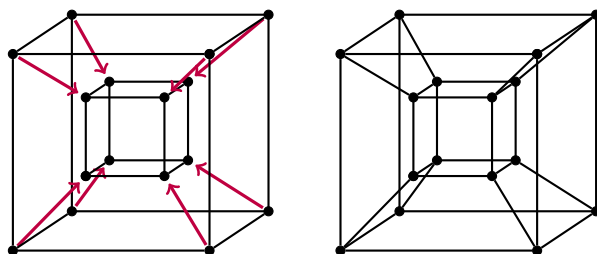


Hahmotamme vaivatta, millaisia kolmiulotteisia kappaleita edelliset kaksiulotteiset piirrokset kuvaavat, sillä aivomme ovat sopeutuneet kolmiulotteiseen maailmaan. Kaksiulotteiselle tarkkailijalle (kuten herra Neliölle) kuvamme kuutiosta näyttäytyisi sekamelskana, jossa kuution sivut leikkaavat toisiaan.

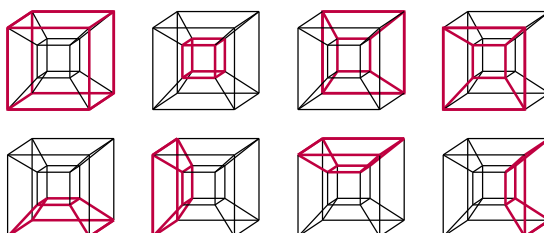
Kuution voisi piirtää myös hieman eri perspektiivissä, jolloin sen hahmottaminen saattaisi olla helpompaa herra Neliölle. Selitys voisi kuulua ”Neliön liikuessa kolmanteen ulottuvuuteen neliö etäännyy alkuperäisestä tasosta ja näyttää siksi pienenevän. Neliö piirtää kuution liikuessaan tasoaan vastaan kohtisuoraan suuntaan särmänsä pituuden verran.”



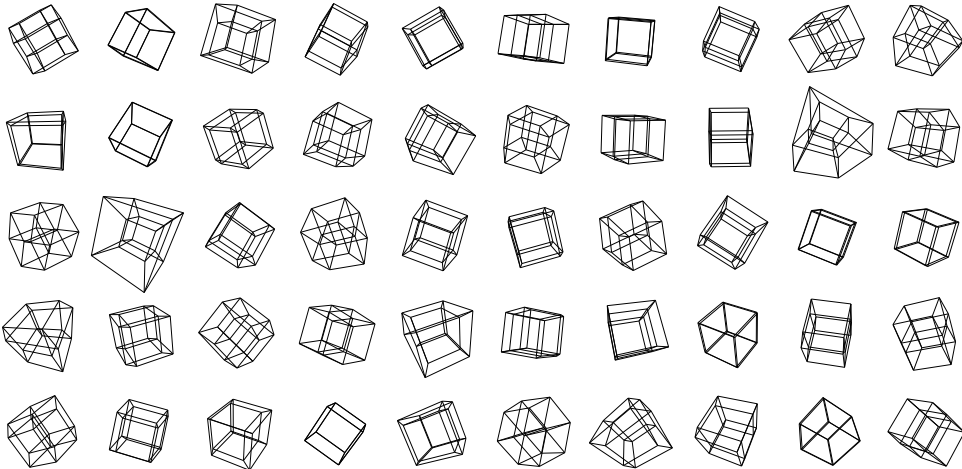
Vastaava analogia voi auttaa neljännen ulottuvuuden hahmottamisessa. Liikutetaan kuutiota sivunsa verran uuteen suuntaan, joka on kohtisuorassa kaikkia kolmea aiempaa liikesuuntaa vastaan. Kuution täytyy siirtyä pois kolmiulotteisesta avaruudesta, ja etäännyessään se piirtää neliulotteiseen hyperavaruuteen hyperkuution eli tesseraktin, joka on hahmoteltu seuraavassa kuvassa.



Jokainen kuution kuudesta sivutahkosta piirtää mennessään uuden kuution, jotka alku- ja loppukuution kanssa muodostavat hyperkuution kolmiulotteisen pinnan. Kaikki kahdeksan kuutiota on vuorollaan korostettu seuraavissa kuvissa. Neliulotteisen kuvion kuvaaminen kolmiulotteisesti valitettavasti vääristää kuutioita huomattavasti.

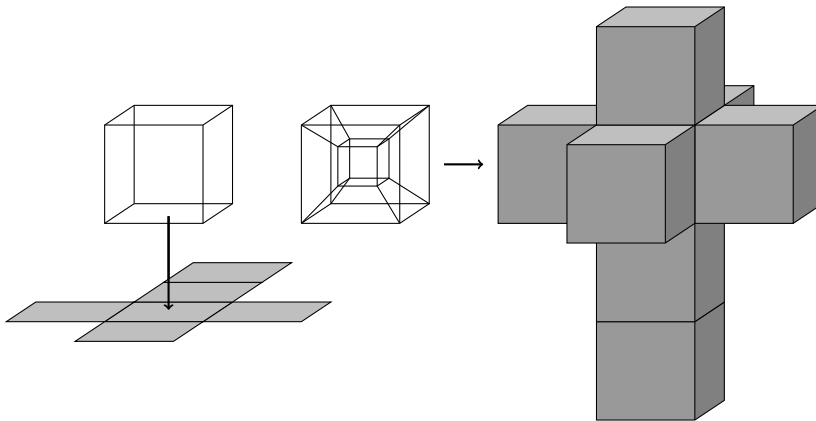


Edellä piirtämämme kuvat ovat oikeastaan kolmi- ja neliulotteisten kappaleiden projektioita kahteen ulottuvuuteen. Projektion voi hahmottaa varjona, jonka kappale jättää paperille ollessaan valonlähteen edessä. Projektion muoto riippuu voimakkaasti siitä, missä asennossa kuutio tai hyperkuutio on.



Hyperkuution projektioita

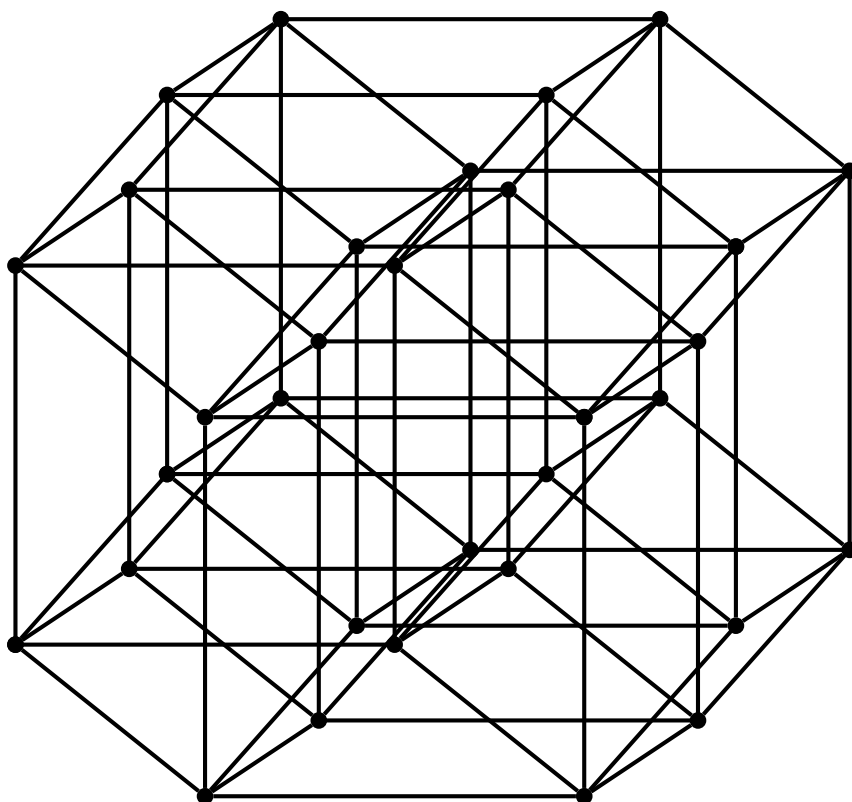
Visualisoidaan hyperkuutiota vielä yhdellä tavalla: jos kuution tahkot leikkaa irti toisistaan sopivista kohdista, kuution kaksiulotteisen pinnan kuusi neliötä voi taivuttaa samaan tasoon esimerkiksi seuraavalla tavalla:



Vastaavasti hyperkuution kolmiulotteinen pinta koostuu kahdeksasta kuutiosta, jotka voi taitella auki samaan kolmiulotteiseen avaruuteen. Taittelusta tekee hieman epäintuitiivista se seikka, että kuutioiden kääntyessä niiden naapurikuution kanssa jakama tahko pysyy paikoillaan. Vastaavasti Tasomaan asukille olisi vaikeaa hahmottaa, miten kaksi toisissaan kiinni olevaa neliötä voisi kääntyä ilman että niiden sivut irtoavat toisistaan.

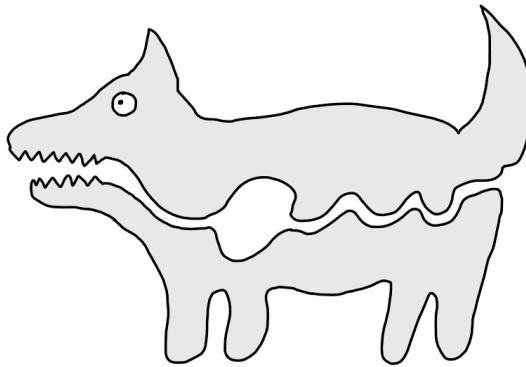
Korkeammat ulottuvuudet

Mikään ei tietysti estä laajentamasta tarkastelua viisiulotteisiin hyperavaruuksiin tai sitä vielä korkeampiin ulottuvuuksiin, ja sieltä löytyykin paljon mielenkiintoista matematiikkaa. Korkeampien ulottuvuuksien kohdalla kuvat valitettavasti uhkaavat käydä sekaviksi. Alla on kaavio viisiulotteisesta hyperkuutiosta.



Harjoitustehtäviä

Tehtävä 1. Tarkastellaan *The Planiverse* -kirjan hengessä kaksiulotteista maailmaa, jota kaksiulotteiset olennot asuttavat. Tässä on mallikuva kaksiulotteisesta koirasta. Mitä ongelmia piirroksen liitty? Mitä muutoksia koiran anatomiaan voisi tehdä, jotta se pärjäisi paremmin 2D-maailmassa?



Vihje s. 96 →

Toinen vihje s. 115 →

Tehtävä 2. a) Neliön reuna koostuu neljästä yksiulotteisesta janasta, ja näiden janojen päätepisteet ovat neliön neljä kärkeä. Vastaavasti kuution pintaan kuuluu neliöitä, niiden välisiä janoja sekä kärkipisteitä. Täydennä seuraava taulukko laskemalla eriulotteisten kuutioiden osien lukumäärät. Kuvasta laskemisen lisäksi voit hyödyntää lukujen muodostamia säännönmukaisuuksia. Osaatko perustella ne?

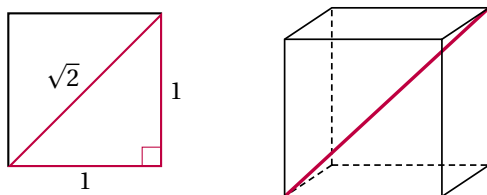
Kappale	Kärkiä	Janoja	Neliöitä	Kuutioita	Hyperkuutioita
0D: Piste	1	0	0	0	0
1D: Jana	2	1	0	0	0
2D: Neliö	4	4	1	0	0
3D: Kuutio					
4D: Hyperkuutio					

b) Laske kullekin riville luku $KÄRJET - JANAT + NELIÖT - KUUTIOT + HYPERKUUTIOT$. Mitä huomaat?

Vihje s. 96 →

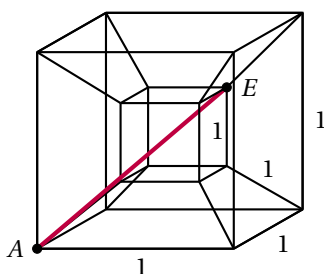
Toinen vihje s. 115 →

Tehtävä 3. Kun neliön sivu on 1, sen lävistäjän pituudeksi saadaan laskettua Pythagoraan lauseella $\sqrt{2}$.



a) Perustele Pythagoraan lauseen avulla, että kuution vastakkaisten nurkkien välinen avaruuslävistäjä on pituudeltaan $\sqrt{3}$, kun kuution särmän pituus on 1. Avaruuslävistäjä voidaan määritellä janaksi, joka yhdistää kaksi sellaista kuution kärkipistettä, jotka eivät kuulu samaan sivutahkoon.

b) Hyperkuution ”hyperavaruuslävistäjä” on jana, joka yhdistää kaksi hyperkuution pistettä, jotka eivät kuulu samaan reunakuutioon. Esimerkiksi seuraavassa kuvassa jana AE on hyperavaruuslävistäjä. Laske sen pituus, kun hyperkuution särmän pituus on 1.



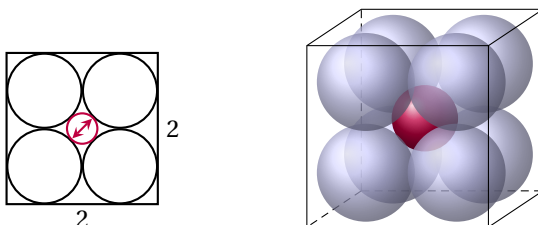
c) Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Miten tulos yleistyy n -ulotteiselle hyperkuutiolle?

Vihje s. 96 →

Toinen vihje s. 115 →

Tehtävä 4. Tässä tehtävässä tarkastellaan hyperpalloja.

a) Neliön, jonka sivu on 2, sisälle on pakattu neljä ympyrää, joiden halkaisijat ovat pituuksiltaan 1. Ympyrät sivuavat neliön sivuja ja viereisiä ympyröitä. Neliön keskelle voidaan piirtää vielä viides ympyrä, joka sivuaa ulkoisesti neljää muuta. Mikä on tämän viidennen ympyrän halkaisija?



b) Yleistetään edellistä: Kuution särmä on 2, ja kuution sisälle on pakattu kahdeksan palloa, joiden halkaisijat ovat kukin 1. Kuution jokaisen kärjen vieressä on siis pallo, joka sivuaa kärjen viereisiä tahkoja ja naapuripalloja. Lisätään vielä yksi pallo, jonka keskipiste on kuution keskipiste ja joka sivuaa kaikkia muita palloja ulkoisesti. Mikä on sen halkaisija?

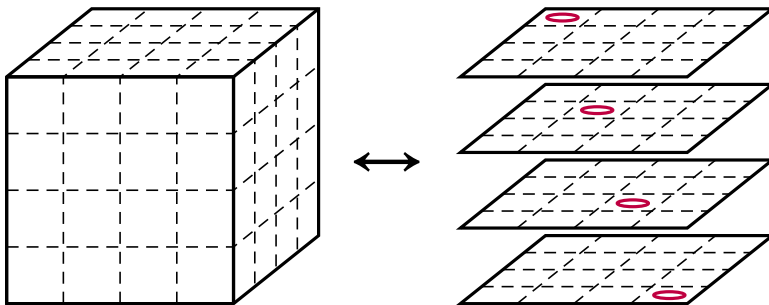
c) Tutkitaan neliulotteista hyperkuutiota, jonka särmä on 2. Sen sisään pakataan hyperpalloja, joiden halkaisijat ovat pituuksiltaan 1. (Hyperpallo koostuu pisteistä, jotka ovat vakioetäisyydellä sen keskipisteestä.) Palloja on yhtä monta kuin hyperkuution kärkiä ja ne kaikki sivuavat hyperkuution pintaa ja naapuripalloja. Kuinka suuri on hyperkuution keskellä oleva pallo, joka sivuaa ulkoisesti kaikkia muita palloja?

d) Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Yleistä tulos koskemaan n -ulotteisia hyperpalloja, jotka on pakattu n -ulotteiseen hyperkuutioon, jonka särmä on 2. Mitä yllättävää tapahtuu keskimmäisen pallon halkaisijalle tapauksissa $n = 5$, $n = 9$ ja $n = 10$?

Vihje s. 97 →

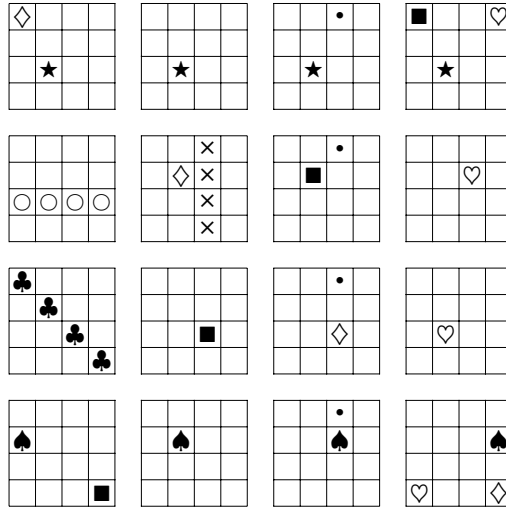
→ Toinen vihje s. 116

Tehtävä 5. Neliulotteinen ristinolla. Ristinolla on perinteikäs peli, jossa kaksi pelaajaa täyttää vuorollaan ruudukkoon toinen ristejä, toinen nollia. Voittaja on se, joka saa muodostettua omista merkeistään sovitun mittaisen suoran pystyyn, vaakaan tai vinoon. Paljon pelattu versio on yksinkertainen 3×3 -ruudukko. Ristinollaa voi pelata myös kolmessa ulottuvuudessa, esimerkiksi $4 \times 4 \times 4$ -kuutiossa. Tällöin tavoitteena on muodostaa 4 merkin suora pystyyn, vaakaan, vinoon tai kuution avaruuslävistäjää pitkin. Pelilauta on helpointa piirtää kerroksittain.



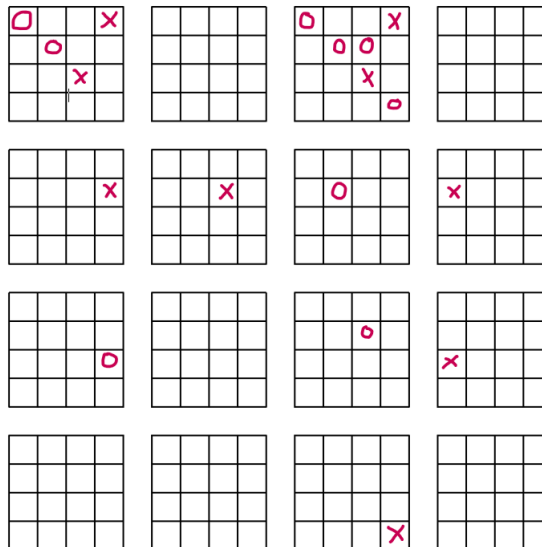
Neliulotteista ristinollaa voi pelata $4 \times 4 \times 4 \times 4$ -hyperkuutiossa. Hahmottamisen helpottamiseksi pelilaudan voi piirtää neljänä $4 \times 4 \times 4$ -kuutiona tai kuutenatoista 4×4 -neliönä. Seuraavassa kuvassa on esimerkki tällaisesta pelilaudasta.

Voittava neljän suora voi kulkea esimerkiksi yhdessä suunnassa (symbolit ✕, ○, ★ ja ●), neliön lävistäjää pitkin (♣ ja ♠), kuution avaruuslävistäjää pitkin (♡) tai hyperkuution ”hyperavaruuslävistäjää” pitkin (◇ ja ■).



Ensimmäinen tehtävä: Pelaa 3D-ristinollaa ja sitten 4D-ristinollaa jonkun kanssa. Yritä hahmottaa erityyppiset voittorivit.

Toinen tehtävä: Seuraavassa pelissä on ristin siirtovuoro, ja tarjolla on nopea voitto. Mikä on voittosiirto?



Neliulotteiseen ristinollaan palataan vielä tehtävässä 8.

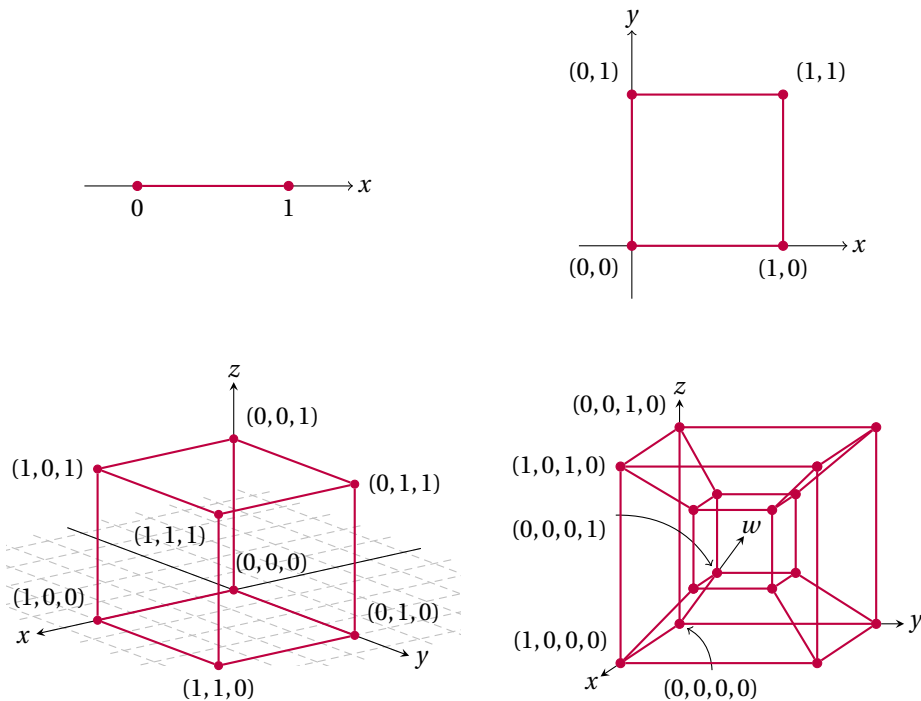
Vihje s. 97 →

→ Toinen vihje s. 116

2 Korkeampiulotteinen koordinaatisto ja vektorit

Edellisessä luvussa harrastettu hieman epämuodollinen päättely saattoi jättää huolen siitä, olikohan intuitiomme korkeampien ulottuvuuksien suhteen sittenkään oikeassa. Täsmällisyyden ja helppouden vuoksi onkin viisasta ottaa nyt käyttöön koordinaatisto.

Tuttuun tapaan voimme merkitä yhdellä reaaliluvulla pisteen sijaintia suoralla, järjestetyllä reaalilukuparilla (x, y) sijaintia tasossa, ja kolmella reaalikoordinaatilla (x, y, z) sijaintia kolmiulotteisessa avaruudessa. Täysin vastaavasti neliulotteista avaruutta voidaan kuvata reaalilukunelikolla (x, y, z, w) . Merkitsemme tässä luvussa ulottuvuuksien määrää positiivisella kokonaisluvulla n .

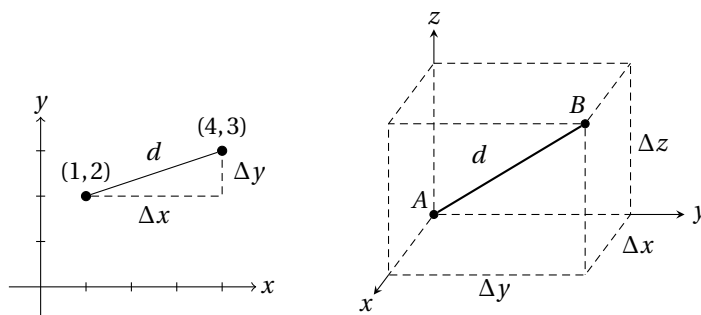


Avaruuden määritelmä koordinaattien avulla

Voimme määritellä n -ulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteet reaalkoordinaattien listoina $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Esimerkiksi kuusiulotteisesta avaruudesta löytyy piste $(3, -2, \pi, \sqrt{7}, 0, 10^{100})$.

Pisteiden lisäksi avaruutemme tarvitsee vielä määritelmän etäisyydelle ja kulmalle.

Kaksiulotteisessa koordinaatistossa etäisyyksiä lasketaan perinteisesti Pythagoraan lauseella: Mikäli pisteiden A ja B x -koordinaattien erotus on Δx ja y -koordinaattien erotus Δy , pisteiden etäisyydeksi saadaan $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.



Esimerkiksi pisteille $A = (1, 2)$ ja $B = (4, 3)$ pätee

$$\Delta x = 4 - 1 = 3 \quad \text{ja} \quad \Delta y = 3 - 2 = 1,$$

joten pisteiden etäisyydeksi saadaan $d_{AB} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Kolmessa ulottuvuudessa kahden pisteen väliseksi etäisyydeksi saadaan tehtävän 3 päättelyllä

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

On siis luontevaa ottaa kahden pisteen etäisyyden määritelmäksi n -ulotteisessa avaruudessa

$$d = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2},$$

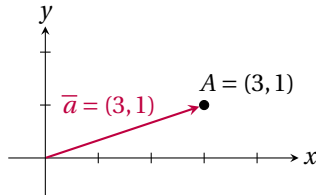
missä kukin Δx_i on tutkittavien pisteiden x_i -koordinaattien erotus. Esimerkiksi nelikulotteisen avaruuden pisteiden $A = (1, 2, 3, 4)$ ja $B = (4, 0, -1, 2)$ välinen etäisyys on

$$d = \sqrt{(1-4)^2 + (2-0)^2 + (3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{33}.$$

Ennen kulmien määrittelemistä on syytä puhua hieman vektoreista.

Vektorit

Sanaa *vektori* käytetään eri tieteenaloilla eri merkityksissä, ja matematiikan sisälläkin vakiintuneita merkityksiä on useita. Tässä yhteydessä määrittelemme vektorin itse asiassa täsmälleen samalla tavalla kuin avaruuden pisteen: vektori on lista reaalilukukoordinaatteja. Esimerkiksi koordinaattipari $(3, 1)$ tarkoittaa sekä tason pistettä $A = (3, 1)$ että origosta kyseiseen pisteeseen kulkevaa nuolta, jolloin puhumme vektorista $\vec{a} = (3, 1)$.



Vektorin pituus määritellään kyseistä vektoria vastaavan pisteen etäisyydeksi origosta, eli esimerkiksi vektorin $\vec{a} = (3, 1)$ pituus olisi

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,16.$$

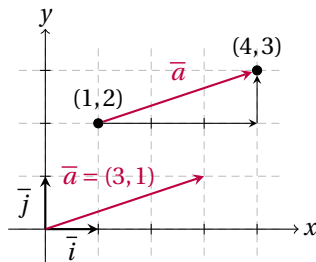
Määrittelemme, että vektorien yhteenlasku ja vakiolla kertominen tehdään koordinaateittain; esimerkiksi tason vektoreille

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{ja} \quad k \cdot (a, b) = (ka, kb),$$

missä a, b, c, d ja k ovat reaalilukuja.

Ilmaisulla ”pisteestä B pisteeseen C kulkeva vektori $\overrightarrow{BC}$ ” tarkoitamme pisteiden C ja B erotusta. Esimerkiksi pisteiden $B = (1, 2)$ ja $C = (4, 3)$ välinen vektori on

$$\overrightarrow{BC} = (4, 3) - (1, 2) = (4 - 1, 3 - 2) = (3, 1) = \vec{a}.$$



Muita tapoja merkitä samaa vektoria olisivat esimerkiksi

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} \quad \text{tai} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad \vec{a} = \langle 3, 1 \rangle.$$

Pistetulo ja kulma n ulottuvuudessa

Kahden n -ulotteisen reaalisen vektorin $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ määritellään reaaliluvuksi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Esimerkiksi vektorien $\vec{a} = (3, 1)$ ja $\vec{b} = (5, -2)$ pistetulo on

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) = 15 - 2 = 13.$$

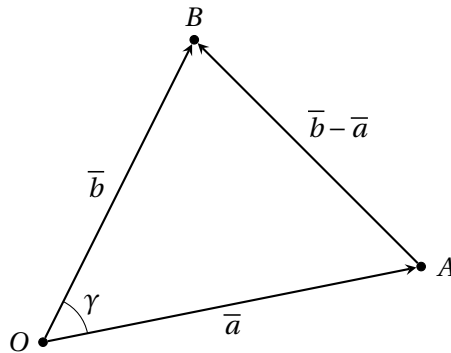
Tällä tavoin määritelty pistetulo antaa luontevan tavan määrittellä vektorien välisen kulman n ulottuvuudessa. Todetaan ensimmäiseksi, että vektorin pistetulo itsensä kanssa on sama kuin kyseisen vektorin pituuden neliö:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = |\vec{a}|^2.$$

Tarkastellaan nyt n -ulotteisessa avaruudessa (missä $n \geq 2$) sijaitsevaa kolmion OAB ja merkitään $\vec{OA} = \vec{a}$ sekä $\vec{OB} = \vec{b}$. Kolmion kolmas sivu on $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Avaruuden ulottuvuuksien määrästä riippumatta tämä kolmio on kuitenkin kaksiulotteinen, joten sen olisi syytä toteuttaa kosinilause

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

missä a , b ja c ovat kolmion sivut ja γ sivujen a ja b välinen kulma.



Tarkastellussa kolmiossa kosinilauseen yhtälö saa muodon

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma,$$

missä γ on vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma. Yhtälön oikeaa puolta voi sieventää mukavasti kirjoittamalla pituuden pistetulon avulla:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Kun tämä viimeinen lauseke sijoitetaan kosinilauseen yhtälön vasemmalle puolelle, saadaan

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma.$$

Tästä voidaan eliminoida termit $|\vec{a}|^2$ ja $|\vec{b}|^2$ sekä jakaa puolittain tekijällä -2 , jolloin saadaan pistetulolle kaava

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma.$$

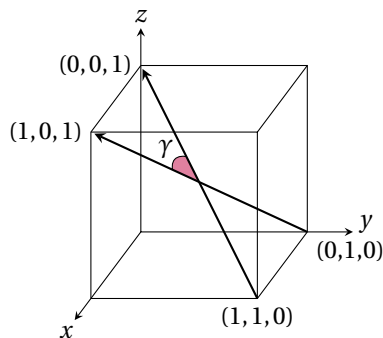
Tämä kaava on hyväksyttävä, jos haluamme tasogeometrian perusteista seuraavan kosinilauseen olevan voimassa myös n -ulotteiseen avaruuteen sijoitetuilla kolmioilla. Luonteva, klassisen geometrian kanssa yhteensopiva määritelmä vektorien väliselle kulmalle γ on siis

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad \text{eli} \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right).$$

Nyt meillä on kasassa tarvittavat määritelmät n -ulotteiselle avaruudelle: avaruus koostuu pisteistä, joiden koordinaatit ovat reaalilukuja, etäisyys määritellään n -ulotteisen Pythagoraan lauseen kaavalla ja kulmat pistetulon avulla kuten edellä on esitetty.

Esimerkki

Lasketaan kuution kahden avaruuslävistäjän välinen kulma vektorien avulla. Sijoitetaan kuution yksi kärki kolmiulotteisen koordinaatiston origoon ja tästä kärjestä lähtevät kolme särmää positiivisille koordinaattiakseleille. Koska kysytty kulma on mittakaavasta riippumaton, voidaan kuution särmän pituudeksi valita 1.



Olkoon pisteestä $(0, 1, 0)$ pisteeseen $(1, 0, 1)$ kulkeva avaruuslävistäjä $\vec{a}$ ja pisteestä $(1, 1, 0)$ pisteeseen $(0, 0, 1)$ kulkeva avaruuslävistäjä $\vec{b}$. Saadaan

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1) \quad \text{ja} \\ \vec{b} &= (0, 0, 1) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 1).\end{aligned}$$

Vektorien pistetulo on

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1$$

ja kummankin vektorin pituus on $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Kysytty kulma on vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma γ , jolle pätee

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \quad \text{eli} \quad \gamma = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) = 70,528 \dots^\circ \approx 70,5^\circ.$$

Näillä tekniikoilla vastaava lasku ei ole oleellisesti mutkikkaampi neljässäkään ulottuvuudessa (tehtävä 7).

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 6. Tarkastellaan neliulotteista hyperkuutiota, jonka 16 kärkeä sijaitsevat pisteissä (x, y, z, w) , missä kukin luvuista x, y, z ja w on joko 0 tai 1. Kahden kärkipisteen välinen jana on *hyperavaruuslävistäjä*, jos pisteillä ei ole yhtään samaa koordinaattia, kuten pisteillä $(0, 0, 0, 0)$ ja $(1, 1, 1, 1)$, tai pisteillä $(1, 1, 0, 0)$ ja $(0, 0, 1, 1)$. Kuinka monta hyperavaruuslävistäjää neliulotteisella hyperkuutiolla on?

Vihje s. 97 →

Toinen vihje s. 116 →

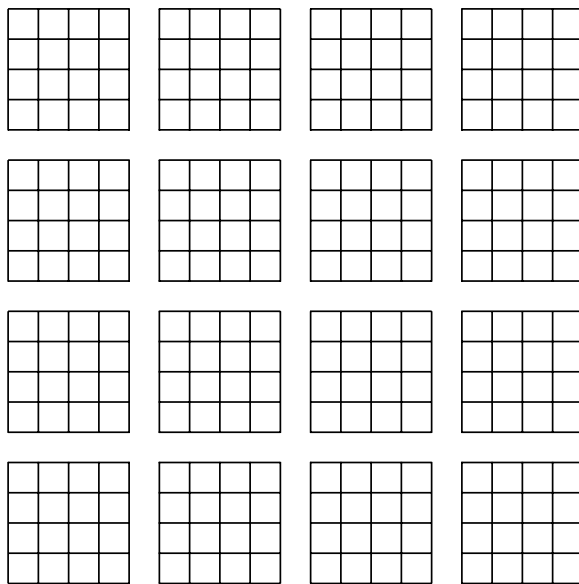
Tehtävä 7. Tutkitaan samaa hyperkuutiota kuin tehtävässä 6. Millaista muotoa ovat tämän hyperkuution hyperavaruuslävistäjiä kuvaavat vektorit? Kuinka suuressa kulmassa hyperavaruuslävistäjät leikkaavat?

Tähän tehtävään sisältyy pieni yllätys, josta enemmän toisessa vihjeessä.

Vihje s. 97 →

Toinen vihje s. 117 →

Tehtävä 8. Tehtävässä 5 esiteltiin neliulotteinen ristinolla. Kuinka monta eri voittoriviä siinä on olemassa?



Pelilaudan ruutuja voidaan merkitä koordinaatteina (x, y, z, w) , missä kukin koordinaateista on joko 1, 2, 3 tai 4. Yllä kuvatussa pelin visualisoinnissa vaikkapa x - ja y -koordinaatit kertovat sijainnin yksittäisessä ruudukossa ja z ja w puolestaan, mikä 4×4 -ruudukko on kyseessä.

Vihje s. 98 →

Toinen vihje s. 117 →

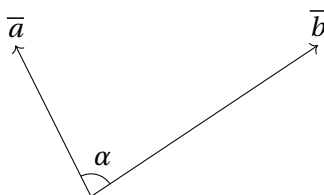
3 Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Tarkastelkaamme kahta tason vektoria $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2)$, missä siis $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Koska

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha,$$

missä α on vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma, ja koska $|\cos \alpha| \leq 1$, voimme todeta, että

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$



Toisaalta pistetulon voi kirjoittaa mukavasti koordinaattien avulla, joten tämän epäyhtälön voi myös kirjoittaa muodossa

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Osoittautuu, että tämä yleistyy useampiulotteisille vektoreille. Valitettavasti sama todistus ei sellaisenaan kelpaa ilman vektoreiden välisen kulman käsitettä korkeammissa ulottuvuuksissa sekä sen yhteyttä pistetuloon. Itse asiassa vektoreiden välinen kulma onkin helpompi määritellä todistamalla ensin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö, joka esitellään alla, minkä jälkeen nollavektorista poikkeavien vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma $\alpha \in [0, \pi]$ voidaan määritellä näppärästi vaatimuksella

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

kuten olemme jo luvussa 2 tehneetkin.

Joka tapauksessa, arvio $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, joka pätee n -ulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n , tunnetaan Cauchyn–Schwarzin epäyhtälönä. Cauchy todisti tuloksen ensimmäisenä euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille, kun n on positiivinen kokonaisluku, ja Schwarz

esitti tulokselle ensimmäisen todistuksen, joka yleistyy kaikille niin kutsutuille *sisätuloille*, joita esiintyy matematiikassa monenlaisia, vaikka emme näihin yleistyksiin nyt tässä syvennykään. Todistamme tässä epäyhtälön oleellisesti ottaen Schwarzin lähestymistavalla.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot*

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Tällöin

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|,$$

eli

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

Todistus. Ensinnäkin, jos $\bar{a} = \bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$, niin silloin todistettavan epäyhtälön kumpikin puoli häviää, eli on nolla, ja epäyhtälö pitää kuin pitääkin paikkansa. Siten voimme olettaa, että $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Olkoon x mielivaltainen reaaliluku, ja tarkastelkaamme lauseketta

$$p(x) = (\bar{a}x + \bar{b}) \cdot (\bar{a}x + \bar{b}).$$

Toisaalta tietenkin

$$p(x) = (\bar{a}x + \bar{b}) \cdot (\bar{a}x + \bar{b}) = |\bar{a}x + \bar{b}|^2 \geq 0.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} p(x) &= (\bar{a}x + \bar{b}) \cdot (\bar{a}x + \bar{b}) \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{a})x^2 + 2(\bar{a} \cdot \bar{b})x + \bar{b} \cdot \bar{b} \\ &= |\bar{a}|^2 x^2 + 2(\bar{a} \cdot \bar{b})x + |\bar{b}|^2, \end{aligned}$$

eli $p(x)$ on muuttujan x suhteen toisen asteen reaalikertoiminen polynomi! Koska $p(x)$ saa vain epänegatiivisia arvoja, on sen diskriminantin oltava enintään nolla, joten

$$(2(\bar{a} \cdot \bar{b}))^2 - 4|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \leq 0.$$

Uudelleenjärjestäen termejä hieman ja jakamalla puolittain neljällä saamme siis epäyhtälön

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}|^2 \leq (|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|)^2.$$

Tässä $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \geq 0$ ja $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \geq 0$, joten voimme ottaa puolittain neliöjuuret. Näin voimme päätellä, että

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|.$$

Yhtäsuuruus Cauchyn–Schwarzin epäyhtälössä

Kuten olemme jo Pitkän matematiikan lisäsivujen toisen osan [49] aritmeettis-geometrisen epäyhtälön tarkasteluissamme todenneet, epäyhtälölle on hyödyllistä tuntea, milloin siinä vallitsee yhtäsuuruus. Tällöin sillä nimittäin voi toisinaan ratkaista optimointiongelmia. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehdon muotoilua varten kertaamme pikaisesti vektoreiden yhdensuuntaisuuden ja samansuuntaisuuden käsitteet.

Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Ensinnäkin, jos $\bar{a} = \bar{0}$, niin silloin sovimme, että $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat sekä yhdensuuntaisia että samansuuntaisia, eli $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ja $\bar{a} \uparrow \bar{b}$.

Jos sen sijaan $\bar{a} \neq \bar{0}$, niin silloin $\bar{a} \parallel \bar{b}$ täsmälleen silloin, kun $\bar{b} = x\bar{a}$ jollakin reaaliluvulla x . Samassa hengessä $\bar{a} \uparrow \bar{b}$ täsmälleen silloin, kun $\bar{b} = x\bar{a}$ jollakin epänegatiivisella reaaliluvulla x .

Yhtäsuuruusehto Cauchyn–Schwarzin epäyhtälölle. Olkoon $n \in \mathbb{R}_+$, ja olkoot $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin epäyhtälössä

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \geq |\bar{a} \cdot \bar{b}|$$

vallitsee yhtäsuuruus täsmälleen silloin, kun $\bar{a} \parallel \bar{b}$, ja epäyhtälössä

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \geq \bar{a} \cdot \bar{b}$$

vallitsee yhtäsuuruus täsmälleen silloin, kun $\bar{a} \uparrow \bar{b}$.

Todistus. Jos $\bar{a} = \bar{0}$, niin silloin sekä $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 0 = |\bar{a} \cdot \bar{b}|$ että $\bar{a} \parallel \bar{b}$, joten oletta-
kaamme, että $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Yllä annetussa epäyhtälön $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \geq |\bar{a} \cdot \bar{b}|$ todistuksessa viimeisellä rivillä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos todistuksessa tarkasteltu diskriminantti häviää, eli jos ja vain jos $|\bar{a}x + \bar{b}|^2 = 0$ jollakin reaaliluvulla x . Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\bar{a}x = -\bar{b}$, jollakin reaaliluvulla x , mikä puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Näin on ensimmäinen yhtäsuuruusehto todistettu.

Toisen yhtäsuuruusehdon todistamista varten toteamme, että arvioissa

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \geq |\bar{a} \cdot \bar{b}| \geq \bar{a} \cdot \bar{b}$$

vallitsevat yhtäsuuruudet jos ja vain jos $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ja $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq 0$. Jos $\bar{a} = \bar{0}$, niin silloin yhtäsuuruudet vallitsevat ja $\bar{a} \uparrow \bar{b}$, joten oletta-
kaamme jälleen, että $\bar{a} \neq \bar{0}$. Tällöin $\bar{a} \parallel \bar{b}$ tarkoittaa sitä, että $\bar{b} = x\bar{a}$ jollakin reaaliluvulla x . Tällöin $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot x\bar{a} = x|\bar{a}|^2$, ja tämä viimeinen lauseke on epänegatiivinen jos ja vain jos x on epänegatiivinen. Siten ehdot $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ja $\bar{a} \cdot \bar{b} \geq 0$ ovat yhdessä yhtäpitäviä sen kanssa, että $\bar{a} \uparrow \bar{b}$, ja olemme valmiit.

Esimerkkejä

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä voi soveltaa esimerkiksi tällaisiin todistuksiin:

Lause. Kun a, b ja c ovat reaalilukuja, pätee

$$a + b + c \leq \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Todistus. Epäyhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa $1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c$, eli vektorien $\bar{u} = (1, 1, 1)$ ja $\bar{v} = (a, b, c)$ pistetulona. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan $|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}| |\bar{v}|$, joten saadaan

$$|a + b + c| \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Koska lisäksi itseisarvolle pätee $a + b + c \leq |a + b + c|$, alkuperäinen epäyhtälö on tosi.

Lause. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a + b + c + d)^2 \leq (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

Todistus. Käytetään Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön neliöön korotettua versiota $(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \leq |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2$ vektoreille $\bar{u} = (a\sqrt{a}, b\sqrt{b}, c\sqrt{c}, d\sqrt{d})$ ja $\bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{d}} \right)$.

Nyt nimittäin

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} &= a\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + b\sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + c\sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + d\sqrt{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{d}} = a + b + c + d, \\ |\bar{u}|^2 &= (a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2 + (c\sqrt{c})^2 + (d\sqrt{d})^2 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \quad \text{ja} \\ |\bar{v}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \right)^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

Epäyhtälön $(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \leq |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2$ nojalla pätee siis

$$(a + b + c + d)^2 \leq (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 9. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Vihje s. 98 →

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävä 10. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että

$$(a^3 + b^3 + c^3)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4).$$

Vihje s. 99 →

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävä 11. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Vihje s. 99 →

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävä 12. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Vihje s. 99 →

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävä 13. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b+c)^2 \leq (a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Vihje s. 99 →

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävä 14. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Vihje s. 99 →

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävä 15. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ reaalilukuja, ja olkoot $b_1, b_2, \dots, b_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Vihje s. 99 →

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävä 16. Olkoot x, y ja z epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$xyz(x + y + z) \leq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2.$$

Vihje s. 100 →

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävä 17. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $x^4 + y^4 + z^4 = 27$. Osoita, että

$$x + y + z \leq 3\sqrt{3}.$$

Vihje s. 100 →

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävä 18. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

Vihje s. 100 →

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävä 19. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.$$

Vihje s. 100 →

Toinen vihje s. 120 →

Tehtävä 20. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Vihje s. 100 →

Toinen vihje s. 120 →

Tehtävä 21. Olkoon $P(x)$ polynomi, jonka kertoimet ovat epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että kaikille positiivisille reaaliluvuille x pätee

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2.$$

Vihje s. 100 →

Toinen vihje s. 120 →

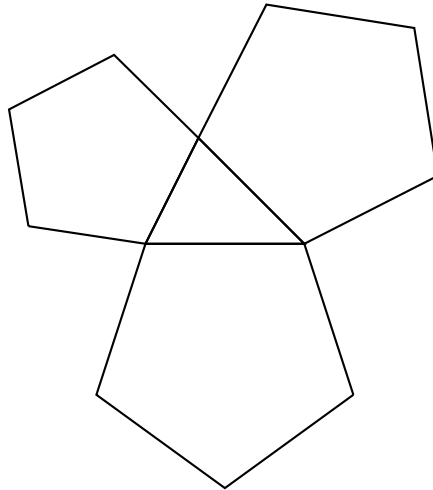
Tehtävä 22. Olkoot a, b, x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}.$$

Vihje s. 101 →

Toinen vihje s. 120 →

Tehtävä 23. Teräväkulmaisen kolmion piiri on 1, ja sen jokaiselle sivulle piirretään säännöllinen viisikulmio oheisen kuvan mukaisesti. Millaiselle kolmiolle näiden viisikulmioiden alojen summa on mahdollisimman pieni?

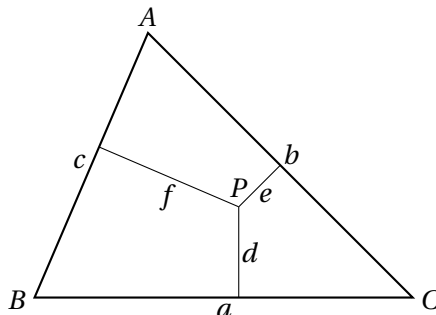


Vihje s. 101 →

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävä 24. Tarkastelemme kolmiota $\triangle ABC$. Olkoon P jokin piste sen sisällä, ja olkoon sen sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I . Merkitsemme kolmion sivujen pituuksia tavalliseen tapaan $a = BC$, $b = CA$ ja $c = AB$. Pisteen P etäisyydet sivuista BC , CA ja AB olkoot samassa järjestyksessä d , e ja f . Osoita, että lauseke

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f}$$



on pienimmillään täsmälleen silloin, kun $P = I$, eli kun $d = e = f$.

Vihje s. 101 →

Toinen vihje s. 121 →

Aritmeettis-kvadraattinen epäyhtälö

Olemme aiemmin tämän teossarjan toisessa osassa [49] tavanneet kahden muuttujan aritmeettis-kvadraattisen epäyhtälön, joka sanoo, että reaaliluvuille a ja b pätee

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}.$$

Tämä yleistyy mukavasti useammalle muuttujalle.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 25. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ reaalilukuja. Todista *aritmeettis-kvadraattinen epäyhtälö*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön avulla.

Vihje s. 101 →

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävä 26. Milloin tehtävän 25 aritmeettis-kvadraattisessa epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

Vihje s. 101 →

Toinen vihje s. 121 →

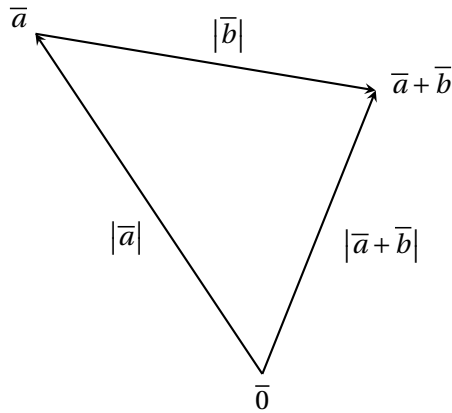
Kolmioepäyhtälö vektoreille

Tunnetusti kahdelle reaaliluvulle a ja b pätee kolmioepäyhtälö

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Seuraava tehtävä yleistää tämän reaalisille vektoreille $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n .

Kolmioepäyhtälön nimen taustalla on saman niminen geometrian tulos: kolmiossa jokainen sivu on lyhyempi kuin kahden muun summa. Selitys tälle on se, että jos $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ eivät ole kumpikaan yhtä suuria kuin samanulotteinen nollavektori $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$, eivätkä osoita samaan suuntaan eivätkä vastakkaisiin suuntiin, niin silloin vektoreiden $\vec{0}$, $\vec{a}$ ja $\vec{a} + \vec{b}$ kärjet ovat erään kolmion kärjet, jonka sivujen pituudet ovat juurikin $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ ja $|\vec{a} + \vec{b}|$:



Harjoitustehtäviä kolmioepäyhtälöstä

Tehtävä 27. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Osoita kolmioepäyhtälö vektoreille:

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|,$$

eli

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävä 28. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että kolmioepäyhtälössä $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$ vallitsee yhtäsuuruus täsmälleen silloin, kun $\bar{a} \uparrow \bar{b}$.

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävä 29. Olkoot x, y ja z epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(x + y + z)\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2}.$$

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävä 30. Olkoot x, y ja z reaalilukuja. Osoita, että jos $x \geq 0$, niin

$$\sqrt{y^2 + z^2} \leq x\sqrt{2} + \sqrt{(y - x)^2 + (z - x)^2}.$$

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävä 31. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$2\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}.$$

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 122 →

Nesbittin epäyhtälö ja Shapiron ongelma

Seuraava kaunis pieni epäyhtälö on todellinen klassikko.

Nesbittin epäyhtälö. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Todistus. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön ja tehtävän 9 tuloksen nojalla

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) (a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)) \\ & \geq \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} \cdot \sqrt{a(b+c)} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \cdot \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \cdot \sqrt{c(a+b)} \right)^2 \\ & = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab+bc+ca),$$

joten

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Tämä yleistyy varsin mukavasti joihinkin useamman muuttujan tapauksiin. Seuraavissa kolmessa lauseessa esitetään luonteavat neljän, viiden ja kuuden muuttujan versiot tuloksesta:

Lause. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Lause. Olkoot a, b, c, d ja e positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Lause. Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Liitteessä A sivulla 93 on esitetty Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöön perustuvat todistukset näille.

Vuonna 1954 Shapiro esitti varsin luonnollisen kysymyksen: Päteekö kaikille kokonaisluvuille $n \geq 3$, ja positiivisille reaalityluvuille $a_1, a_2, \dots, a_n$, epäyhtälö

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}?$$

Lighthill osoitti, että epäyhtälö ei päde 20 muuttujan tapauksessa, mikä avasi uuden kysymyksen siitä, mille kaikille muuttujien lukumäärille n epäyhtälö pätee. Useiden matemaatikoiden ahkeroinnin jälkeen osoittautui, että lopullinen vastaus on tällainen: Shapiron epäyhtälö pätee parillisille muuttujien lukumäärille n , joille $4 \leq n \leq 12$, ja parittomille muuttujien lukumäärille n , joille $3 \leq n \leq 23$. Muita kokonaislukuja $n \geq 3$, joille epäyhtälö pätee, ei ole.

Toisaalta, on varsin kiintoisaa, että Shapiron ongelman kaltainen ilmiö kuitenkin toteutuu kaikilla n . Rankin nimittäin sai todistettua, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 3$ löytyy vakio γ_n siten, että kaikille positiivisille reaalityluvuille $a_1, a_2, \dots, a_n$ pätee

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \gamma_n \cdot \frac{n}{2},$$

ja lisäksi, että peräti $\gamma_n \geq \gamma$, missä $\gamma \approx 0,6094\dots$ On luonnollista kysyä, mikä olisi paras mahdollinen arvo luvulle γ . Seuraava tulos kertoo vastauksen:

Drinfeldin lause. *Kaikille kokonaisluvuille $n \geq 3$ ja positiivisille reaalityluvuille $a_1, a_2, \dots, a_n$ pätee*

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \gamma \cdot \frac{n}{2},$$

missä γ on eräs tietty positiivinen reaalityvakio, jolle $\gamma \approx 0,98913\dots$ Lisäksi tässä lukua γ ei voi korvata millään isommalla reaalityluvulla.

Epäyhtälön oikea puoli on siis vain reilun prosentin pienempi kuin Shapiron ehdottama!

Aczélin käänteinen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Einsteinin suppeassa suhteellisuusteoriassa hyvin keskeistä on seuraava seikka: Jos havaitsijat A ja B kulkevat kumpikin suoraan eteenpäin vakionopeudella, ja mittaavat kukin omasta näkökulmastaan kahden eri tapahtuman, sanokaamme esimerkin vuoksi kahden lyhyen valonvälähdyksen, ajallisen etäisyyden sekä avaruudellisen etäisyyden, A saaden mittaustulokset Δt ja Δx , ja B saaden samaten mittaustulokset $\Delta t'$ ja $\Delta x'$, niin ei suinkaan välttämättä ole niin, että $\Delta t = \Delta t'$ ja $\Delta x = \Delta x'$. Mielenkiintoista kyllä näille mittauksille kuitenkin aina pätee

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2.$$

Tämän asiaintilan matemaattinen mallintaminen johtaa niin sanottuun Minkowskin aika-avaruuteen.

Kätevä malli Minkowskin aika-avaruudelle saadaan ottamalla sen pisteiksi neliuotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ pisteet. Tulkitsemme ensimmäisen koordinaatin aikakoordinaatin ja valonnopeuden tuloksi, ja loput kolme koordinaattia tavallisiksi avaruuskoordinaateiksi. Jos valitsemme mittayksiköt niin, että valonnopeudelle c pätee $c = 1$, niin voimme suoraan valita ensimmäiseksi koordinaatiksi aikakoordinaatin. On hyvin tavallista valita koordinaattien numerointi niin, että pisteiden komponentit nimetään tähän tapaan: (x_0, x_1, x_2, x_3) . Jos $(x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$, niin voimme määritellä näille kahdelle vektorille *Lorentzin sisätulon*

$$x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Luonnollisesti voisimme erottaa vektorista (x_0, x_1, x_2, x_3) aikakoordinaatin x_0 omaksi luvukseksi t ja avaruuskoordinaatit x_1, x_2 ja x_3 omaksi vektorikseen

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Näin syntyy uusi vektori $(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Kahdelle tällaiselle vektorille $(t, \bar{x})$ ja $(t', \bar{x}')$, jotka kuuluvat joukkoon $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on luonnollista määritellä Lorentzin sisätulo

$$t t' - \bar{x} \cdot \bar{x}',$$

missä $\cdot$ merkitsee tavallista euklidista pistetuloa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tietenkin vektorin $(t, \bar{x})$ Lorentzin sisätulo itsensä kanssa on $t^2 - |\bar{x}|^2$.

Tietysti voisimme korvata tässä avaruuden $\mathbb{R}^3$ millä tahansa euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^n$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Näin syntyville eriluotteisten Minkowskin avaruuksien vektoreille pätee seuraava mielenkiintoinen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön käänteinen versio, joka kutsutaan myös Aczélin epäyhtälöksi.

Käänteinen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, olkoot t ja u reaalilukuja, olkoot $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, ja olettaamme, että $t^2 > |\bar{x}|^2$. Tällöin

$$(tu - \bar{x} \cdot \bar{y})^2 \geq (t^2 - |\bar{x}|^2)(u^2 - |\bar{y}|^2).$$

Todistus. Määritellään apufunktio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$p(\heartsuit) = (t\heartsuit + u)^2 - |\bar{x}\heartsuit + \bar{y}|^2$$

kaikille reaaliluvuille $\heartsuit$. Kertomalla vektorien pituuden sisältävä termi pistetulon avulla auki saadaan

$$\begin{aligned} p(\heartsuit) &= (t\heartsuit + u)^2 - |\bar{x}\heartsuit + \bar{y}|^2 = (t\heartsuit + u)^2 - (\bar{x}\heartsuit + \bar{y}) \cdot (\bar{x}\heartsuit + \bar{y}) \\ &= t^2\heartsuit^2 + 2tu\heartsuit + u^2 - |\bar{x}|^2\heartsuit^2 - 2(\bar{x} \cdot \bar{y})\heartsuit - |\bar{y}|^2 \\ &= (t^2 - |\bar{x}|^2)\heartsuit^2 + 2(tu - \bar{x} \cdot \bar{y})\heartsuit + u^2 - |\bar{y}|^2, \end{aligned}$$

eli $p(\heartsuit)$ on itse asiassa muuttujan $\heartsuit$ reaalikertoimen toisen asteen polynomi, jonka toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Funktio p saa siis varmasti positiivisia arvoja.

Toisaalta, koska $|t| > |\bar{x}| \geq 0$, on $t \neq 0$, eli voimme tarkastella arvoa $p(-u/t)$, jolle pätee

$$p\left(-\frac{u}{t}\right) = \left(t \cdot \left(-\frac{u}{t}\right) + u\right)^2 - \left|\bar{x} \cdot \left(-\frac{u}{t}\right) + \bar{y}\right|^2 = -\left|\bar{x} \cdot \left(-\frac{u}{t}\right) + \bar{y}\right|^2 \leq 0.$$

Koska p saa sekä positiivisia että epäpositiivisia arvoja, on sen diskriminantin oltava epänegatiivinen, eli

$$4(tu - \bar{x} \cdot \bar{y})^2 - 4(t^2 - |\bar{x}|^2)(u^2 - |\bar{y}|^2) \geq 0.$$

Väitetty epäyhtälö seuraakin tästä pienellä sievennyksellä.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 32. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille $a^4 > b^4 + c^4$. Osoita, että

$$(a^3 - b^3 - c^3)^2 \geq (a^4 - b^4 - c^4)(a^2 - b^2 - c^2).$$

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävä 33. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $a > b + c$. Osoita, että

$$(a^2 - b^2 - c^2)(a^5 - b^5 - c^5) \leq (a^3 - b^3 - c^3)(a^4 - b^4 - c^4).$$

Vihje s. 102 →

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävä 34. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, olkoot t ja u reaalilukuja, ja olkoot $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ sellaisia, että

$$t^2 > |\bar{x}|^2, \quad u^2 > |\bar{y}|^2, \quad \text{ja} \quad tu > \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Osoita, että $(t + u)^2 > |\bar{x} + \bar{y}|^2$, ja todista Minkowskin avaruuksien käänteinen kolmioepäyhtälö

$$\sqrt{(t + u)^2 - |\bar{x} + \bar{y}|^2} \geq \sqrt{t^2 - |\bar{x}|^2} + \sqrt{u^2 - |\bar{y}|^2}.$$

Vihje s. 103 →

Toinen vihje s. 122 →

4 Summausmerkintä Σ

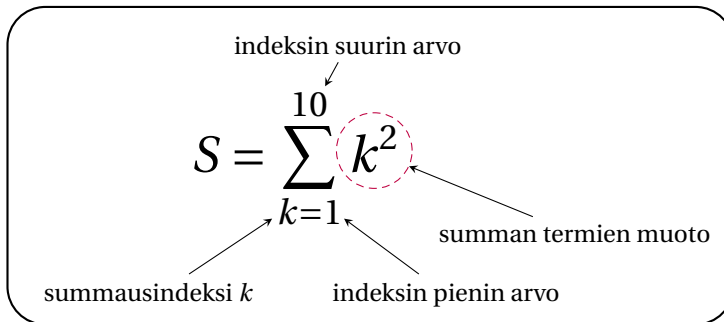
Kun summassa on monta termiä, olisi epäkäytännöllistä kirjoittaa ne kaikki näkyviin. Tyypillinen lyhennysmerkintä on käyttää kolmea pistettä, kuten seuraavassa summassa:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2.$$

Tässä lukija luonnollisesti arvaa oikein, mitä puuttuvia lukuja kolmella pisteellä tarkoitetaan, mutta toisinaan on eduksi käyttää lyhyempää ja täsmällisempää merkintää. Saman summan voisi esittää muodossa

$$S = \sum_{k=1}^{10} k^2,$$

missä osien merkitys on seuraava:



Vastaavasti summassa $\sum_{i=3}^6 (2i+1)$ indeksimuuttuja i saa arvot 3, 4, 5 ja 6, jolloin summaksi saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^6 (2i+1) &= (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot 5 + 1) + (2 \cdot 6 + 1) \\ &= 7 + 9 + 11 + 13 = 40. \end{aligned}$$

Summauksen ala- tai ylärajana voi luonnollisesti olla muuttuja tietyn luvun sijasta. Esimerkiksi n ensimmäisen positiivisen parillisen luvun summan voisi merkitä

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k.$$

Tässä indeksimuuttuja k saa arvot $1, 2, 3, \dots, n$, jolloin lauseke $2k$ käy läpi arvot $2, 4, 6, \dots, 2n$, jotka sitten lasketaan yhteen.

Indeksoinnin muutos

Saman summan voi esittää monella eri tavalla. Esimerkiksi summan

$$12 + 14 + 16 + 18$$

voisi hahmottaa koostuvan luvuista $10 + 2k$, missä k saa arvot $1, 2, 3$ ja 4 , tai luvuista $2n$, missä n saa arvot $6, 7, 8$ ja 9 . Päteee siis

$$\sum_{k=1}^4 (10 + 2k) = 12 + 14 + 16 + 18 = \sum_{n=6}^9 2n.$$

Näiden kahden esitystavan välillä voi vaihtaa muuttamalla indeksointimuuttujaa. Jos summaan $\sum_{n=6}^9 2n$ sijoitetaan $k = n - 5$, saadaan $n = k + 5$ ja lopulta $2n = 2k + 10$. Kun $n = 6$, on $k = 6 - 5 = 1$ ja kun $n = 9$, on $k = 9 - 5 = 4$. Saadaan siis

$$\sum_{n=6}^9 2n = \sum_{k=1}^4 (10 + 2k).$$

Aritmeettinen summa

Summaa sanotaan aritmeettiseksi, mikäli peräkkäisten yhteenlaskettavien erotus on vakio. Esimerkiksi summa $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25$ on aritmeettinen, sillä peräkkäisten yhteenlaskettavien erotus on aina kolme.

Myös positiivisten kokonaislukujen summa luvusta yksi lukuun n on aritmeettinen (peräkkäisten termien erotus on 1), ja sille pätee mukava kaava

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esimerkiksi

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5050.$$

Kaava perustellaan kahdella eri tavalla harjoitustehtävissä 38 ja 44.

Edellinen summakaava yleistyy: aritmeettisen summan arvo on aina termien lukumäärä kerrottuna ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvolla. Esimerkiksi

$$10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \cdot \frac{10 + 25}{2} = 105.$$

Summaus kahden indeksin yli

Toisinaan on tarpeen summata kahden eri indeksin yli. Lasketaan esimerkiksi kaikkien lukujen 1–10 kertotaulussa esiintyvien tulojen summa.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Kertotaulun rivillä i on sarakkeen j kohdalla luku $i \cdot j$. Niinpä esimerkiksi 4. rivillä olevien lukujen summaa voitaisiin merkitä

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 10 = \sum_{j=1}^{10} 4j.$$

Yllä oleva summa laskettiin riviltä $i = 4$. Jos halutaan laskea kaikkien kertotaulun tulojen summa S , voidaan laskea yksittäisten rivien summat yhteen:

$$S = \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^{10} (i \cdot j) \right).$$

Summan laskemiseksi voidaan ensin ottaa sisemmästä summasta i yhteiseksi tekijäksi ja laskea jäljelle jäänyt aritmeettinen summa. Saadaan

$$S = \sum_{i=1}^{10} \left(i \sum_{j=1}^{10} j \right) = \sum_{i=1}^{10} \left(i \cdot \frac{10(10+1)}{2} \right) = \sum_{i=1}^{10} 55i.$$

Jäljelle jääneestä summasta voidaan ottaa 55 yhteiseksi tekijäksi ja laskea taas aritmeettisen summan kaavalla

$$S = 55 \sum_{i=1}^{10} i = 55 \cdot \frac{10(10+1)}{2} = 55 \cdot 55 = 3025.$$

Lasketaan vertailun vuoksi sama summa ilman summamerkintää. Koska yhteenlaskettavia on vain sata, tämä vielä jotenkin onnistuu. Summaksi saadaan riveittäin laskemalla

$$\begin{aligned} S = & 1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 7 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 9 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ & + 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10). \end{aligned}$$

Suluissa oleviksi summiksi saadaan

$$1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10(10 + 1)}{2} = 55,$$

joten summa on lopulta

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 55 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + 4 \cdot 55 + 5 \cdot 55 + 6 \cdot 55 + 7 \cdot 55 + 8 \cdot 55 + 9 \cdot 55 + 10 \cdot 55 \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \cdot 55 = 55 \cdot 55 = 3025. \end{aligned}$$

Koska yhteenlaskettavia oli näin vähän, ilman summamerkintääkin pärjättiin.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 35. Laske summa

$$\sum_{k=1}^5 k^2.$$

Vihje s. 103 →

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävä 36. Merkitse summat

$$15 + 20 + 25 + \dots + 100 \quad \text{ja} \quad 3 + 5 + 7 + \dots + 101$$

summamerkinnän avulla. Summien arvoja ei tarvitse laskea.

Vihje s. 103 →

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävä 37.

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Esitä reaalilukujen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ keskiarvo summamerkinnän avulla.

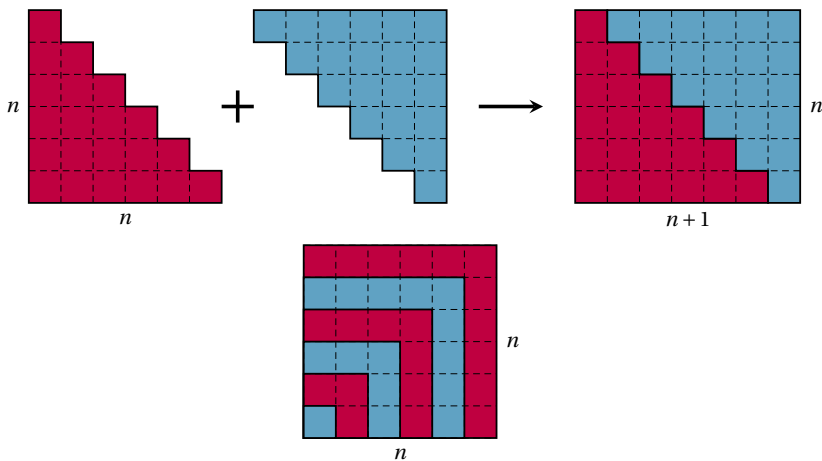
Vihje s. 103 →

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävä 38. Hyödylliset kaavat

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ja} \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

missä n on positiivinen kokonaisluku, voidaan perustella seuraavien kuvioiden avulla. Miten?



Vihje s. 104 →

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävä 39. Kolme näistä kaavoista on oikein ja yksi väärin. Tässä n on positiivinen kokonaisluku ja luvut a_k ja b_k reaalityyppisiä. Tunista väärä kaava. Mitkä laskulait ovat kolmen oikean kaavan perusteena?

$$\sum_{k=1}^n 5a_k = 5 \sum_{k=1}^n a_k \qquad \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

Vihje s. 104 →

Toinen vihje s. 124 →

Tehtävä 40. Tutkitaan summaa $\sum_{k=1}^{1000} k^2 - \sum_{m=0}^{999} (m^2 + m)$.

Vaihda muuttujanvaihdolla summien indeksointi samaksi ja laske lopputulos.

Vihje s. 104 →

Toinen vihje s. 124 →

Tehtävä 41. Taikaneliö on ruudukko, jonka ruutuihin sijoitettujen lukujen summa on sama joka rivillä, joka sarakkeessa ja molemmilla diagonaaleilla. Vanhimmat maininnat taikaneliöistä ovat Kiinasta yli kahden tuhannen vuoden takaa. Seuraava taikaneliö esiintyy yksityiskohtana Albrecht Dürerin vuonna 1514 tekemässä kuparikaiverruksessa Melankolia I [58].



Vasemmanpuoleisen reunan keskimmäiset, hieman epäselvät luvut ovat 5 ja 9. Merkitään tämän taikaneliön rivillä i ja sarakkeessa j olevaa lukua a_{ij} , eli esimerkiksi $a_{42} = 15$. Taikaneliön toisen vaakarivin lukujen summan voisi merkitä

$$5 + 10 + 11 + 8 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = \sum_{j=1}^4 a_{2j}.$$

Merkitse vastaavalla tavalla

- neljännen sarakkeen lukujen summa,
- vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan kulkevan diagonaalin lukujen summa.

Vihje s. 104 →

Toinen vihje s. 124 →

Tehtävä 42. Laske summa

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right).$$

Vihje s. 105 →

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävä 43. Tuloa voidaan merkitä lyhennysmerkinnällä Π (keikkalainen iso π). Laske tulo

$$\prod_{k=1}^{1000} \frac{k}{k+1}.$$

Vihje s. 105 →

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävä 44. Todista induktiotodistuksella summakaava

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{kun } n \text{ on positiivinen kokonaisluku.}$$

Vihje s. 105 →

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävä 45. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista identiteetti

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

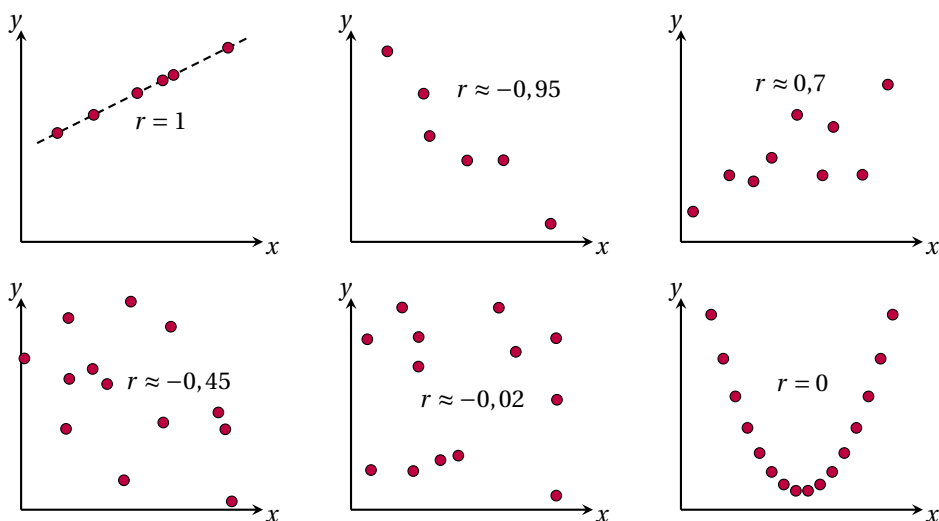
Vihje s. 105 →

5 Korrelaatiokerroin

Korrelaatio kuvaa kahden tilastollisen muuttujan yhteyttä. Esimerkiksi Suomen väestön pituudet ja painot korreloivat: pitkät ihmiset ovat keskimäärin lyhyitä painavampia, vaikka tähän säännönmukaisuuteen onkin runsaasti poikkeuksia. Erilaisiin aineistoihin sopivia tapoja mitata korrelaatiota on useita, ja tässä käsitellään niistä tyypillisin, *Pearsonin korrelaatiokerroin*.

Pearsonin korrelaatiokerroin r mittaa sitä, kuinka hyvin kahden reaalitylukumuuttujan x ja y välistä yhteyttä voidaan kuvata lineaarisella mallilla, eli kuinka hyvin mittaussparit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ istuvat suoralla (x, y) -koordinaatistossa.

Pearsonin korrelaatiokerroin r saa arvoja väliltä $[-1, 1]$. Kun datapisteet sijaitsevat täsmälleen jollakin nousevalla suoralla, on $r = 1$, ja laskevan suoran tapauksessa pätee $r = -1$. Mitä lähempänä korrelaatiokerroin on nollaa, sitä heikompi muuttujien välinen lineaarinen yhteys on.

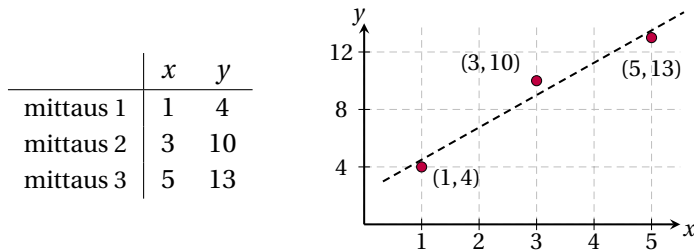


Esimerkkejä korrelaatiokertoimen arvoista

Pearsonin korrelaatiokerroin on saanut nimensä matemaatikko Karl Pearsonin (1857–1936) mukaan. Jatkossa puhumme yksinkertaisuuden vuoksi vain ”korrelaatiokertoimesta”. Käsittelemme korrelaatiokertoiminta tässä yhteydessä, koska sen laskukaavan voi havainnollistaa miellyttävästi n -ulotteisen avaruuden avulla.

Korrelaatiokertoimen laskeminen

Tarkastellaan korrelaatiokertoimen laskemista seuraavalla esimerkkiaineistolla.



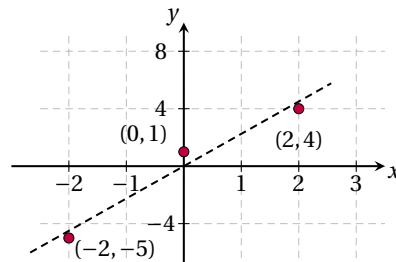
Korrelaatiokertoimen on tarkoitus riippua vain pistejoukon muodosta, ei täsmällisestä paikasta koordinaatistossa. Paikan merkitys voidaan eliminoida vähentämällä x - ja y -koordinaateista niiden keskiarvot. Lasketaan siis keskiarvot

$$\hat{x} = \frac{1+3+5}{3} = 3 \quad \text{ja} \quad \hat{y} = \frac{4+10+13}{3} = 9.$$

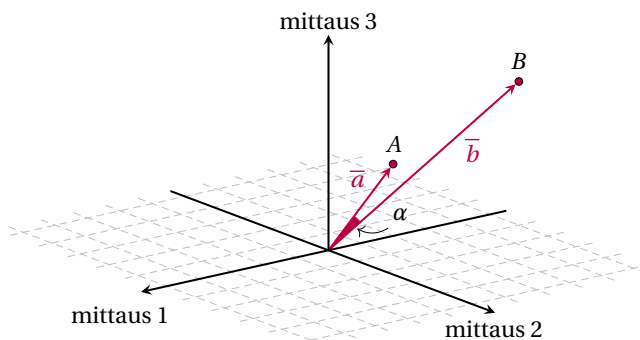
Keskiarvoa merkitään usein $\bar{x}$, mutta tässä käytämme merkintää $\hat{x}$, jottei tapahtuisi sekaannusta vektoreiden kanssa.

Kun keskiarvot vähennetään x - ja y -koordinaateista, saadaan uudet koordinaatit

$$\begin{aligned} (1-3, 4-9) &= (-2, -5), \\ (3-3, 10-9) &= (0, 1), \quad \text{ja} \\ (5-3, 13-9) &= (2, 4). \end{aligned}$$



Tulkitaan nyt uudet x -koordinaatit $-2, 0$ ja 2 kolmiulotteisen avaruuden vektoriksi $\vec{a} = (-2, 0, 2)$ ja vastaavasti uudet y -koordinaatit vektoriksi $\vec{b} = (-5, 1, 4)$. Tässä kolmiulotteisessa koordinaatistossa akselit vastaavat siis alkuperäisiä mittauksia.



Koska alkuperäiset mittauspisteet olivat likimain suoralla, uudet vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat likimain yhdensuuntaisia. Poikkeamaa yhdensuuntaisuudesta on luontevaa mitata vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välisellä kulmalla. Tarkemmin sanottuna Pearsonin korrelaatiokerroin määritellään vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välisen kulman α kosiniksi:

$$r = \cos \alpha.$$

Mikäli ainakin toinen vektoreista $\vec{a}$ tai $\vec{b}$ on nollavektori, kulma α ei ole hyvin määritetty, ja korrelaatiokerrointakaan ei tällöin ole määritetty. Tämä rajoitus ei kuitenkaan ole kovin vakava, sillä esimerkiksi vektori $\vec{a}$ on nollavektori vain silloin, kun kaikki mitatut x -koordinaatit ovat keskenään samoja.

Kulman kosinin arvo on helppo laskea pistetulon avulla. Kun esimerkkinä tapauksessa $\vec{a} = (-2, 0, 2)$ ja $\vec{b} = (-5, 1, 4)$, saadaan korrelaatiokertoimeksi

$$r = \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot (-5) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{8} \sqrt{42}} = 0,9819805...$$

Esimerkkinä mittauksen x - ja y -koordinaattien välinen korrelaatiokerroin on siis likimain 0,98. Geometrisesti tulos on luonteva: koska vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma on lähellä nollaa, kulman kosini on lähellä yhtä, eli korrelaatio on suuri.

Miksi tällainen määritelmä?

Miksi edellä esitetty laskutapa on sopiva määritelmä korrelaatiolle? Sillä on ainakin nämä mukavat ominaisuudet:

Riippumattomuus sijainnista: Keskiarvojen vähentäminen takaa sen, että korrelaatio ei muutu, vaikka x - tai y -koordinaatteihin lisättäisiin vakio.

Riippumattomuus skaalauksesta ja yksiköistä: Jos kaikki x - tai y -koordinaatit kerrotaan nollasta poikkeavalla vakiolla, tämä vaikuttaa ainoastaan vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pituuteen, jolloin kulma α ei muutu, ja korrelaatio pysyy siis muuttumattomana. Tämä pätee myös yksikön valintaan: jos x -koordinaatit kuvaavat esimerkiksi massaa, vaihto kilogrammoista grammoihin kasvattaa kyllä lukuarvoja tuhannella, mutta vektorin $\vec{a}$ suunta ei muutu.

Symmetrisyys: Koska lauseke $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ on symmetrinen x - ja y -koordinaattien suhteen, niiden vaihtaminen päittäin ei vaikuta korrelaatiokertoimen arvoon.

Yhteys lineaarisuuteen: Korrelaatiokerroin r on 1 täsmälleen silloin, kun datapisteet ovat nousevalla suoralla ja vastaavasti $r = -1$ täsmälleen silloin, kun datapisteet ovat laskevalla suoralla. Tämä todistetaan harjoitustehtävissä 48 ja 49.

Arvojoukko $[-1, 1]$: Korrelaatiokertoimelle pätee $-1 \leq r \leq 1$. Tämä perustellaan tehtävässä 50.

Pearsonin korrelaatiokertoimen yleinen kaava n lukuparille

Kun tarkasteltavia lukupareja (x, y) on n kappaletta, missä $n \geq 2$, korrelaatio voidaan laskea täsmälleen samalla periaatteella kuin edellisessä esimerkissä, nyt vain vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sijaitsevat n -ulotteisessa avaruudessa.

Lukujen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ja $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ välinen korrelaatio selvitetään siis laskemalla keskiarvot $\hat{x}$ ja $\hat{y}$ ja muodostamalla n -ulotteisen avaruuden vektorit

$$\bar{a} = (x_1 - \hat{x}, x_2 - \hat{x}, \dots, x_n - \hat{x}) \text{ ja } \bar{b} = (y_1 - \hat{y}, y_2 - \hat{y}, \dots, y_n - \hat{y}).$$

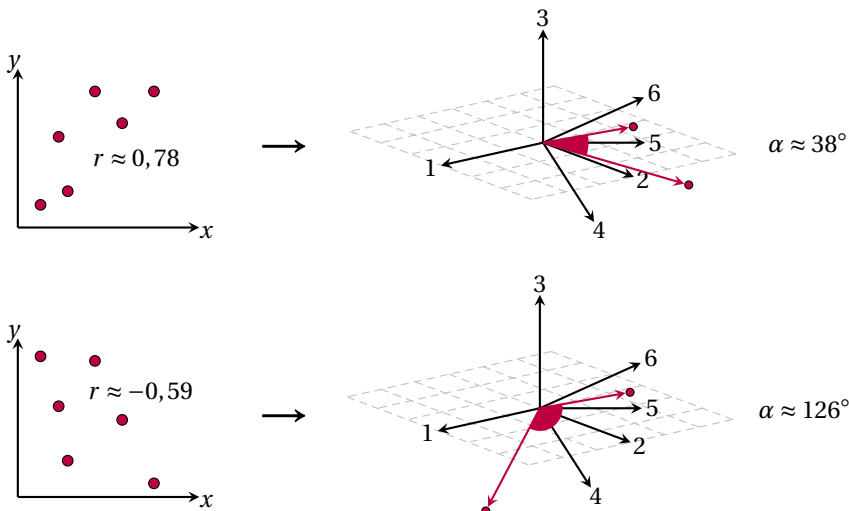
Korrelaatio on vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välisen kulman kosini, eli taas

$$r = \cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|}.$$

Summamerkintää käyttäen lopputulos voidaan kirjoittaa alkuperäisten datapisteiden avulla:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}}.$$

Kun mittauspareja on yli kolme, vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ havainnollistaminen käy vaikeaksi. Avaruuden dimensiosta huolimatta nämä kaksi vektoria määräävät kuitenkin tason, ja vektorien välinen kulma α majailee tässä tasossa. Seuraavassa kuvassa on kaksi esimerkkiä tapauksessa $n = 6$.



Harjoitustehtäviä

Tehtävä 46. Laske käsin korrelaatio seuraavalle aineistolle: $\frac{x}{y} \mid \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{array}$.

Vihje s. 105 →

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävä 47. Tutkitaan korrelaation avulla, mikä on valtiotasolla yhteys kokonaistuotannon arvon ja vuotuisten työtuntien välillä. Oheiseen taulukkoon on koottu eri valtioiden bruttokansantuotteita (ostovoimakorjattuina vuoden 2011 kansainvälisinä dollareina) sekä työntekijöiden keskimääräisiä vuotuisia työtunteja. Mukana ovat kaikki valtiot, joiden tiedot vuodelta 2017 löytyvät sivustolta [16].

Maa	BKT/hlö (\$)	Työaika (h)	Maa	BKT/hlö (\$)	Työaika (h)
Alankomaat	46602	1430	Malta	30831	2040
Argentina	16467	1692	Meksiko	17383	2255
Australia	47393	1731	Myanmar	5730	2438
Bangladesh	3436	2232	Nigeria	4285	1827
Belgia	38341	1544	Norja	60590	1417
Brasilia	13813	1709	Pakistan	5303	2096
Bulgaria	18640	1644	Peru	11370	1932
Chile	22729	1974	Portugali	24310	1863
Costa Rica	15044	2212	Puola	26637	2028
Ecuador	9880	1701	Ranska	39461	1514
Espanja	35696	1686	Romania	24349	1806
Etelä-Afrikka	11741	2209	Ruotsi	43376	1609
Etelä-Korea	36265	2063	Saksa	47556	1354
Filippiinit	7679	2149	Singapore	67138	2238
India	6422	2117	Slovakia	24924	1745
Indonesia	10594	2024	Slovenia	28235	1655
Irlanti	75916	1746	Sri Lanka	12697	1924
Islanti	41306	1493	Suomi	39893	1659
Israel	36186	1921	Sveitsi	64219	1590
Italia	38000	1723	Taiwan	43211	1990
Itävalta	46103	1613	Tanska	45875	1400
Japani	40374	1738	Thaimaa	15740	2185
Kambodža	3161	2456	Tšekki	31141	1776
Kanada	42907	1696	Turkki	27263	1832
Kiina	13043	2174	Unkari	22572	1937
Kolumbia	12797	1998	Uruguay	19723	1552
Kreikka	23765	2017	Uusi Seelanti	36538	1752
Kroatia	22996	1835	Venäjä	22581	1974
Kypros	29229	1784	Vietnam	5846	2170
Latvia	24140	1875	Viro	25939	1857
Liettua	25992	1844	Yhdistynyt kuningaskunta	39128	1670
Luxemburg	74605	1519	Yhdysvallat	54795	1757
Malesia	22776	2238			

Laske bruttokansantuotteen ja työtuntien välinen korrelaatio sopivalla ohjelmalla. Piirrä myös havaintopisteet koordinaatistoon. Miten tulkitset tulosta?

Vihje s. 105 →

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävä 48. Oletetaan, että $n \geq 2$ muuttujaparia $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ sijaitsevat (x, y) -tasossa suoralla, joka ei ole vaaka- eikä pystysuora. Osoita, että muuttujien x ja y välinen korrelaatio on tasan 1, kun suora on nouseva, ja tasan -1 , kun suora on laskeva.

Vihje s. 106 →

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävä 49. Tehtävän 48 käänteistulos. Oletetaan, että pisteiden $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ kaikki x -koordinaatit eivät ole keskenään samoja eivätkä kaikki y -koordinaatit ole keskenään samoja.

Osoita, että mikäli pisteiden x - ja y -koordinaattien välinen korrelaatio on 1, pisteet sijaitsevat xy -koordinaatistossa nousevalla suoralla, ja vastaavasti jos $r = -1$, pisteet sijaitsevat laskevalla suoralla.

Vihje s. 106 →

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävä 50. Korrelaatiokertoimelle r pätee aina $-1 \leq r \leq 1$. Tämän voi perustella sillä, että tunnetusti $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ kaikilla kulmilla α , ja pätee $r = \cos \alpha$.

Tuloksen $-1 \leq r \leq 1$ voi kuitenkin myös todistaa suoraan kaavasta

$$r = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|}$$

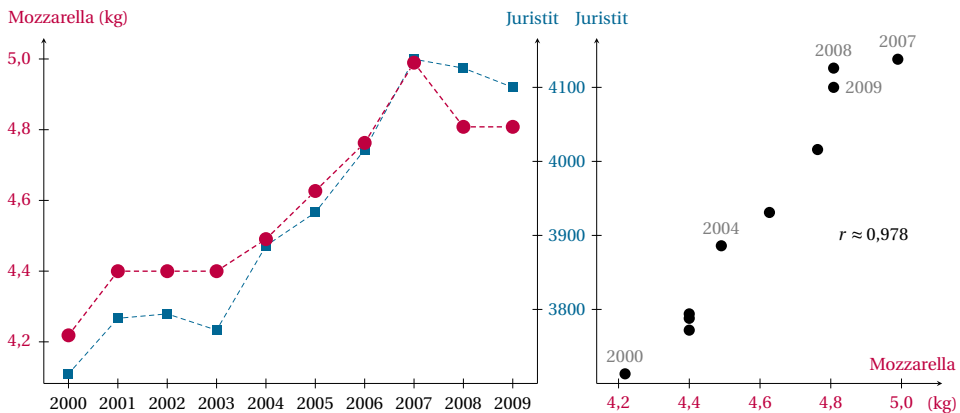
lähtien käyttäen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä. Miten tämä voitaisiin tehdä?

Vihje s. 106 →

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävä 51. Korrelaatioita hyödynnetään tieteellisessä tutkimuksessa paljon, ja niiden käytössä tulee luonnollisesti olla varovainen. Korkeakaan korrelaatio ei takaa, että muuttujien välillä olisi syy-seurausyhteyttä.

Esimerkiksi vuosina 2000–2009 havaijilaisten juristien lukumäärä ja mozzarella-juuston vuotuinen kulutus Yhdysvalloissa korreloivat voimakkaasti. Voi toki olla, että Havaijilla juuri juristit söivät valtavasti mozzarella, tai että mozzarellan syönti kannustaa muuttamaan Havaijille ja valmistumaan juristiksi, mutta kumpikaan selitys ei tunnu kovin uskottavalta.



Kuinka korkeita korrelaatioita täysin satunnaisessa datassa sitten tyypillisesti on? Tämä riippuu otoskoosta. Kokeile asiaa arpomalla satunnaislukuja taulukkolaskentaohjelmalla tai jossakin ohjelmointympäristössä.

- Arvo kymmenen paria satunnaislukuja ja laske aineiston korrelaatio. Toista tämä esimerkiksi 20 kertaa. Kuinka usein korrelaatio on itseisarvoltaan yli 0,3?
- Arvo nyt 100 paria satunnaislukuja ja laske tämän aineiston korrelaatio r . Toista useita kertoja. Kuinka usein $|r| > 0,3$?

Ensimmäisestä vihjeestä löytyy teknisiä ohjeita ja toisesta lukuja, joihin satunnaiskokeen tuloksia voi verrata.

Vihje s. 106 →

Toinen vihje s. 126 →

6 RGB-värit koordinaatistossa

Koordinaatisto mahdollistaa muotojen ja tilan kuvaamisen lukuina ja toisaalta lukujen havainnollistamisen kuvina. Tämä voi olla hyvin käytännöllistä, vaikka tutkittavat suureet eivät kuvaisikaan pituuksia.

Tarkastellaan esimerkiksi värien tuottamista tietokoneen tai puhelimen näytölle. Tyypillinen tapa tehdä tämä on tuottaa vain kolmea eri väriä: punaista (Red), vihreää (Green) ja sinistä (Blue), jolloin puhutaan RGB-väreistä. Tietokoneen ruudun pikselit koostuvat kolmesta pienestä värivalosta, joiden kirkkauksia voi säädellä. Esimerkiksi teksti **RGBY** näyttää suurennuslasin läpi tarkasteltuna kirjoittajan nestekidenäytöllä tältä:

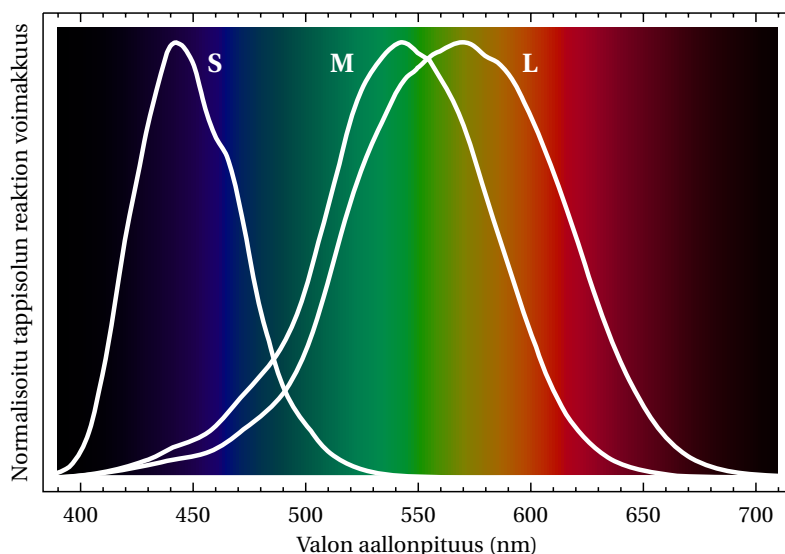


Nestekidenäytön pikseleitä suurennuslasin läpi nähtynä

Punaiset, vihreät ja siniset pikselit ovat yksivärisiä, ja valkoisen kokemus saadaan aikaan pitämällä kaikki kolme väriä päällä suunnilleen yhtä kirkkaina. Keltaiselta näyttävällä alueella on päällä vain punaisia ja vihreitä valoja. Ruudusta ei siis tule lainkaan keltaista valoa, vaikka näemmekin värin keltaisena!

Miten silmän huijaaminen näin yksinkertaisella tempulla on mahdollista? Värien fysikaalinen perusta on valon eri aallonpituuksissa. Vain yhtä aallonpituutta edustavat valon värit löytyvät sateenkaaresta ja muut väriaistimukset, kuten valkoinen tai pinkki, syntyvät useiden aallonpituuksien sekoituksena. Silmän huijaaminen vain kolmella värillä on mahdollista, koska ihmissilmässä on tyypillisesti vain kolmenlaisia tappisoluja (S, M ja L), jotka reagoivat eri tavoin valon eri aallonpituuksiin, kuten seuraavassa kuvassa [60] on esitetty.

Lähtetäällä samasta pikselistä kolmea yksittäistä aallonpituutta sopivilla voimakkuuksilla tappisolut saadaan reagoimaan samoin kuin ne vaikkapa juuri keltaiseen valoon reagoisivat. Lopputulos ei ole täydellinen, mutta riittävän hyvä tekemään värikokemuksesta uskottavan.



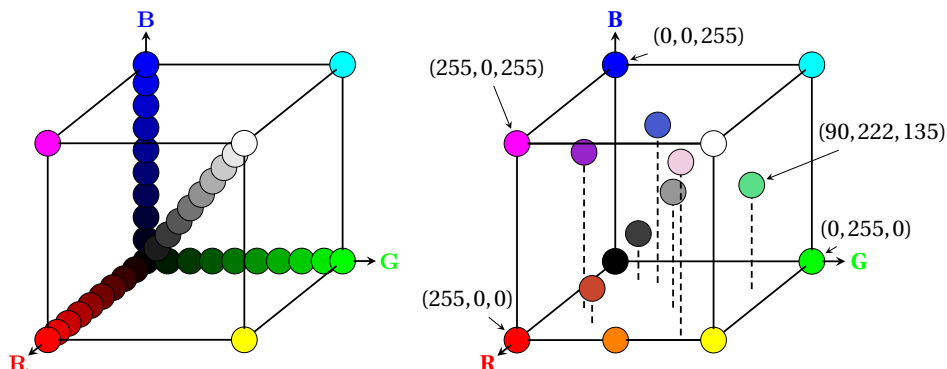
Kuvan pikselien RGB-väriarvot tallennetaan kuvatiedostoon lukukolmikkoina (R, G, B), ja käytetty lukuskaala vaihtelee formaatista toiseen. Esimerkiksi 24-bittisissä väreissä kunkin värikanavan kirkkaus ilmaistaan kokonaislukuna väliltä 0, 1, ..., 255, jolloin kullakin yksittäisellä värillä on 256 eri kirkkausvaihtoehtoa. Näitä yhdistelemällä saadaan $256^3 = 16\,777\,216$ eri väriä. Koska $256 = 2^8$, yhden päävärin kirkkausinformaatio mahtuu tietokoneen muistissa 8 bittiin, ja kokonaisen pikselin värin tallentamiseen tarvitaan $3 \cdot 8 = 24$ bittiä, eli kolme tavua.

Alla on joitakin esimerkkejä RGB-väreistä. Ne näkyvät kalibroidulla näytöllä oikein, mutta painettuna vastaavuus ei ole tarkka.

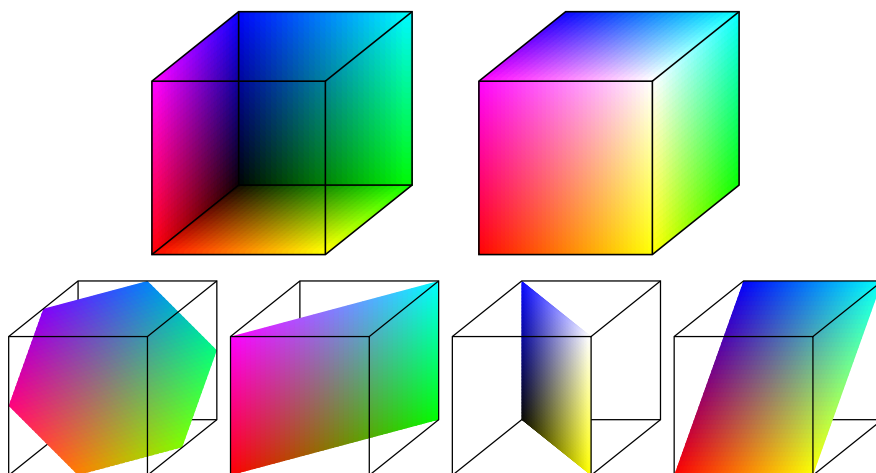
(255, 0, 0)	(0, 255, 0)	(0, 0, 255)	(255, 255, 255)
punainen	vihreä	sininen	valkoinen
(255, 255, 0)	(0, 255, 255)	(255, 0, 255)	(0, 0, 0)
keltainen	syaani	magenta	musta
(255, 128, 0)	(70, 90, 205)	(90, 222, 135)	(60, 60, 60)
(240, 205, 225)	(151, 35, 202)	(200, 70, 45)	(150, 150, 150)

RGB-kuutio

Lukukolmikko (R, G, B) voidaan tulkita kolmiulotteisen avaruuden koordinaateiksi. Näin RGB-värit muodostavat kuution, jonka kärjistä löytyvät punainen, vihreä, sininen, musta, valkoinen, keltainen, syaani ja magenta.



Jokainen kuution reunalla tai sisällä oleva kokonaislukukoordinaattipiste vastaa yhtä RGB-väriä. Esimerkiksi harmaan eri asteet löytyvät mustasta valkoiseen kulkevalta avaruuslävistäjältä. Kuution kolmiulotteisesta luonteesta johtuen kaikkia sen värejä ei saa näkemään kerralla kaksiulotteisessa kuvassa.



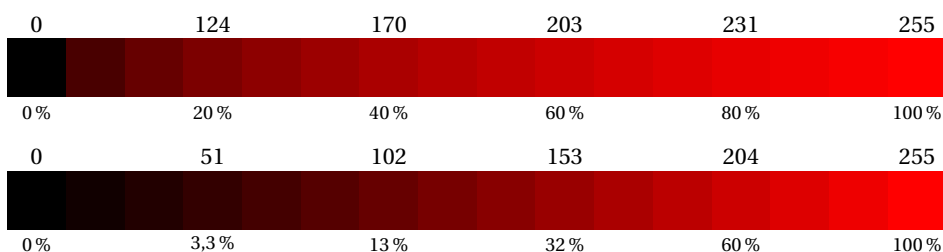
RGB-kuution takatahkot, etutahkot ja joitakin poikkileikkauksia

RGB-värien esittäminen pisteinä kolmiulotteisessa väriavaruudessa helpottaa värien hahmottamista ja tarjoaa luontevia näkymiä esimerkiksi piirto-ohjelmien värinvalintatyökaluille.

Olisi houkuttelevaa ajatella, että värikoordinaatteja voisi automaattisesti käsitellä täsmälleen samalla tavalla kuin tavallisia paikkakoordinaattejakin. Valitettavasti näin ei ole: esimerkiksi etäisyyden käsite on ongelmallinen.

Epälineaariset värikoordinaatit

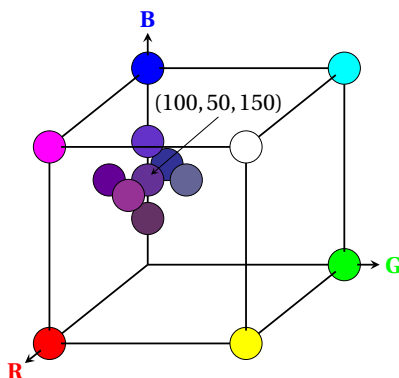
Ihmissilmä on huono erottamaan pieniä kirkkauseroja kirkkaassa valossa, sillä tällöin suhteellinen ero on pieni. Tästä syystä on valittu, että RGB-lukuarvot eivät ole suoraan verrannollisia ruudulta lähtevän valon intensiteettiin (eli säteilyn energiaan tiettyä pinta-alaa ja aikayksikköä kohti). RGB-asteikon alapäässä erot valon intensiteetissä ovat pienempiä ja kirkkaissa valoissa suurempia. Seuraavassa kuvassa on kaksi 16 värin skaalaa, joista ylemmässä valon intensiteetti kasvaa tasaisesti ja alemmassa R-koordinaatti kasvaa tasaisesti – ainakin, mikäli lukijan näytön kalibraatio noudattaa sRGB-standardia.



RGB-värien R-arvoja ja valon intensiteettejä

Värierot näyttävät ihmissilmään tasaisemmilta alemmassa skaalassa ja varsinkin tummissa väreissä on parempi erottelukyky. Käytetty epälineaarinen asteikko keskittää rajallista tallennuskapasiteettia alueelle, jossa ihmissilmän erottelukyky on paras.

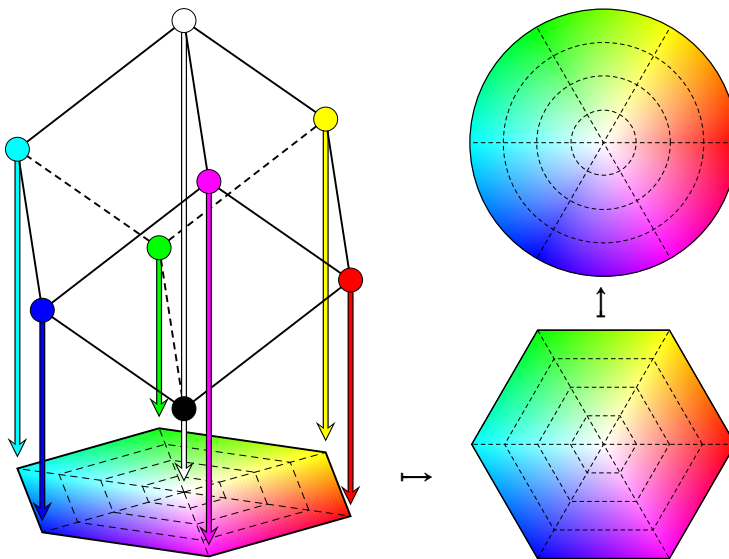
Erot RGB-koordinaateissa mittaavat siis paremmin koettua kirkkautta kuin valon intensiteetin todellista muutosta. Valitettavasti koettu värierokaan ei suoraan määrydy RGB-koordinaateista. Seuraavassa kuvassa on väri (100, 50, 150) ja kuusi sen muunnelmia, joissa kussakin yhtä värikoordinaattia on muutettu ± 50 yksikköä. Ainakaan kuvan laatijan silmissä näiden värien poikkeamat alkuperäisestä eivät näytä yhtä suurilta! Etäisyys RGB-koordinaatistossa ei siis valitettavasti lähimainkaan vastaa eroa koetussa värissä.



RGB ja muut värikoordinaatit

Ihminen ei luonnostaan hahmota värejä punaisen, vihreän ja sinisen yhdistelminä. Intuiitiivisempia käsitteitä värien kuvailuun ovat *sävy* (punainen, violetti, sininen), *kylläisyys* (kuinka puhdas väri on suhteessa harmaaseen) ja *vaaleus* tai *kirkkaus* (sen mukaan, puhutaanko pinnasta vai valosta).

Perinteinen väriympyrä on mahdollista muodostaa RGB-kuutiosta seuraavasti: Nostetaan kuutio ensin pystyyn niin, että mustasta valkoiseen kulkeva *harmaa-akseli* on pystysuorassa. Projisoidaan (pudotetaan) sitten kaikki värit tätä akselia vastaan kohtisuoraan tasoon. Koska moni väri – kuten musta ja valkoinen – projisoituu samaan kohtaan, täytyy valita, mitkä värit jätetään näkyviin. Seuraavassa kuvassa tasoon on merkitty korkeimmalta pudonneet värit.



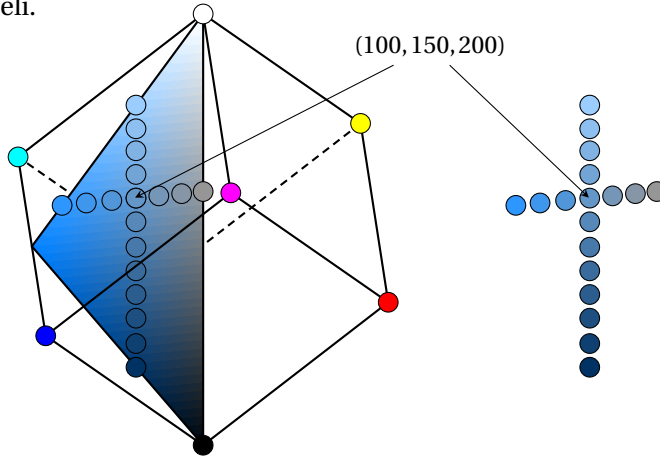
Väriympyrän muodostaminen RGB-kuutiosta

Projektion myötä tasoon on muodostunut säännöllinen kuusikulmio, jonka kärjissä ovat värit punainen, keltainen, vihreä, syaani, sininen ja magenta. Kuusikulmiosta voidaan muodostaa symmetrinen väriympyrä pullistamalla jokainen sisäkkäisistä kuusikulmiosta vastaavan kokoiseksi ympyräksi siten, että kuusikulmion kärjet pysyvät paikallaan ja kuusikulmion sivuilla tasavälein olleet pisteet päätyvät tasavälein ympyrän kehälle.

Eri sävyistä löytyy väriympyrän ulkokehältä kylläiset versiot ja keskipistettä kohti kuljettaessa kylläisyys laskee. Symmetrisestä väriympyrästä ei enää erotu, että punainen ja sininen ovat eri päissä valon aallonpituuteen perustuvaa spektriä. Tämä on sinänsä ymmärrettävää, sillä ihmisäivot eivät saa suoraa tietoa aallonpituuksista. Värinäön raakadata koostuu kolmen tappisolutyypin signaaleista, joista minkä kahden yhdistelmä hyvänsä voi jollakin hetkellä olla vallitseva.

Värien muunnoksia

Tarkastellaan nyt yhtä RGB-väriä, vaikkapa väriä (100, 150, 200). Sen kanssa samaa sävyä olevat värit löytyvät RGB-kuution sisältä kolmiosta, jonka yhtenä sivuna on harmaa-akseli.



Kun väristä (100, 150, 200) liikutaan kohti harmaa-akselia tai siitä poispäin, muuttuu lähinnä koettu värin kylläisyys. Vastaavasti liikuttaessa ylös tai alas harmaa-akselin suunnassa valon kirkkaus muuttuu, ja sävy sekä kylläisyys pysyvät suunnilleen vakioina. Tähän liittyvät laskutoimitukset ovat harjoitustehtävinä 53 ja 55.

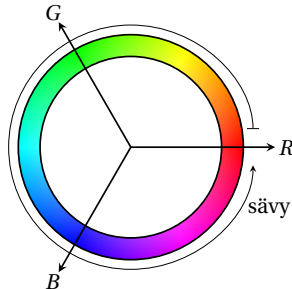
Kolmikosta "kiertokulma", "etäisyys harmaa-akselista" ja "korkeus" on johdettu erilaisia värikoordinaattijärjestelmiä, kuten HSI, HSV ja HSL (Hue-Saturation-Intensity/Value/Lightness). Valitettavasti nämäkään järjestelmät eivät vastaa täsmälleen ihmisen kokemusta värin sävystä, kylläisyydestä ja kirkkaudesta. Ne ovat kuitenkin hyvin käyttökelpoisia ja edelleen laajasti käytössä kuvankäsittelyohjelmissä. Esimerkiksi seuraava värikylläisyyden säätö on tehty GIMP-ohjelman HSL-työkalulla. Myös tarkempia ja monimutkaisempia avaruuksia värien hallintaan on olemassa paljon, esimerkiksi CIE 1931 xyY, CIELAB ja CIELUV.



Valokuvan värikylläisyyttä vähennetty (vasemmalla) ja lisätty (oikealla)

Neljäs ulottuvuus: tetrakromaattisuus

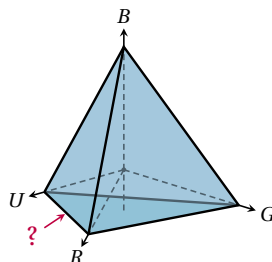
Ihmisen kolmenlaisten tappisolujen tuottama väridata on luonteeltaan kolmiulotteista, ja jos siitä poistetaan kirkkautta ja kylläisyyttä kuvaavat ulottuvuudet, jäljelle jää yksiulotteinen värin sävyä kuvaava dimensio. Sellaista yrittää kuvata esimerkiksi RGB-väreistä johdetun väriympyrän ulkokehä.



Monella eläimellä on kyky nähdä ultraviolettisäteilyä, ja osalla näistä eläimistä näkeminen perustuu neljään tappisolutyyppiin tai vastaavaan rakenteeseen. Tieteellisesti tutkittuja tällaisia *tetrakromaattisia* eläimiä ovat esimerkiksi kultakala *carassius auratus* [36] ja japanilainen ritariperhonen *papilio xuthus* [29]. On myös viitteitä siitä, että joillakin ihmisillä olisi neljää erilaista näkyvän valon alueella toimivaa tappisolutyyppiä [25]. Kirjoitushetkellä ilmiötä tutkittiin aktiivisesti.

Miten vaikkapa kultakala sitten kokee värit? Tämä on luonnollisesti erittäin vaikea biologinen kysymys, eikä tarkkaa vastausta tunneta. Pohditaan kuitenkin joitakin mahdollisuuksia.

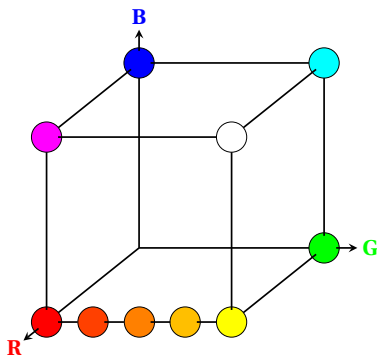
Neljä signaalia mahdollistaa neliulotteisen väriavaruuden. Sieltä voisi ajatella löytyvän kirkkaus- ja kylläisyysdimension lisäksi kaksiulotteinen puhtaiden sävyjen kirjo. Tätä kirjoa voisi kuvata esimerkiksi punaisen, vihreän, sinisen ja ultraviolettin akselin virittämän tetraedrin pintana, jolta löytyisi muun muassa ihmisten havaintokyvyn tavoittamattomissa olevia punaisen ja ultraviolettin sekoituksia.



Analogisesti väriympyrän kanssa edellä kuvatun hypoteettisen väritetraedrin voisi pullistaa väripalloksi. Ja jos tappisolutyyppejä olisi viisi, niiden mahdollistaman väriavaruuden sävykirjoa voisi yrittää sovitella neliulotteisen hyperpallon kolmiulotteiselle pinnalle! Ei vain ole mitään takeita, että tämä matemaattinen mahdollisuus vastaisi biologista todellisuutta.

Harjoitustehtäviä

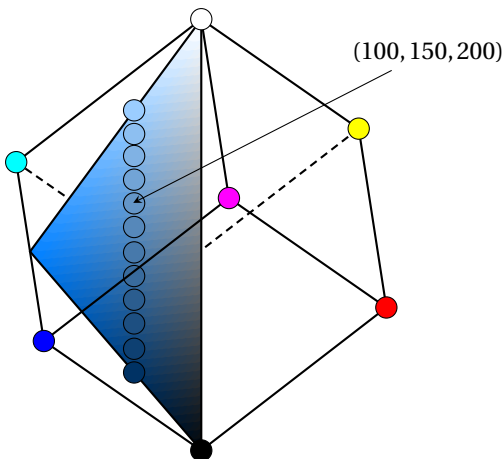
Tehtävä 52. Tarkastellaan tässä luvussa esiteltyä RGB-kuutiota, jossa kunkin päävärin maksimiarvo on 255. Kuvaan on merkitty puhtaan punaisen ja puhtaan keltaisen väliin tasavälein kolme muuta väriä. Mitkä ovat niiden RGB-koordinaatit?



Vihje s. 106 →

Toinen vihje s. 127 →

Tehtävä 53. Tutkitaan tarkemmin sivun 57 esimerkkiä värin (100, 150, 200) muunnoksista. Jos näistä koordinaateista liikutaan suoraan ylös tai alas harmaa-akselin suunnassa, mikä on korkeimmalla sijaitseva, vielä RGB-kuutioon mahtuva väri? Entä matalimmalla?



Vihje s. 107 →

Toinen vihje s. 128 →

Tehtävä 54. Värikuvan voi muuttaa harmaaksi (eli ”harmaasävykuvaksi”, vaikka teknisesti ottaen harmailla ei ole sävyä) monella eri tavalla. Yksinkertaisin, joskaan ei lopputuloksen kannalta aina tyylikkään tapa on korvata jokainen väri (R, G, B) harmaalla, jonka koordinaatit ovat alkuperäisen värin R -, G - ja B -arvojen keskiarvoja. Muunnos on siis

$$(R, G, B) \mapsto \left(\frac{R+G+B}{3}, \frac{R+G+B}{3}, \frac{R+G+B}{3} \right).$$

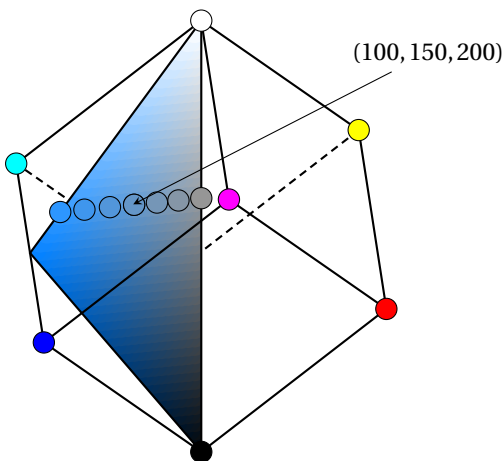


Osoita, että tämä muunnos vastaa geometrisesti sitä, että jokainen väri siirretään RGB-kuutiossa kohtisuorasti harmaa-akselille.

Vihje s. 107 →

Toinen vihje s. 128 →

Tehtävä 55. Jatketaan taas sivun 57 esimerkin parissa. Liikutaan harmaa-akselista kohtisuorasti pois päin värin $(100, 150, 200)$ suuntaan. Mikä RGB-kuution piste on tässä suunnassa kauimpana harmaa-akselista?



Vihje s. 107 →

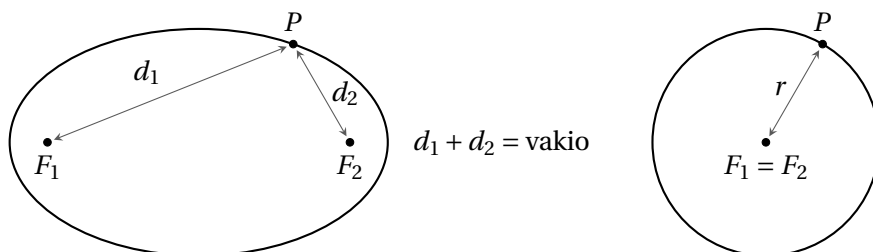
Toinen vihje s. 129 →

7 Ellipsi, hyperbeli ja paraabeli

Ellipsi, hyperbeli ja paraabeli ovat tasokäyriä, jotka tunnettiin jo antiikin matematiikassa. Antiikin suuri geometrikko Apollonius Pergalainen (n. 245 – 190 eaa.) julkaisi niistä syvällisen tutkielman, *Konika*, jossa otetaan käyttöön käyrien nimet ja seuraavat määritelmät.

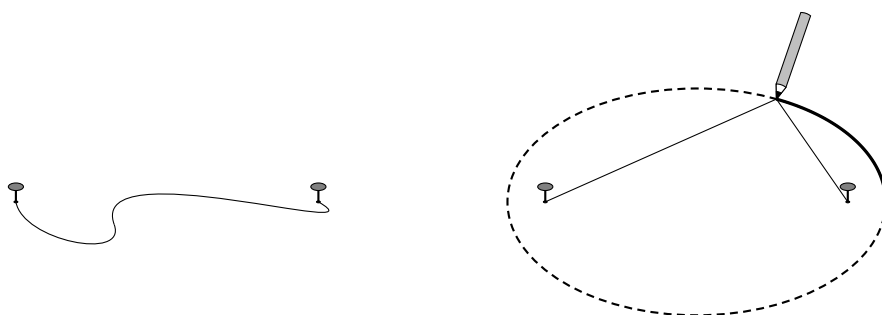
Ellipsi

Määritelmä. Ellipsi on tasokäyrä, jonka jokaisen pisteen P yhteenlaskettu etäisyys kahteen polttopisteeseen (F_1 ja F_2) on vakio. Tämän vakion tulee olla suurempi kuin polttopisteiden välinen etäisyys.



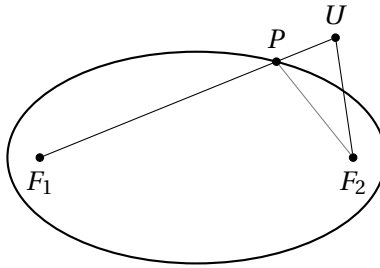
Mikäli polttopisteet ovat keskenään sama piste, syntyy ympyrä. Ympyrä on siis ellipsin erikoistapaus.

Ellipsin voi piirtää virittämällä kahden naulan välille löysän narun ja pitämällä narun kynän avulla kireänä piirtämisen aikana. Jotta ellipsin molemmat puolikkaat saa piirrettyä, kynän voi joutua välillä vaihtamaan toiselle puolelle lankaa.



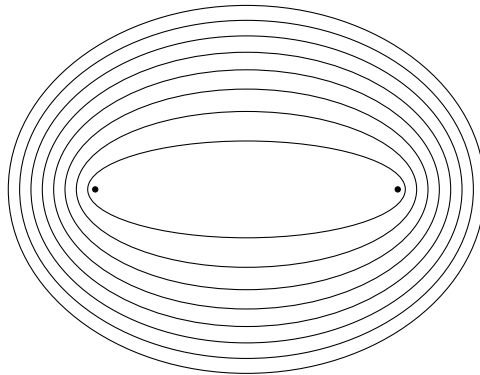
On intuitiivisesti selvää, että ellipsin ulkopuolella olevasta pisteestä polttopisteisiin laskettujen etäisyyksien summa on suurempi kuin kehäpisteillä. Perustellaan tämä täsmällisesti:

Olkoot ellipsin polttopisteet F_1 ja F_2 ja olkoon piste U ellipsin ulkopuolella. Leikat-
koon jana F_1U ellipsin kehän pisteessä P . Kolmiosta UPF_2 nähdään, että matka $PU + UF_2$ on suurempi kuin PF_2 , sillä kolmion kahden sivun summa on aina kol-
matta sivua suurempi (kolmioepäyhtälö). Pätee siis myös $UF_1 + UF_2 > PF_1 + PF_2$.

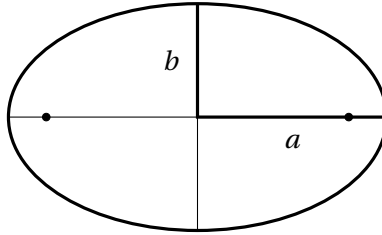


Vastaavasti ellipsin sisäpisteistä etäisyyksien summa polttopisteisiin on pienempi kuin ellipsin kehältä (tehtävä 61). Käytimme edellisessä todistuksessa merkintöjä joustavasti: PU viittasi sekä pisteiden P ja U väliseen janaan että tämän janan pituuteen. Pituuden voisi merkitä myös esimerkiksi muodossa $|PU|$.

Samoja polttopisteitä kohti on monia erikokoisia ja erimuotoisia ellipsejä sen mukaan, kuinka kaukana ellipsin kehän pisteet ovat polttopisteistä.

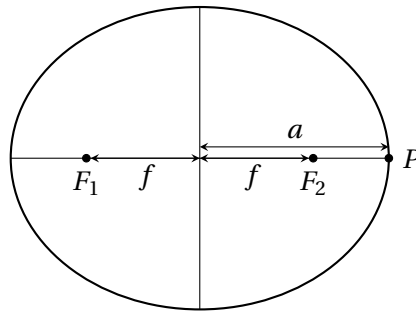


Kahden pisteen muodostamalla kuviolla on tasossa kaksi symmetria-akselia, joten ellipsilläkin on. Ellipsin kehä erottaa symmetria-akseleista kaksi janaa, joita kut-
sutaan pituuden mukaan isoakseliksi ja pikkuakseliksi. Akselit leikkaavat ellipsin
keskipisteessä.



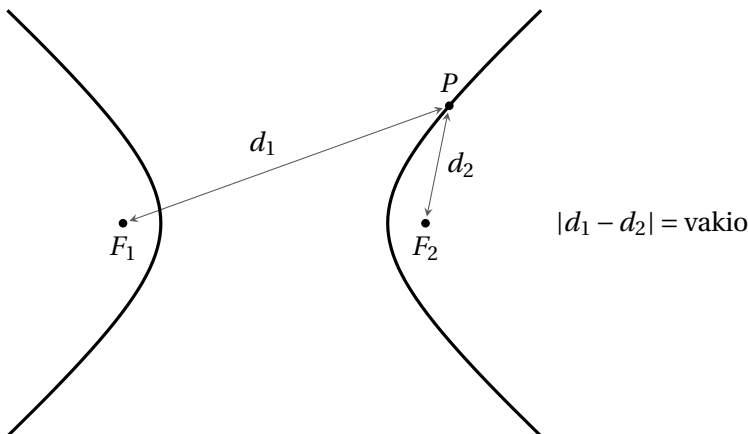
Iso- ja pikkuakselin puolikkaita merkitään usein kirjaimilla a ja b . Tällöin ellipsin määritelmässä esiintyvä vakio $d_1 + d_2$ on itse asiassa $2a$. Voidaan nimittäin tarkastella pistettä P , jossa isoakseli leikkaa ellipsin kehän. Jos f on polttopisteiden etäisyys ellipsin keskipisteestä, saadaan

$$F_1P + F_2P = (f + a) + (a - f) = 2a.$$

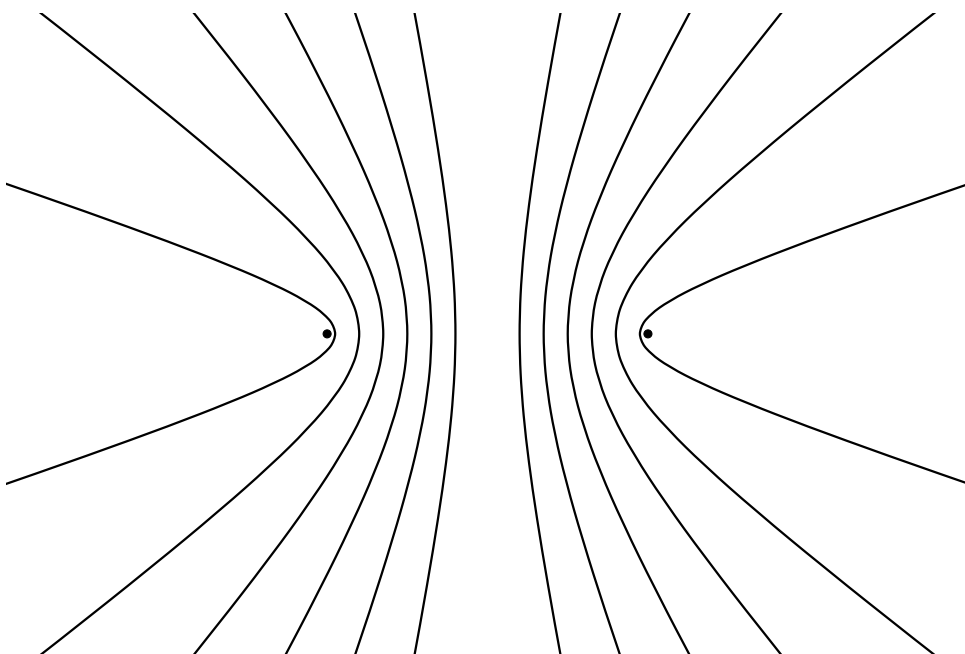


Hyperbeli

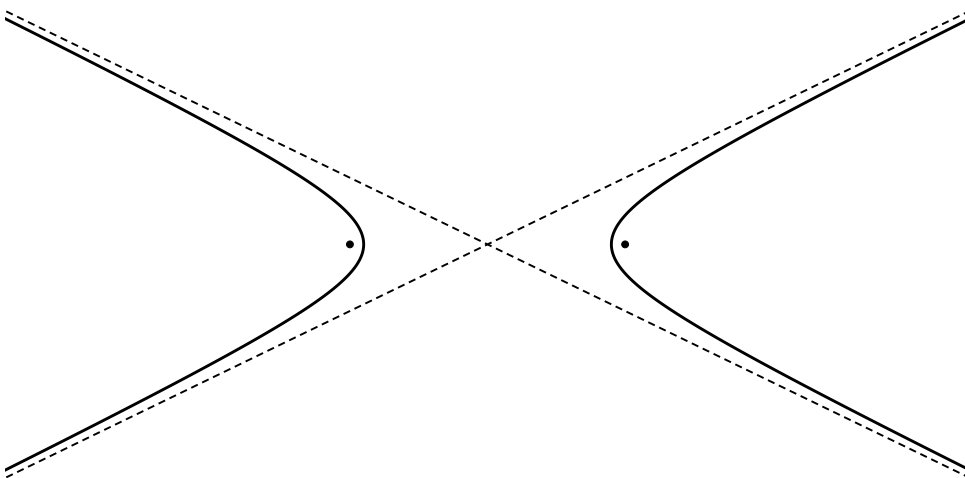
Myös hyperbeli määritellään sen pisteistä P kahteen polttopisteeseen F_1 ja F_2 laskettujen etäisyyksien d_1 ja d_2 avulla. Piste P kuuluu hyperbeliin, kun erotuksen $d_1 - d_2$ itseisarvo on tietty positiivinen vakio. Hyperbeli koostuu kahdesta symmetrisestä haarasta.



Vakion $|d_2 - d_1|$ arvosta riippuen samat polttopisteet määräävät monta eri hyperbeliä.

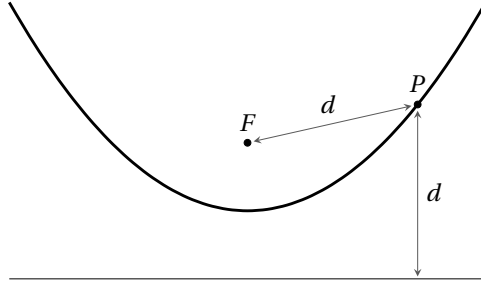


Mitä kauemmas hyperbelin polttopisteistä edetään, sitä suurempi hyperbeli on. Hyperbeli lähestyykin rajatta kahta suoraa, asymptoottia. Tämän perustelemme luvussa 8.

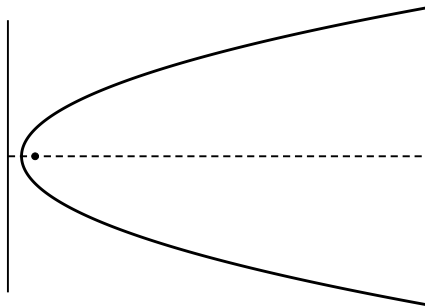


Paraabeli

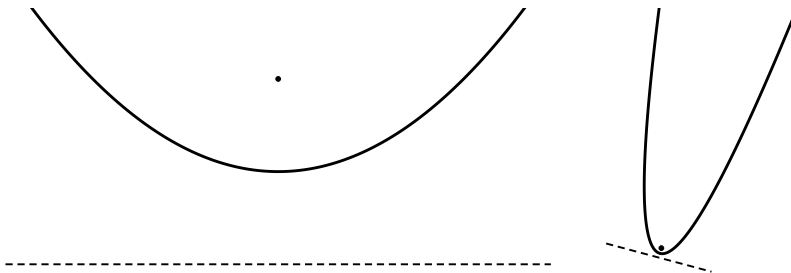
Paraabeliin kuuluvat ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä *johtosuorasta* ja sen ulkopuolisesta *polttopisteestä*.



Paraabelilla on yksi symmetria-akseli (lyhyemmin paraabelin *akseli*), joka kulkee polttopisteen kautta ja on kohtisuorassa johtosuoraa vastaan.



Yllättävää kyllä, kaikki paraabelit ovat yhdenmuotoisia keskenään. Tämän voi perustella sillä, että johtosuoran ja sen ulkopuolisen polttopisteen muodostamat geometriset kuviot ovat keskenään yhdenmuotoisia. Pisteen ja suoran yhdistelmät saa nimittäin kuvattua toisikseen yhdenmuotoisuuden säilyttävillä kuvauksilla: siirretään ensin polttopisteet päällekkäin, kierretään sitten johtosuoraa polttopisteen ympäri oikean suuntaiseksi, ja skaalataan lopuksi polttopisteen suhteen, kunnes suora on halutulla etäisyydellä. Polttopiste ja johtosuora määräävät paraabelin, joten myös paraabelit ovat yhdenmuotoisia keskenään.

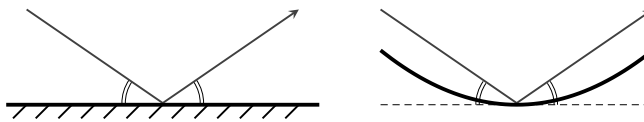


Optiset ominaisuudet

Ellipsillä, hyperbelillä ja paraabelilla on hyödyllisiä optisia ominaisuuksia, ja siksi niitä käytetäänkin paljon peilien ja linssien muotoina.

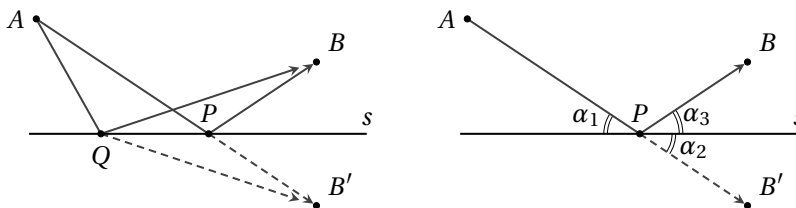
Heijastuslaki

Heijastumislain mukaan tasaisesta peilipinnasta valonsäde heijastuu samassa kulmassa kuin missä se saapui. Kaarevasta pinnasta valonsäde heijastuu kuten tasopeilistä, joka olisi asetettu pinnan tangentiksi. Emme määrittele tangenttia tässä kirjassa täsmällisesti; se olisi luontevinta tehdä differentiaalilaskennan avulla.



Fysiikan oppikirjoissa tulo- ja heijastuskulmat määritellään yleensä suhteessa pinnan normaaliin (mikä onkin luontevaa, kun käsitellään myös taittumista), mutta tässä tekstissä tarkastelemme valonsäteen ja heijastavan pinnan välisiä kulmia, kuten kuvissa yllä on merkitty.

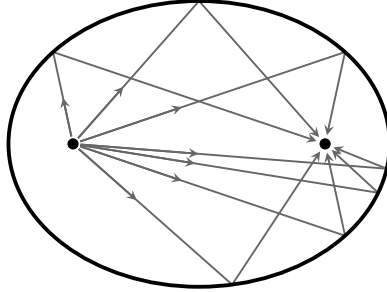
Peilistä heijastuva valonsäde toteuttaa *Fermat'n periaatteen*: valo kulkee lyhyintä reittiä. (Yleisemmin valo kulkee *nopeinta* reittiä, mutta tässä yhteydessä nopein on myös lyhyin, sillä emme käsittele eri väliaineita, joissa valon nopeus muuttuu.) Tarkemmin sanottuna: Kun A ja B ovat kaksi pistettä samalla puolella suoraa s , lyhyin reitti pisteestä A suoran s kautta pisteeseen B toteuttaa heijastuslain. Kääntäen pätee, että heijastuslain mukaisesti kulkeva valonsäde kulkee lyhyintä reittiä.



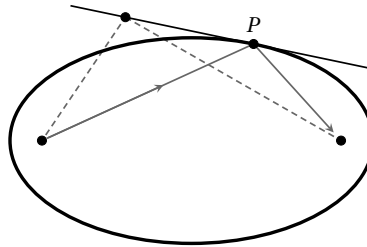
Fermat'n periaatteen todistus suoralle peilille: Olkoot pisteet A ja B samalla puolella suoraa s ja olkoon piste Q jokin suoran s piste. Peilataan piste B toiselle puolelle suoraa s pisteeksi B' . Murtoviivat AQB ja AQB' ovat yhtä pitkät. Lyhyin reitti APB on siis sellainen, jossa piste P on suoralla AB' . Tällöin yllä oikealla olevan kuvan ristikulmat α_1 ja α_2 ovat yhtäsuuret, ja peilauksen vuoksi $\alpha_2 = \alpha_3$. Siis pätee myös $\alpha_3 = \alpha_1$, joten lyhyin reitti APB toteuttaa heijastuslain. Tämä lyhyin reitti on myös ainoa heijastuslain mukainen reitti, sillä pisteen P siirtäminen suoralla s kasvattaa toista kulmista α_1 ja α_3 ja pienentää toista. Heijastuslain mukainen reitti on siis lyhyin.

Ellipsin optinen ominaisuus

Ellipsin polttopisteestä lähtevät valonsäteet heijastuvat ellipsin kehästä kohti ellipsin toista polttopistettä.



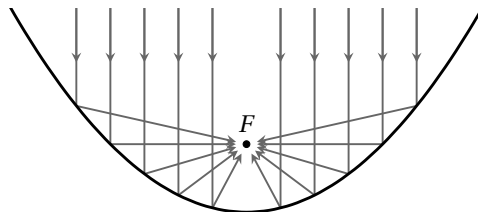
Todistus. Tutkitaan valonsädettä, joka kulkee ellipsin polttopisteestä kehän pisteeseen P . Piirretään ellipsille pisteen P kautta kulkeva tangentti. Tutkitaan reittejä, jotka kulkevat yhdestä polttopisteestä tämän tangentin kautta toiseen polttopisteeseen. Muut tangentin pisteet ovat ellipsin ulkopuolella, joten pisteen P kautta kulkeva reitti on lyhyin (sivun 62 tulos). Fermat'n periaatteen mukaisesti lyhyin reitti toteuttaa heijastuslain, joten valonsäde heijastuu pisteestä P ellipsin toiseen polttopisteeseen.



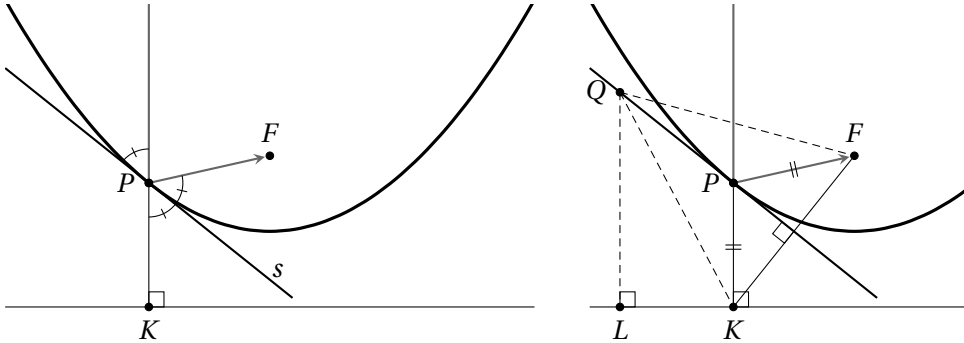
Edellä esitetty todistus olettaa, että pisteeseen P piirretty tangentti ei leikkaa ellipsiä missään toisessa pisteessä. Harjoitustehtävässä 66 esitetään tarkempi todistus, jossa tämäkin perustellaan.

Paraabelin optinen ominaisuus

Paraabelin akselin suuntaiset valonsäteet heijastuvat paraabelin pinnasta kohti paraabelin (osuvasti nimettyä) polttopistettä. Vastaavasti polttopisteestä lähtevät valonsäteet kulkevat akselin suuntaisina heijastuttuaan paraabelista.



Todistus. Olkoon P piste paraabelilla, mutta ei sen akselilla, ja K piste paraabelin johtosuoralla niin, että PK on kohtisuorassa johtosuoraa vastaan. Olkoon kulman KPF puolittaja s . Koska suorien s ja PK väliset ristikulmat ovat yhtä suuret, kuvaan alla vasemmalla merkityt kolme kulmaa pisteen P ympärillä ovat keskenään yhtäsuuret. Suoran PK suuntainen valonsäde heijastuu siis suorasta s kohti polttopistettä F . Täytyy vielä todistaa, että kulmanpuolittaja s on paraabelin tangentti.



Paraabelin määritelmän mukaisesti jana PK ja PF ovat yhtä pitkät. Koska kolmio PKF on tasakylkinen, sen huippukulman P puolittaja s on myös kannan KF keskinormaali. Mikä tahansa suoran s piste Q on siis yhtä kaukana pisteistä F ja K . Olkoon L pisteen Q projektio paraabelin johtosuoralla. Kun $Q \neq P$, kolmiosta LKQ nähdään, että $QL < QK = QF$. Piste Q on siis lähempänä johtosuoraa kuin paraabelin polttopistettä, eikä kuulu paraabelille. Koska suoralla s on vain yksi yhteinen piste paraabelin kanssa, se on joka paraabelin tangentti, kuten halusimme todistaa, tai paraabelin akselin suuntainen suora. Tämä jälkimmäinen vaihtoehto ei ole mahdollinen, sillä suora PK oli akselin suuntainen.

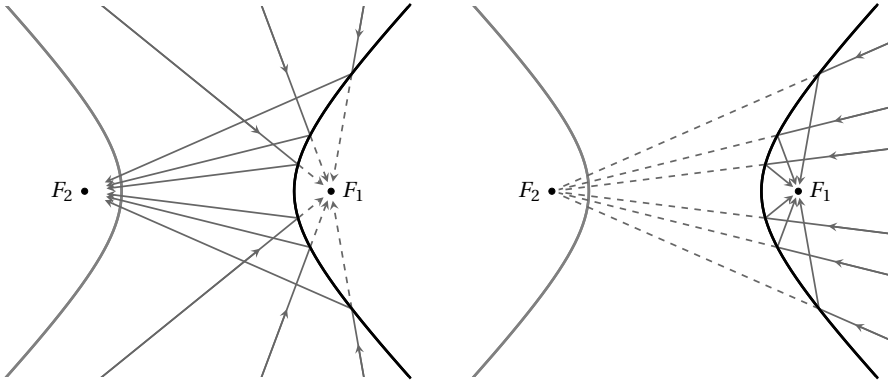
Poikkileikkaukseltaan paraabelin muotoisia eli paraboloidisia peilejä hyödynnetään esimerkiksi lautasantenneissa, spottivaloissa ja autojen ajovaloissa.



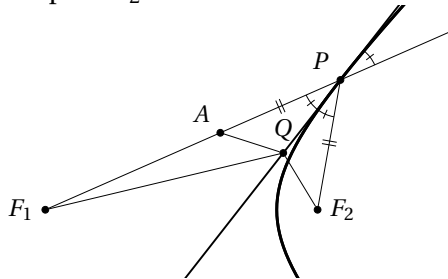
Paraboloidisia radioteleskooppeja [59]

Hyperbelin optinen ominaisuus

Hyperbelikäyrän molemmilla puolilla on sama ominaisuus: Hyperbelin yhtä polttopistettä kohti tulevat valonsäteet heijastuvat hyperbelin pinnasta kohti toista polttopistettä. Jos valonsäteen suunta käännetään, ominaisuus saa seuraavan muodon: hyperbelin yhdestä polttopisteestä lähtevät valonsäteet heijastuvat hyperbelistä sellaiseen suuntaan, että ne näyttävät tulevan toisesta polttopisteestä.



Todistus. Riittää todistaa, että kun hyperbelin polttopisteistä piirretään janat samaan hyperbelin pisteeseen, tähän pisteeseen piirretty tangentti puolittaa janojen välisen kulman. Olkoot hyperbelin polttopisteet F_1 ja F_2 , ja olkoon piste P hyperbelin sillä haaralla, joka on lähempänä polttopistettä F_2 . Oletetaan, ettei P ole suoralla F_1F_2 . Haluamme osoittaa, että kulman F_1PF_2 puolittaja on myös hyperbelin tangentti. Riittää perustella, ettei kulmanpuolittajan pisteitä ole samalla puolella hyperbeliä kuin piste F_2 .

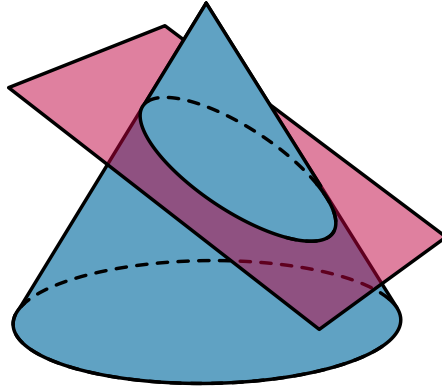


Olkoon $Q \neq P$ piste kulman F_1PF_2 puolittajalla. Valitaan janalta F_1P piste A siten, että $PA = PF_2$. Kolmiot PAQ ja PF_2Q ovat yhtenevät (sks), joten $AQ = QF_2$. Kolmiosta F_1QA nähdään, että $QF_1 < F_1A + AQ$, eli $QF_1 - AQ < F_1A$. Koska $AQ = QF_2$, saadaan $QF_1 - QF_2 < F_1A = PF_1 - PA = PF_1 - PF_2$.

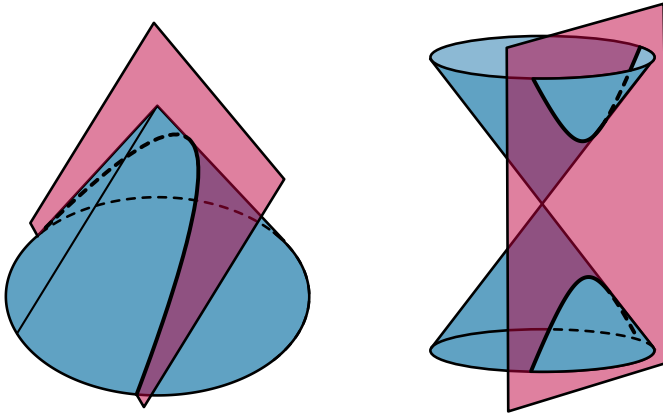
Koska $QF_1 - QF_2 < PF_1 - PF_2$, piste Q ei kuulu hyperbelin tähän haaraan. Epäyhtälön suunnasta voidaan päätellä, että tällainen piste Q on aina eri puolella hyperbeliä kuin piste F_2 . Alkuperäinen kulmanpuolittaja on siis tangentti.

Kartioleikkaukset

Ellipsiä, paraabelia ja hyperbeliä kutsutaan kartioleikkauksiksi, sillä ne voidaan muodostaa leikkaamalla suoran ympyräkartion vaippa sopivasti tasolla, joka ei kulje kartion huipun kautta. Kun leikkaava taso on kartion reunaa loivempi, leikkauskuvio on muodoltaan ellipsi.



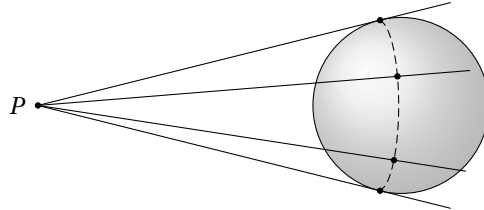
Jos taas leikkausjana on täsmälleen kartion sivujan suuntainen, leikkauskuvio on paraabeli, kuten kuvassa alla vasemmalla.



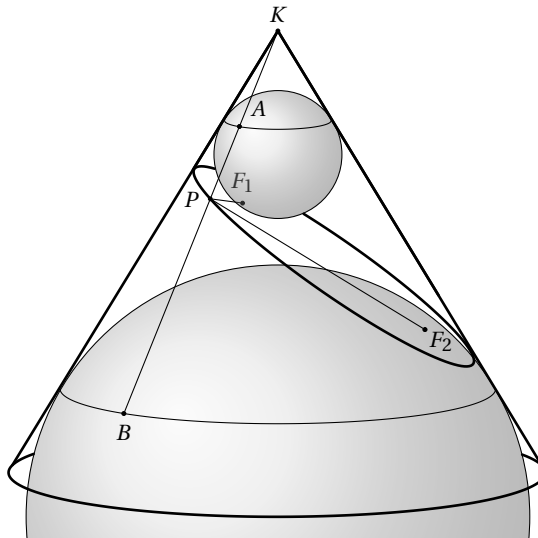
Kun leikkaava taso on kartion pintaa jyrkempi (tai peräti kartion symmetria-akselin suuntainen), leikkauskuvio on hyperbeli, kuten kuvassa yllä oikealla. Hyperbelin toinenkin haara muodostuu, kun kartion päälle asettaa ylösalaisin identtisen kartion niin, että kartioiden symmetria-akselit yhtyvät.

Ei tietysti ole itsestään selvää, että leikkauskuviot ovat juuri ellipsi, paraabeli ja hyperbeli. Varsinkin ellipsin tapauksessa tulos voi tuntua yllättävältä: miksi leikkauskuvio ei olisi epäsymmetrinen, kananmunan muotoinen? Tulokset voi todistaa elegantisti käyttäen niin sanottuja Dandelinin palloja (Germinal Pierre Dandelin, 1794–1847). Käy nimittäin niin miellyttävästi, että kun kartion sisällä

oleva pallo sivuaa sopivasti kartion pintaa ja kartiota leikkaavaa tasoa, pallon ja tason yhteinen piste on leikkauskuvion polttopiste. Todistetaan tämä ellipsin ja paraabelin tapauksissa. Hyperbelin tapaus on harjoitustehtävänä 65. Käytämme seuraavaa aputulosta: pallon ulkopuolisesta pisteestä P pallolle piirretyt tangentit sivuavat palloa pisteissä, jotka ovat keskenään yhtä kaukana pisteestä P .



Ellipsi kartioleikkauksena, todistus. Leikataan suora ympyräkartio tasolla, joka leikkaa kartion korkeusjanan suuremmassa kulmassa kuin kartion sivujana. Asetetaan kaksi palloa sivuamaan kartion vaippaa ja leikkaustasoa, yksi kartion kärjen puolelle tasoa ja toinen toiselle puolelle. Palloilla on siis kummallakin yksi yhteinen piste leikkaustason kanssa (pisteet F_1 ja F_2), ja pallojen sivuamispisteistä kartion vaipan kanssa muodostuu kaksi ympyrää.



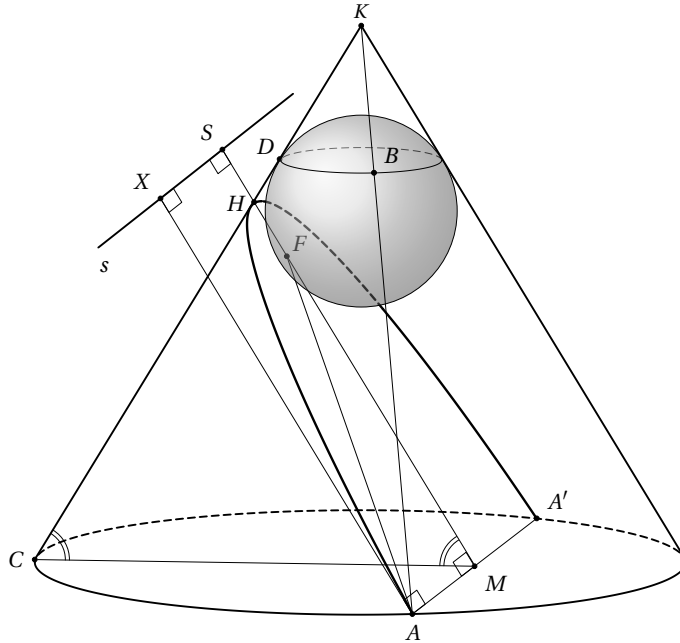
Tarkastellaan kartion ja tason leikkauspinnan mielivaltaista pistettä P . Piirretään kartion kärjen K kautta suora KP , joka leikatkoon pallojen ja kartion sivuamisympyrät pisteissä A ja B . Janan AB pituus on pisteen P valinnasta riippumaton vakio. Nyt kuitenkin janat PA ja PF_1 ovat yhtä pitkät, sillä ne ovat pallon ulkopuolisesta pisteestä tangenttipisteeseen kulkevia janoja. Vastaavasti $PB = PF_2$, joten saadaan

$$PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = \text{vakio}.$$

Leikkauskäyrä on siis ellipsi, jonka polttopisteet ovat F_1 ja F_2 .

Paraabeli kartioleikkauksena, todistus. Tutkitaan suoraa kartiota, jonka huippu on K , ja jota leikkaa kartion sivujan suuntainen taso. Sovitaan, että kartion symmetria-akseli on pystysuorassa. Olkoon tason ja kartion leikkauskäyrän ylin piste H . Tutkitaan nyt leikkauskäyrän mielivaltaista pistettä A , joka ei ole sama kuin H . Piirretään pisteen A kautta vaakasuora ympyrä kartion vaipalle. Olkoon tämän ympyrän ja leikkauskäyrän toinen yhteinen piste A' ja leikatkoon suora KH tämän ympyrän pisteessä C . Olkoon janan AA' keskipiste M . Leikkauskäyrä on symmetrinen suoran HM suhteen.

Lisätään nyt kuvioon Dandelinin pallo, joka sivuaa kartoin vaippaa ympyrää pitkin ja leikkaustasoa yhdessä pisteessä F . Symmetriasyistä F on janalla HM . Jatketaan janaa FH oman pituutensa verran pisteeseen S , ja piirretään sen kautta leikkaavaan tasoon suora s , joka on kohtisuorassa suoraa HM vastaan. Olkoon X pisteen A projektio suoralla s . Nyt haluaisimme osoittaa, että leikkauskäyrä on paraabeli, jonka polttopiste on F ja johtosuora s . Riittää osoittaa, että $AF = AX$.



Olkoot janojen AK ja DK leikkauspisteet Dandelinin pallon ja kartion vaipan leikkausympyrän kanssa B ja D . Nyt $AF = AB$, koska janat ovat pallon tangenttijanoja ja kiertosymmetrian vuoksi $AB = CD$. Koska taso leikkasi kartiota kartion sivujan suuntaisesti, kolmion HMC kantakulmat ovat yhtäsuuret ja $HC = HM$. Lisäksi $HD = HF = HS$, koska HF ja HD ovat pallon tangenttijanoja ja HS valittiin yhtä pitkäksi kuin HF . Päteekin siis $CD = MS$, koska näiden janojen osat ovat yhtä pitkät keskenään. Lopulta $AX = MS$, sillä $AMSX$ on suorakulmio. Koottuna

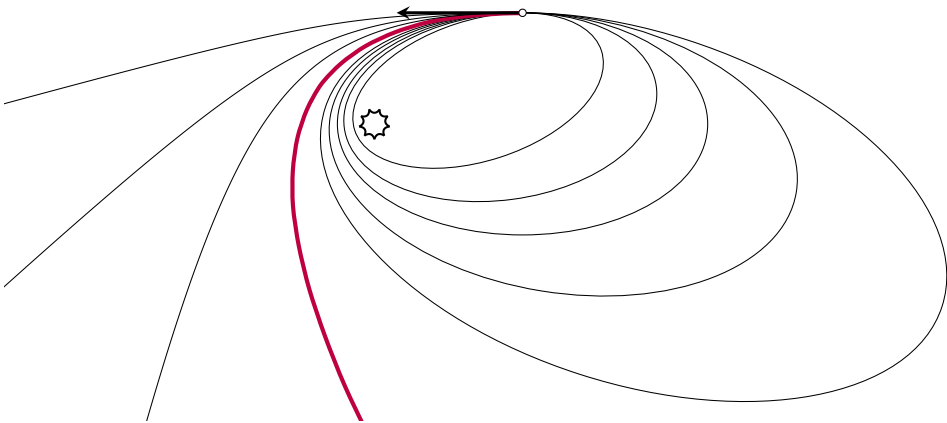
$$AF = AB = CD = CH + HD = MH + HS = MS = AX,$$

joten leikkauskäyrä on paraabeli, jonka polttopiste on F ja johtosuora s .

Newtonin mekaniikka ja kartioleikkaukset

Newtonin painovoimalain mukaan kappaleiden välinen painovoima on kääntäen verrannollinen kappaleiden etäisyyden neliöön. Tästä seuraa (hieman mutkikkaalla laskulla, jota emme käsittele tässä, katso esimerkiksi teos [18]), että jos systeemissä on vain kaksi kappaletta, niiden radat ovat kartioleikkauksia, elleivät kappaleet ole suoralla törmäyskurssilla.

Aurinkoa vinosti lähestyvän asteroidin rata riippuu sen alkunopeudesta. Jos nopeus on riittävän suuri, asteroidi ohittaa auringon eikä koskaan pala. Tällöin rata on muodoltaan hyperbeli. Jos taas alkunopeus on riittävän pieni, asteroidi jää aurinkoa kiertävälle ellipsiradalle, tai törmää aurinkoon, mikäli rata kulkee auringon pinnan sisään. Ja jos nopeus on juuri hyperbeli- ja ellipsitapauksia erottavalla rajalla, rata on paraabeli (paksu käyrä alla). Kaikissa kolmessa tapauksessa ratakäyrän polttopiste sijaitsee auringon keskipisteessä.



Tarkemmin sanottuna kahden kappaleen systeemissä molemmat kappaleet liikkuvat ratoja, joiden polttopisteinä on kappaleiden massakeskipiste. Esimerkiksi Aurinko ja Jupiter kiertävät ellipsiratoja pitkin pistettä, joka on hieman auringon pinnan ulkopuolella. Maan ja Kuun massakeskipiste on Maan sisällä, keskimäärin 4700 km päässä keskipisteestä.

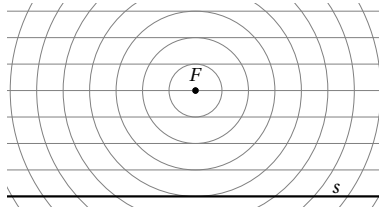
Planeettojen ja muiden kappaleiden radat aurinkokunnassamme eivät toki ole aivan tarkasti ellipsejä, sillä aurinkokunta ei ole kahden kappaleen systeemi. Muiden planeettojen aiheuttama painovoima aiheuttaa pieniä poikkeamia. Esimerkiksi planeetta Neptunuksen olemassaolo ja varsin tarkka paikka onnistuttiin ennustamaan vuonna 1845 sen Uranuksen rataa aiheuttamien häiriöiden avulla. On myös muistettava, että Newtonin painovoimalaki kuvaa painovoimaa vain likimain. Yleisen suhteellisuusteorian ennusteiden erot Newtonin mekaniikkaan ovat pieniä, mutta ne täytyy huomioida esimerkiksi Merkuriuksen radan selittämiseksi.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 56. Kun vuohen kiinnittää tolppaan narulla, vuohi voi laiduntaa alueella, jota rajoittaa ympyrä. Miten vuohi tulisi kiinnittää, jotta alue olisi muodoltaan ympyrästä poikkeava ellipsi?

Vihje s. 107 →

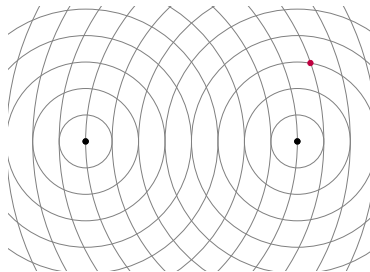
Tehtävä 57. Paraabeliin kuuluvat ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana polttopisteestä F ja johtosuorasta s . Miten paraabelin voisi hahmotella seuraavan apukuvion avulla?



Vihje s. 108 →

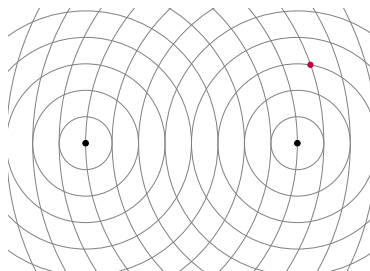
Toinen vihje s. 129 →

Tehtävä 58. Ellipsin kuvaajan voi hahmotella käyttäen ympyröitä, joiden keskipisteissä on ellipsin polttopisteet. Yksi ellipsin kehän piste on jo merkitty. Miten ellipsin voisi piirtää loppuun?



Vihje s. 108 →

Tehtävä 59. Edellisen tehtävän kuvan avulla voi piirtää myös hyperbelin. Polttopisteet ja hyperbelin yksi piste on jo merkitty. Piirrä hyperbeli loppuun.



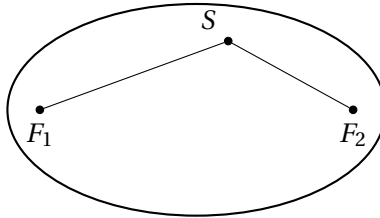
Vihje s. 108 →

Tehtävä 60. Olkoon ellipsin isoakselin puolikkaan pituus a , pikkuakselin puolikkaan pituus b (missä $b \neq a$), ja polttopisteen etäisyys ellipsin keskipisteestä f . Osoita, että $f^2 + b^2 = a^2$.

Vihje s. 109 →

Toinen vihje s. 130 →

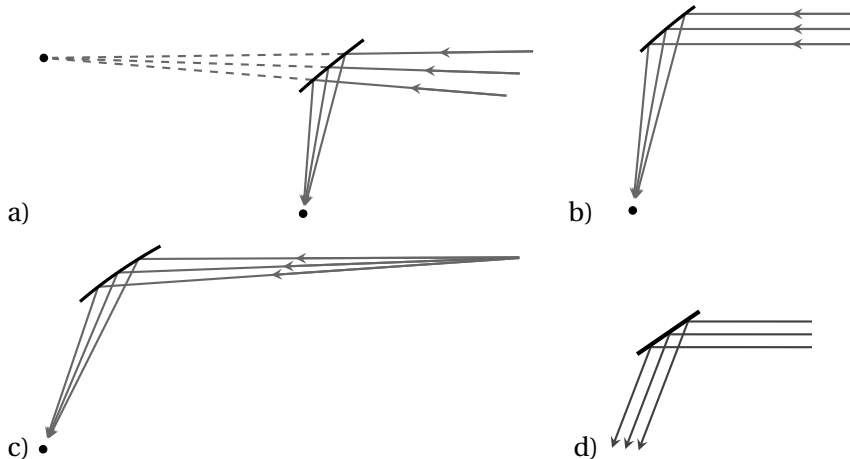
Tehtävä 61. Osoita, että ellipsin kehän sisäpuolella olevista pisteistä polttopisteisiin laskettu etäisyyksien summa on pienempi kuin ellipsin kehän pisteillä.



Vihje s. 109 →

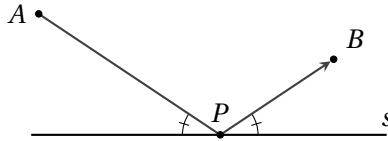
Toinen vihje s. 130 →

Tehtävä 62. Optisissa laitteissa tarvitaan erilaisia peilejä erilaisiin tarkoituksiin. Minkä muotoinen peili tarvittaisiin kussakin tapauksessa, jotta saataisiin aikaiseksi seuraavat valonsäteiden kulut?



Vihje s. 109 →

Tehtävä 63. Fermat'n periaate. Sivulla 66 esiteltiin Fermat'n periaate ja todistettiin, että lyhyin reitti pisteestä A suoran s kautta pisteeseen B toteuttaa heijastuslain. Todista yhteys toisella tavalla: Oleta, että pisteestä A lähtevä valonsäde heijastuu heijastuslain mukaisesti suoran s pisteestä P pisteeseen B , ja todista, että piste P on suoran s pisteistä se, jolle murtoviiva APB on lyhyin.



Vihje s. 109 →

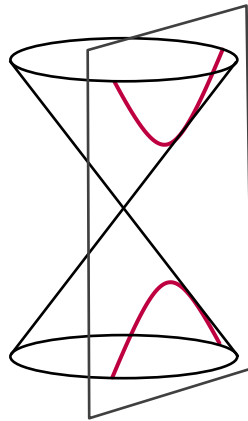
Toinen vihje s. 130 →

Tehtävä 64. Todista paraabelin polttopisteominaisuus käyttäen Fermat'n periaatetta.

Vihje s. 109 →

Toinen vihje s. 131 →

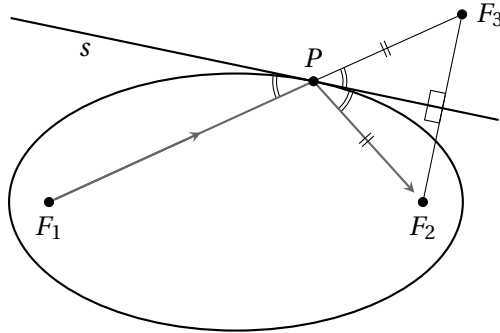
Tehtävä 65. Osoita Dandelinin pallojen avulla, että kuvan mukaisen kahden kartion muodostaman pinnan ja tason leikkauskuvio on hyperbeli, kun leikkaustaso ei kulje kartioiden yhteisen huipun kautta, ja leikkaustaso on kartion sivujanaa jyrkempi, eli se leikkaa molempien kartioiden vaippoja.



Vihje s. 110 →

Toinen vihje s. 131 →

Tehtävä 66. Todistetaan ellipsin optinen ominaisuus seuraavalla päättelyllä: Olkoot ellipsin polttopisteet F_1 ja F_2 sekä P ellipsin kehän piste. Jatketaan janaa F_1P pituuden PF_2 verran pisteeseen F_3 . Piirretään tasakylkisen kolmion PF_2F_3 huipukulmalle P kulmanpuolittaja s , joka kolmion tasakylkisyyden vuoksi on janan F_2F_3 keskinormaali. Kuvaan merkityt kulmat pisteen P ympärillä ovat keskenään yhtä suuria (perusteluna ristikulmat ja kulmanpuolittaja), joten valonsäteen reitti F_1PF_2 vastaa heijastumista suorasta s .

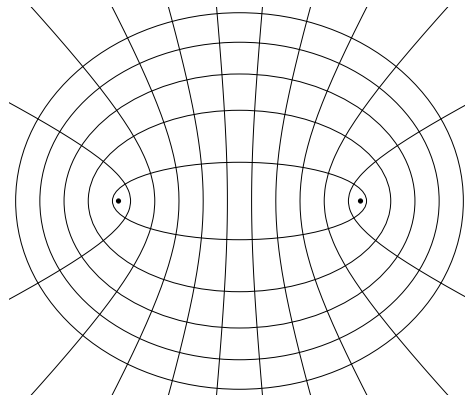


Tarvitsee enää todistaa, että suora s on itse asiassa ellipsin tangentti, eli että suoran s muut pisteet kuin P ovat ellipsin ulkopuolella. Viimeistelee todistus.

Vihje s. 111 →

→ Toinen vihje s. 132

Tehtävä 67. Osoita, että jos ellipsillä ja hyperbelillä on samat polttopisteet, nämä käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.



Vihje s. 111 →

→ Toinen vihje s. 132

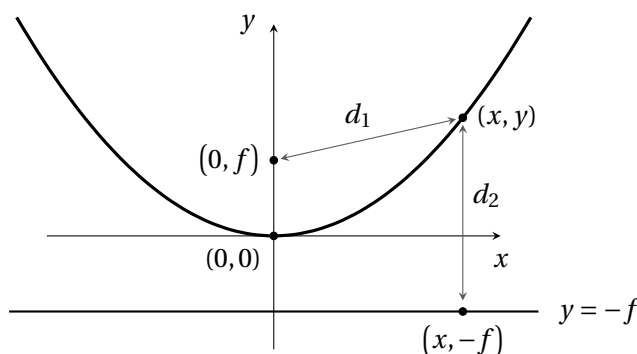
8 Kartioleikkaukset koordinaatistossa

Ellipsejä, paraabeleja ja hyperbelejä on luonnollista tarkastella koordinaatistossa. Näitä tasokäyriä kuvaavat yhtälöt ovat mukavan yksinkertaisia, kun käyrien symmetria-akselit asetetaan koordinaattiakselien suuntaisesti.

Paraabelin yhtälön johtaminen sen geometrisestä määritelmästä lähtien on suhteellisen lyhyt lasku, mutta ellipsin ja hyperbelin tapauksessa sieventämistä on jonkin verran enemmän.

Paraabelin yhtälö

Paraabeli on niiden pisteiden joukko, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä polttopisteestä ja johtosuorasta. Jos polttopiste on $(0, f)$ ja johtosuora $y = -f$, paraabelin pisteen (x, y) etäisyys polttopisteeseen on $d_1 = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}$ ja johtosuoraan $d_2 = |y - (-f)| = |y + f|$.



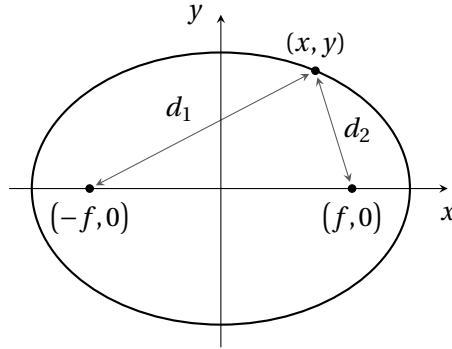
Ehto $d_1 = d_2$ neliöimällä saadaan

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2 + (y - f)^2}\right)^2 &= |y + f|^2 \\ x^2 + y^2 - 2yf + f^2 &= y^2 + 2fy + f^2 \\ x^2 &= 4fy \\ y &= \frac{1}{4f}x^2.\end{aligned}$$

Tällaisen paraabelin yhtälö on siis tuttua muotoa $y = ax^2$, missä $a = \frac{1}{4f}$.

Ellipsin yhtälö

Ellipsi koostuu niistä tason pisteistä (x, y) , joiden yhteenlaskettu etäisyys kahteen polttopisteeseen on vakio $2a$, joka on polttopisteiden välistä etäisyyttä suurempi. Tarkastellaan tilannetta, jossa polttopisteet ovat kohdissa $(-f, 0)$ ja $(f, 0)$.



Kun etäisyydet d_1 ja d_2 lasketaan Pythagoraan lauseella, saadaan

$$d_1 = \sqrt{(x - (-f))^2 + y^2} = \sqrt{(x + f)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad d_2 = \sqrt{(x - f)^2 + y^2}.$$

Jotta neliöjuurista päästäisiin eroon, pyritään sieventämään ellipsin määritelmän ehto $d_1 + d_2 = 2a$ muotoon, jossa esiintyisivät lausekkeet d_1^2 ja d_2^2 :

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 2a & || - d_2 \\ d_1 &= 2a - d_2 & || ()^2 \\ d_1^2 &= 4a^2 - 4ad_2 + d_2^2 & || + 4ad_2 - d_1^2 \\ 4ad_2 &= 4a^2 + d_2^2 - d_1^2 & || ()^2 \\ 16a^2 d_2^2 &= (4a^2 + d_2^2 - d_1^2)^2. \end{aligned}$$

Kun muistetaan, että $d_1^2 = (x + f)^2 + y^2$ ja $d_2^2 = (x - f)^2 + y^2$, voidaan jatkaa:

$$\begin{aligned} 16a^2 \left((x - f)^2 + y^2 \right) &= \left(4a^2 + \left((x - f)^2 + y^2 \right) - \left((x + f)^2 + y^2 \right) \right)^2 \\ 16a^2 (x^2 - 2xf + f^2 + y^2) &= \left(4a^2 + x^2 - 2xf + f^2 + y^2 - (x^2 + 2xf + f^2 + y^2) \right)^2 \\ 16a^2 (x^2 - 2xf + f^2 + y^2) &= (4a^2 - 4xf)^2 \\ 16a^2 (x^2 - 2xf + f^2 + y^2) &= 16(a^2 - xf)^2 \quad || : 16 \\ a^2 x^2 - 2a^2 xf + a^2 f^2 + a^2 y^2 &= a^4 - 2a^2 xf + x^2 f^2 \\ a^2 x^2 - f^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^4 - a^2 f^2 \\ (a^2 - f^2)x^2 + a^2 y^2 &= a^2(a^2 - f^2), \end{aligned}$$

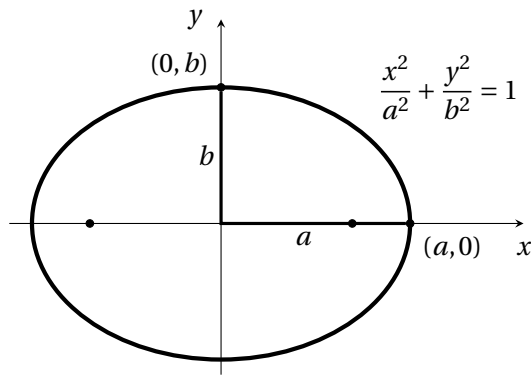
ja jakamalla lopuksi puolittain tekijällä $a^2(a^2 - f^2)$ saadaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Ellipsin määritelmän mukaan $2a > 2f$, joten luku $a^2 - f^2$ on positiivinen, ja sitä voidaan siis merkitä $a^2 - f^2 = b^2$ jollakin sopivalla luvulla b . Tällaisen ellipsin yhtälöksi saadaan siis

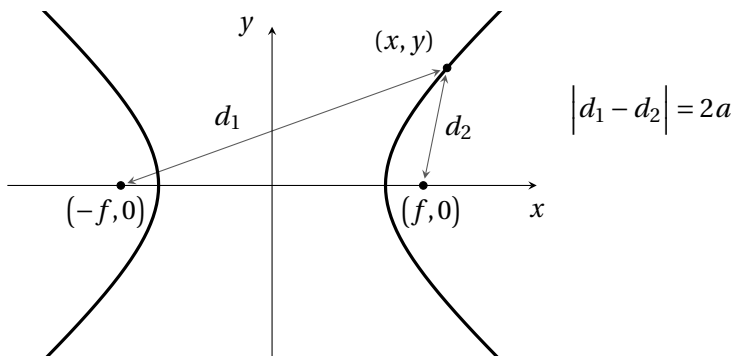
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kun $y = 0$, täytyy olla $x = \pm a$, ja kun $x = 0$, täytyy olla $y = \pm b$. Ellipsi leikkaa siis koordinaattiakselit pisteissä $(\pm a, 0)$ ja $(0, \pm b)$, joten a ja b ovat ellipsin akselien puolikkaiden mitat.



Hyperbelin yhtälö

Hyperbeli koostuu niistä tason pisteistä, joiden kahteen kiinteään polttopisteeseen laskettujen etäisyyksien d_1 ja d_2 erotuksen itseisarvo on positiivinen vakio $2a$, joka on polttopisteiden välistä etäisyyttä pienempi. Tutkitaan hyperbeliä, jonka polttopisteet ovat $(-f, 0)$ ja $(f, 0)$.



Etäisyydet d_1 ja d_2 polttopisteistä hyperbelin pisteeseen (x, y) ovat samat kuin ellipsin tapauksessa:

$$d_1 = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad d_2 = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}.$$

Itseisarvolauseke $|d_1 - d_2|$ on joko $d_1 - d_2$ tai $-d_1 + d_2$ sen mukaan, kumpi etäisyyksistä d_1 ja d_2 on suurempi. Molemmat tapaukset voidaan kattaa kirjoittamalla $|d_1 - d_2| = \pm d_1 \mp d_2$, missä ylempät merkit tarkoittavat ensimmäistä tapausta ja alemmat toista. Työstetään nyt hyperbelin määritelmän yhtälöä:

$$\begin{aligned} |d_1 - d_2| &= 2a & || \quad |x| &= \pm x \\ \pm d_1 \mp d_2 &= 2a & || \quad \pm d_2 \\ \pm d_1 &= 2a \pm d_2 & || \quad ()^2 \\ d_1^2 &= 4a^2 \pm 4ad_2 + d_2^2 & || \quad \mp 4ad_2 - d_1^2 \\ \mp 4ad_2 &= 4a^2 + d_2^2 - d_1^2 & || \quad ()^2 \\ 16a^2 d_2^2 &= (4a^2 + d_2^2 - d_1^2)^2 \end{aligned}$$

Tämä on täsmälleen sama yhtälö kuin ellipsin tapauksessa edellä! Saman sievennyksen jälkeen päädytään siis yhtälöön

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Mikä ellipsien ja hyperbelien ero siis onkaan? Täytyy muistaa, että hyperbelien tapauksessa $a < f$, eli luku $a^2 - f^2$ on negatiivinen. Kirjoitetaan sen paikalle negatiivinen luku $-b^2$, missä positiivinen b on valittu sopivasti. Origokeskiselle hyperbelille, jonka polttopisteet ovat x -akselilla, saadaan siis yhtälöksi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

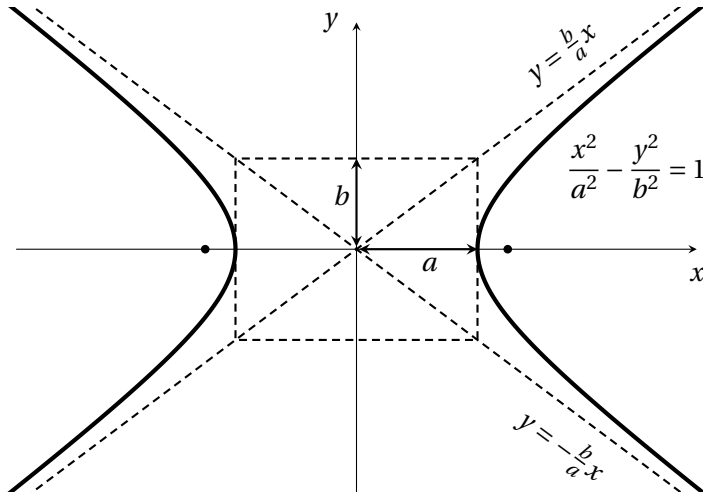
Luvun a rooli on selvä: kun $y = 0$, hyperbelin yhtälöstä saadaan $x = \pm a$ kuten ellipsinkin tapauksessa. Hyperbeli kulkee siis pisteiden $(-a, 0)$ ja $(a, 0)$ kautta.

Vakion b rooli ei ole yhtä suoraviivainen. Sen ymmärtämiseksi ratkaistaan y hyperbelin yhtälöstä ja muokataan lauseketta sopivasti:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - 1 &= \frac{y^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{b} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm \frac{|x|}{|a|} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \\ y &= \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \end{aligned}$$

Mitä suurempi x on itseisarvoltaan, sitä lähempänä lauseke $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ on ykköstä. Kaukana origosta hyperbeli lähestyy siis suoria $y = \frac{b}{a}x$ ja $y = -\frac{b}{a}x$. Nämä suorat

ovat hyperbelin asymptootteja. Kulmakerroin $\frac{b}{a}$ tarkoittaa, että hyperbelin keskelle voi hahmotella $2a \times 2b$ -suorakulmion, jonka kärkien kautta asymptootit kulkevat.

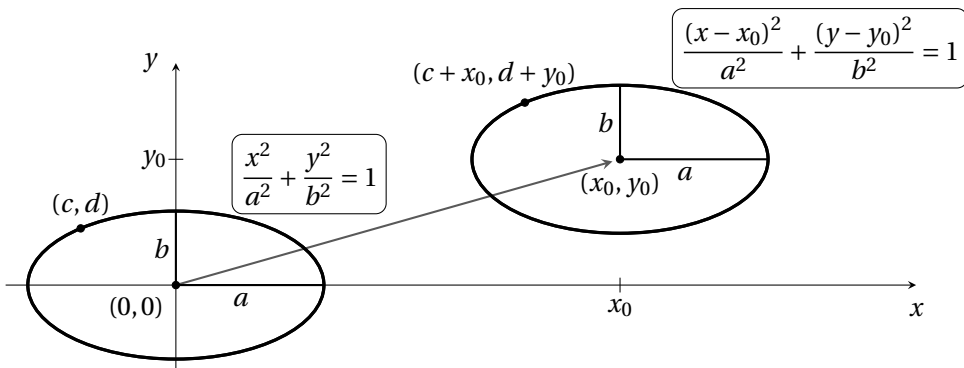


Hyperbeli ja sen asymptootit

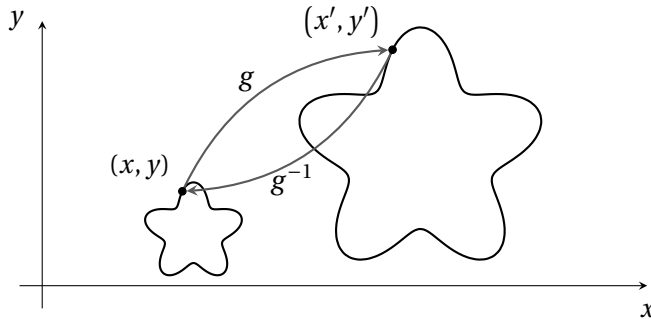
Kierrot ja siirrot koordinaatistossa

Ellipsit, hyperbelit ja paraabelit voivat luonnollisesti sijaita muuallakin kuin origon läheisyydessä ja käyrien symmetria-akselien ei tarvitse olla koordinaattiakselien suuntaisia. Tarkastellaan siis, miten käyrien yhtälöt muuttuvat, kun kuvioita siirretään tai kierretään.

Mikäli käyrän sijaintia x - y -koordinaatistossa halutaan muuttaa x -suunnassa määrällä x_0 ja y -suunnassa määrällä y_0 , tulee käyrän yhtälössä korvata jokainen muuttuja x lausekkeella $x - x_0$ ja jokainen muuttuja y lausekkeella $y - y_0$. Jos nimittäin piste (c, d) toteuttaa alkuperäisen yhtälön, piste $(c + x_0, d + y_0)$ toteuttaa muokatun yhtälön.

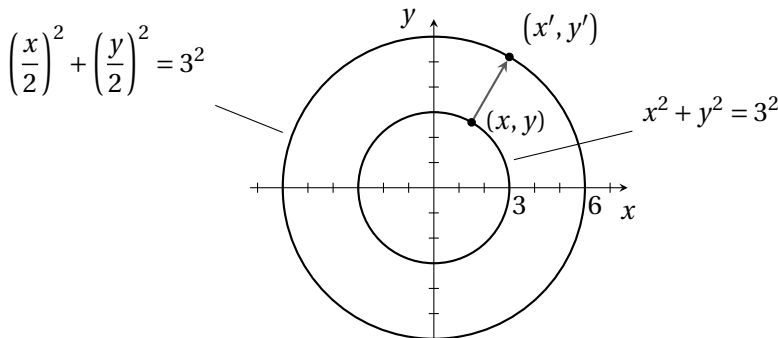


Tarkastellaan edellistä ajatusta yleisemmin. Jos jonkin yhtälön määräämää tasokäyrää halutaan muokata toisenlaiseksi geometrisella kuvauksella g , kuten siirrolla, skaalauksella, kierrolla, peilauksella tai muulla vastaavalla, voidaan ensin tarkastella, miten kuvaus muuttaa käyrän yksittäisen pisteen (x, y) sijaintia. Jos pisteen (x, y) tulisi siirtyä paikkaan (x', y') , merkitään $g[(x, y)] = (x', y')$ tai $(x, y) \xrightarrow{g} (x', y')$. Käänteinen kuvaus g^{-1} puolestaan palauttaisi pisteen (x', y') takaisin pisteeksi (x, y) , eli $(x, y) \xrightarrow{g^{-1}} (x', y')$.

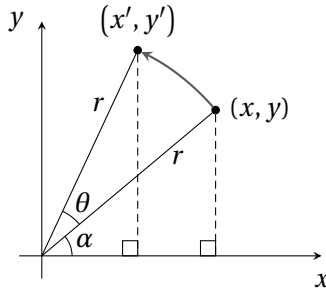


Koska pisteen (x, y) koordinaatit toteuttavat alkuperäisen yhtälön, sijoittamalla niiden paikalle $(x, y) = g^{-1}[(x', y')]$ saadaan muokattu yhtälö, jonka piste (x', y') toteuttaa halutusti.

Käytetään näitä merkintöjä tapauksessa, jossa haluamme kaksinkertaistaa origokeskisen ympyrän $x^2 + y^2 = 3^2$ säteen. Kuvauksen g tulisi kaksinkertaistaa käyrän pisteiden x - ja y -koordinaatit, eli $(x, y) \xrightarrow{g} (2x, 2y) = (x', y')$. Käänteinen kuvaus olisi $(x', y') \xrightarrow{g^{-1}} \left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right) = (x, y)$. Ympyrän yhtälössä tulee siis korvata x lausekkeella $\frac{x'}{2}$ ja y lausekkeella $\frac{y'}{2}$, jotta saadaan suurennetun ympyrän pisteitä (x', y') kuvaava yhtälö: $\left(\frac{x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = 3^2$. Muuttujien x' ja y' pilkut olivat mukana vain kirjanpitoa varten, joten lopullinen yhtälö voidaan kirjoittaa ilman niitä:



Tutkitaan seuraavaksi kiertoja. Olkoon piste (x, y) etäisyyden r päässä origosta ja kulmassa α positiiviseen x -akseliin nähden. Kierretään pistettä (x, y) kulman θ verran vastapäivään pisteeksi (x', y') . Oletetaan aluksi, että molemmat pisteet ovat positiivisten koordinaattiakselien määrittämässä tason neljänneksessä. Seuraavan kuvan suorakulmaisista kolmioista nähdään, että $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $x' = r \cos(\alpha + \theta)$ ja $y' = r \sin(\alpha + \theta)$.



Sinin ja kosinin summakaavojen (jotka perustellaan Pitkän matematiikan lisäsiivujen 5. osassa [50]) avulla saadaan

$$\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) = \cos(\theta)y + \sin(\theta)x. \end{cases}$$

Jos taas kierretään myötäpäivään, uusi kulma on $\alpha - \theta$, ja saadaan

$$\begin{cases} x' = r \cos(\alpha - \theta) = r(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ y' = r \sin(\alpha - \theta) = r(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) = \cos(\theta)y - \sin(\theta)x. \end{cases}$$

Koottuna saadaan:

Kierto vastapäivään

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

Kierto myötäpäivään

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ y' = -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

Kun sini ja kosini yleistetään yli 90° kulmille, edelliset laskut pätevät, olivatpa α ja θ millaisia kulmia hyvänsä. Tähän liittyvä teoria käsitellään kirjasarjamme viidennessä osassa. Kiertojen kaavat pätevät siis yleiselle kulmalle θ .

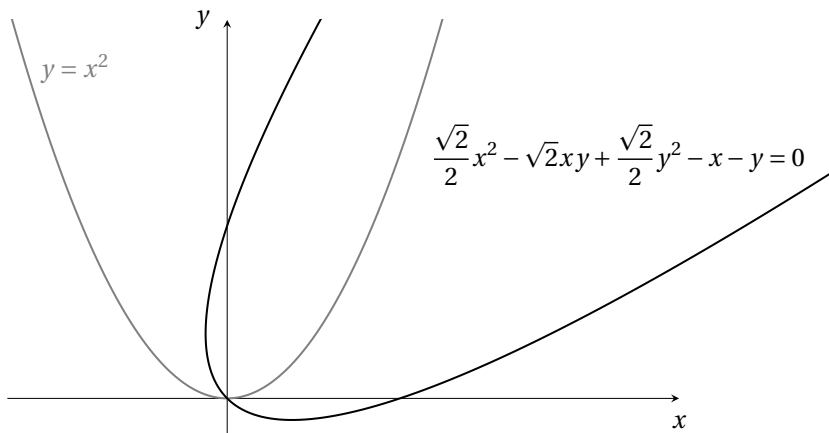
Sovelletaan nyt kiertoja. Miltä näyttää vaikkapa vinossa olevan paraabelin yhtälö? Tarkastellaan paraabelia $y = x^2$ ja kierretään sitä 45° myötäpäivään. Silloin alkuperäisten muuttujien x ja y lausekkeet saadaan kiertämällä uuden paraabelin pisteitä (x', y') vastapäivään:

$$\begin{cases} x = \cos(45^\circ)x' - \sin(45^\circ)y' \\ y = \sin(45^\circ)x' + \cos(45^\circ)y'. \end{cases}$$

Sijoitetaan lukuarvot $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$, jotka voidaan päätellä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka sivut ovat 1, 1 ja $\sqrt{2}$. Paraabelin yhtälö muuttuu seuraavasti:

$$\begin{aligned} y = x^2 &\xrightarrow{\text{kierto}} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \right)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y &= \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 & || \cdot \sqrt{2} & || -x - y \\ 0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 - x - y. \end{aligned}$$

Piirretään alkuperäinen ja kierretty paraabeli:



Vinon paraabelin yhtälö on kovin erinäköinen kuin alkuperäinen yhtälö $y = x^2$. Uusi yhtälö on kuitenkin toisen asteen polynomiyhtälö, kuten alkuperäisenkin. Tämä pätee itse asiassa kaikille muillekin paraabeleille, ellipseille ja hyperbeleille. Olemme jo näyttäneet, että tietyissä erikoistapauksissa näiden käyrien yhtälöt ovat toista astetta. Käyrät voidaan muuntaa mihin tahansa asentoon, kokoon ja paikkaan yhdistämällä sopivasti seuraavia muunnoksia:

Siirto

$$(x, y) \mapsto (x + x_0, y + y_0)$$

Peilaus y -akselin suhteen

$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

Skaalaus origon suhteen

$$(x, y) \mapsto (kx, ky)$$

Kierto origon ympäri

$$(x, y) \mapsto (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \cos(\theta)y + \sin(\theta)x)$$

Esimerkiksi kierto mielivaltaisen pisteen ympäri saadaan yhdistelmällä *siirto origoon*–*kierto*–*siirto takaisin*. Koska mikään edellä mainituista muunnoksista ei nosta polynomiyhtälön astetta, kaikki tason ellipsit, hyperbelit ja paraabelit voidaan esittää toisen asteen polynomiyhtälöillä.

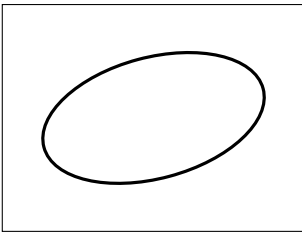
Tästä tuloksesta herää luonnollinen kysymys: päteekö sama myös toisin päin? Kuvaako jokainen kahden muuttujan toisen asteen polynomiyhtälö ellipsiä, paraabelia tai hyperbeliä? Vastaus on kielteinen.

Toisen asteen tasokäyrät

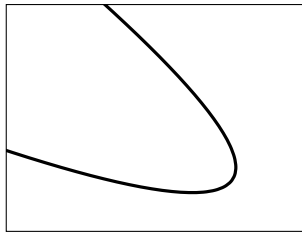
Toisen asteen tasokäyrä määritellään joukkona xy -tason pisteitä, jotka toteuttavat yhtälön muotoa

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

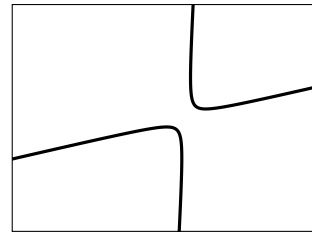
missä A, B, C, D, E ja F ovat reaalilukuja, ja ainakin yksi luvuista A, B tai C on nollasta poikkeava. Voidaan todistaa, että jokainen toisen asteen tasokäyrä on yhtä seuraavista seitsemästä tyypistä.



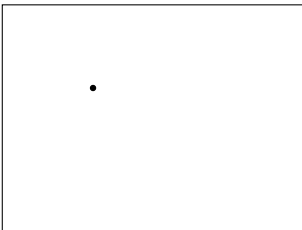
ellipsi (sis. ympyrät)



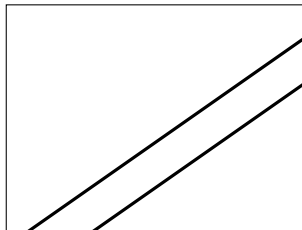
paraabeli



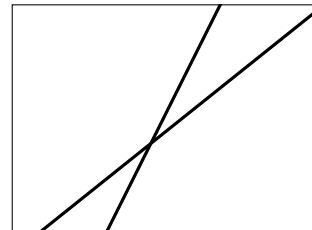
hyperbeli



piste



yhdensuuntaiset suorat



leikkaavat suorat

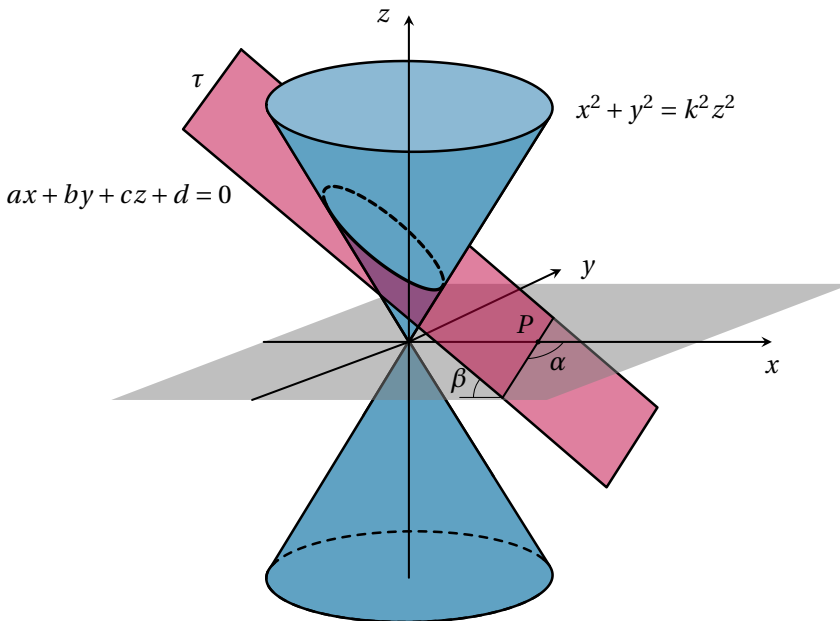


tyhjä

Emme esitä tämän luokittelun todistusta tässä. Todistuksen pääajatuksena olisi, että ristitermin xy kerroin B saadaan muutettua nolaksi sopivalla koordinaatiston kierroilla, minkä jälkeen muuttujia x ja y sisältävät termit voidaan täydentää neliöiksi erikseen. Yksityiskohtaisempi käsittely löytyy esimerkiksi sivustolta [56].

Kartioleikkaukset ovat toisen asteen tasokäyriä

Tarkastellaan vielä analyyttisen geometrian keinoin kolmiulotteista tilannetta, jossa taso τ leikkaa kaksoiskartiota, joka on muodostettu peilaamalla äärettömän suoran ympyräkartion vaippa sen kärkipisteen suhteen. Tason τ yhtälö on yleisessä muodossa $ax + by + cz + d = 0$. Sijoitetaan kaksoiskartion kärki origoon, ja valitaan sen symmetria-akseliksi z -akseli, jolloin kartion xy -tason suuntaiset poikkileikkaukset ovat ympyröitä, joiden yhtälöt ovat muotoa $x^2 + y^2 = r^2$. Säde r kasvaa tasaisesti origosta etäännyttäessä, eli $r = k|z|$, missä k on jokin positiivinen vakio. Koko kaksoiskartion yhtälöksi saadaan siis $x^2 + y^2 = k^2 z^2$.



Tason ja kaksoiskartion leikkauskäyrä saadaan ratkaisemalla näiden pintojen yhtälöiden muodostama yhtälöpari. Koska tason yhtälö on ensimmäistä astetta ja kaksoiskartion yhtälö toista astetta, leikkauskäyrän yhtälö on kolmen muuttujan x , y ja z toisen asteen polynomiyhtälö.

Tehdään kuviolle seuraavat muunnokset:

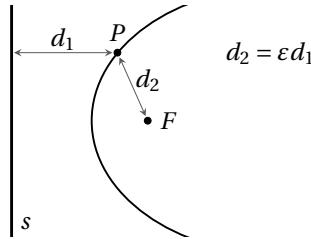
1. Siirretään x -akselin ja tason τ leikkauspiste P origoon.
2. Kierretään kuviota kuvan kulman α verran z -akselin ympäri, jotta tason τ ja xy -tason leikkaussuora kiertyy x -akseliksi.
3. Kierretään kuvan kulman β verran x -akselin ympäri, jotta taso τ kiertyy xy -tasoon.

Näin on saatu leikkauskäyrä siirrettyä xy -tasoon. Koska käytetyt muunnokset eivät nosta polynomiyhtälön astetta, lopputulos on muuttujien x ja y toisen asteen polynomiyhtälö. Kaikki kartioleikkaukset ovat siis toisen asteen tasokäyriä. Kaikki toisen asteen tasokäyrät eivät kuitenkaan ole kartioleikkauksia (tehtävä 72).

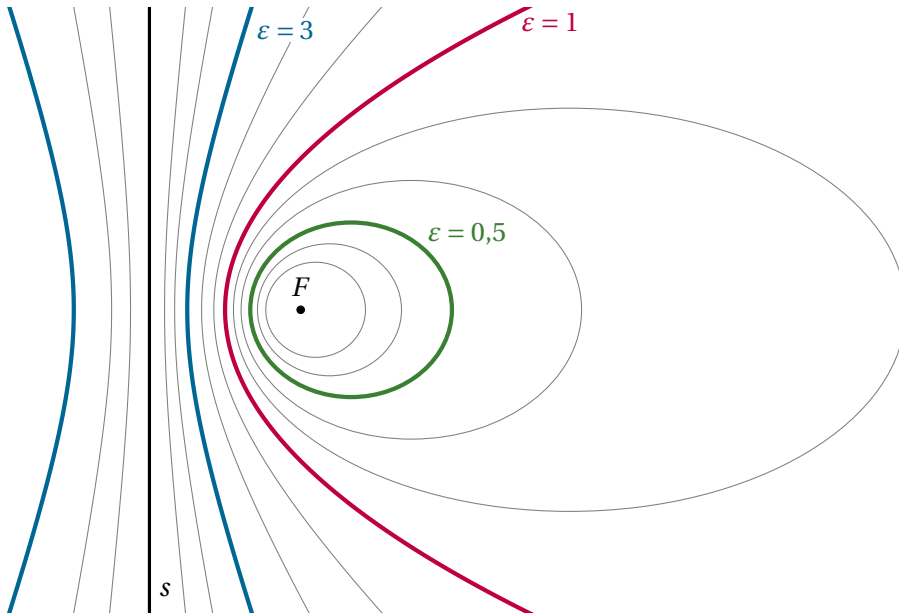
Eksentrisyys

Eksentrisyys tarjoaa miellyttävän yhtenäisen tavan kuvata ellipsejä, hyperbelejä ja paraabeleja, ja toisinaan tämä lähestymistapa valitaankin näiden käyrien määritelmäksi.

Tutkitaan tasokäyrää, jonka jokaisen pisteen P etäisyys kiinteästä polttopisteestä F on ε -kertainen pisteen P etäisyyteen johtosuorasta s verrattuna.



Ehdosta $d_2^2 = \varepsilon^2 d_1^2$ voidaan päätellä, että käyrä on toisen asteen tasokäyrä. Lukua ε kutsutaan käyrän *eksentrisyydeksi*. Kun $\varepsilon = 1$, kyseessä on paraabelin määritelmä. Kun taas $0 < \varepsilon < 1$, syntyvä käyrä on ellipsi, ja kun $\varepsilon > 1$, syntyvä käyrä on hyperbeli. Tämän todistaminen on harjoitustehtävänä 78.



Koska suoran ja sen ulkopuolisen pisteen muodostamat kuviot ovat keskenään yhdenmuotoisia, myös saman eksentrisyyden kartioleikkaukset ovat keskenään yhdenmuotoisia. Käy ilmi, että ellipsin eksentrisyys kuvaa sen polttopisteiden välisen etäisyyden ja isoakselin pituuden suhdetta (tehtävä 79). On siis luontevaa sopia, että ympyrän eksentrisyys on nolla.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 68. Johda ellipsin yhtälö käymällä kynän ja paperin kanssa läpi sivulta 79 alkava todistus, eli osoita, että yhtälö

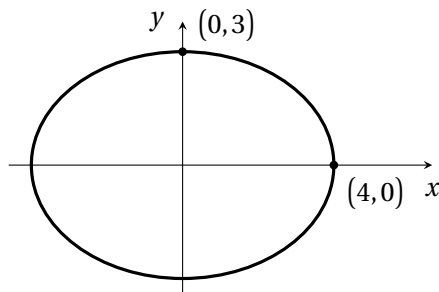
$$\sqrt{(x+f)^2+y^2} + \sqrt{(x-f)^2+y^2} = 2a,$$

missä $a > f > 0$, sievenee muotoon

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Vihje s. 111 →

Tehtävä 69. Origokeskisen ellipsin isoakseli on x -akselilla ja pikkuakseli y -akselilla. Pisteet $(4, 0)$ ja $(0, 3)$ ovat ellipsillä. Mikä on ellipsin yhtälö? Missä ellipsin polttopisteet sijaitsevat?



Vihje s. 111 →

Toinen vihje s. 132 →

Tehtävä 70. Hyperbelin asymptootit ovat $y = 2x$ ja $y = -2x$. Määritä hyperbelin yhtälö, kun hyperbelille kuuluu piste

- a) $(2, 0)$ b) $(0, 2)$.

Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävä 71. Määritä paraabelin yhtälö, kun sen polttopiste on origo ja johtosuora $x + 2y = 5$.

Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävä 72. Vertaa sivun 86 toisen asteen tasokäyriä sivun 87 kuvaan kartioleikkauksista. Minkä tyyppisiä toisen asteen tasokäyriä ei voi esittää kartioleikkauksina? Oletetaan, että kaksoiskartion vaippa jatkuu kumpaankin suuntaan vailla loppua.

Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 133 →

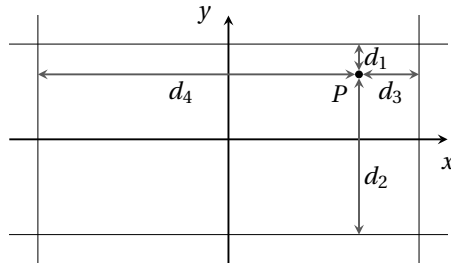
Tehtävä 73. Kirjoita muodossa $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisujoukko on

- a) piste $(2, -3)$
- b) suorat $y = x$ ja $y = -2x + 1$
- c) pelkkä suora $y = x$.

Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 133 →

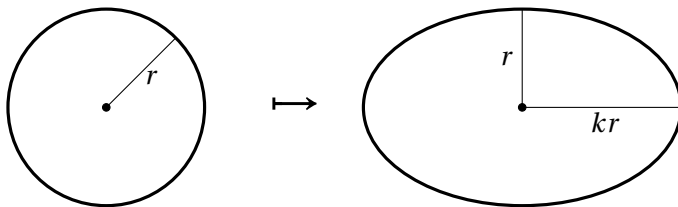
Tehtävä 74. Olkoon P piste, jonka etäisyydet suoriin $y = 1$, $y = -1$, $x = 2$ ja $x = -2$ ovat d_1 , d_2 , d_3 ja d_4 . Minkä kuvion muodostavat sellaiset pisteet P , joille pätee $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 16$?



Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävä 75. Ympyrää venytetään yhdessä suunnassa k -kertaiseksi. Osoita, että lopputulos on ellipsi.



Vihje s. 112 →

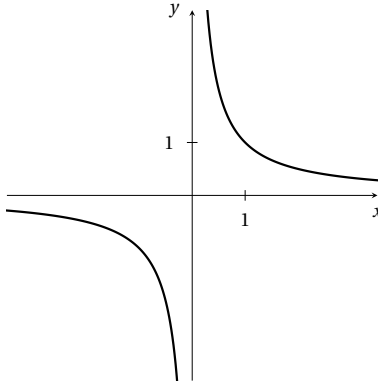
Toinen vihje s. 133 →

Tehtävä 76. Perustele sopivan skaalauksen avulla, että yhtälöiden $y = ax^2$ kuvaamat paraabelit ovat yhdenmuotoisia keskenään, kun a on positiivinen reaaliluku.

Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 134 →

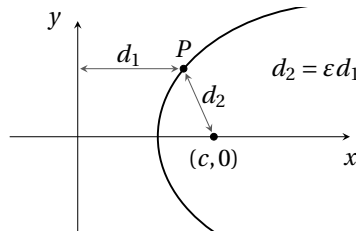
Tehtävä 77. Osoita sopivan koordinaatiston kierron avulla, että käyrä $y = \frac{1}{x}$ on hyperbeli. Kuinka etäällä sen polttopisteet ovat toisistaan?



Vihje s. 112 →

Toinen vihje s. 134 →

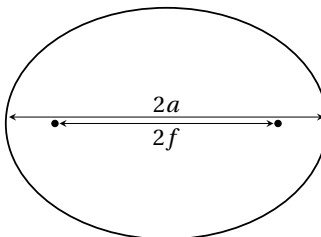
Tehtävä 78. Eksentrisyys. Tutkitaan tasokäyrää, jonka jokaisen pisteen P etäisyys kiinteästä polttopisteestä $F = (c, 0)$ on ε kertaa pisteen P etäisyys y -akselista. Tässä $c \neq 0$ on reaaliluku. Osoita, että kun $0 < \varepsilon < 1$, tasokäyrä on ellipsi, ja kun $\varepsilon > 1$, tasokäyrä on hyperbeli. Missä tasokäyrän keskipiste sijaitsee?



Vihje s. 113 →

Toinen vihje s. 134 →

Tehtävä 79. Jatkoa tehtävään 78. Osoita, että ellipsin, joka ei ole ympyrä, eksentrisyys ε on ellipsin polttopisteiden välisen etäisyyden ja ellipsin isoakselin pituuden suhde, eli $\varepsilon = \frac{2f}{2a} = \frac{f}{a}$. (Tämän vuoksi on luontevaa määritellä, että ympyrälle $\varepsilon = 0$.)



Vihje s. 113 →

Toinen vihje s. 135 →

Tehtävä 80. Paraabelin johtosuoran mielivaltaisesta pisteestä piirretään paraabelille tangentit. Osoita, että tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

Vihje s. 113 →

Toinen vihje s. 135 →

Tehtävä 81. Olkoon p nollasta poikkeava reaalityyppinen luku, piste $A = (-4p, 0)$, sekä P ja Q paraabelin $2px = y^2$ pisteet, jotka sijaitsevat paraabelin akselin suhteen symmetrisesti. Kun pistepari P ja Q liikkuu, suorien OP ja AQ leikkauspiste liikkuu erästä käyrää pitkin. Mikä on tämän käyrän yhtälö? Voidaan tulkita, että kun $P = Q = O$, myös leikkauspiste on O .

Vihje s. 113 →

Toinen vihje s. 135 →

Tehtävä 82. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoimessa sarjassa syksyllä 2000 oli tehtävä

$$\text{Millä reaaliluvuilla } x:n \text{ ja } y:n \text{ arvoilla } 5x^2 - 5y^2 - 24xy + 11y + 3x - 2 = 0?$$

Ratkaise tehtävä ilman teknisiä apuvälineitä.

Vihje s. 114 →

Toinen vihje s. 136 →

Tehtävä 83. Tasossa on ympyrä $x^2 + y^2 = r^2$, missä $r > 0$, ja piste $A = (a, 0)$, missä $a \in \mathbb{R}$. Piste P on jokin ympyrän kehän piste, piste Q sen peilikuva y -akselin suhteen ja O on origo. Millä käyrällä suorien OP ja AQ leikkauspiste liikkuu, kun piste P kulkee ympyrän kehällä? Tarkastele eri tapaukset sen mukaan, missä piste A sijaitsee x -akselilla. Oletetaan, että piste P ei käy x -akselilla, koska yksikäsitteistä leikkauspistettä ei tällöin muodostu.

Vihje s. 114 →

Toinen vihje s. 136 →

Liitteet

Liite A: Todistukset Nesbittin epäyhtälön 4, 5 ja 6 muuttujan versioille Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä

Lause. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Todistus. Aloitamme käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, jonka nojalla voimme arvioida

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \right) \cdot (a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)) \geq (a+b+c+d)^2.$$

Koska kahdelle reaaliluvulle x ja y aina pätee

$$(x-y)^2 \geq 0,$$

on oltava

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Tällä kahden muuttujan aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä voimme arvioida termeittäin, että

$$\begin{aligned} & ab + ac + bc + bd + cd + ca + da + db \\ & \leq ab + \frac{a^2 + c^2}{2} + bc + \frac{b^2 + d^2}{2} + cd + ca + da + db \\ & = \frac{1}{2} (a+b+c+d)^2. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä aiempaan arvioon ja sieventämällä saamme toivomamme epäyhtälön

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Lause. Olkoot a, b, c, d ja e positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Todistus. Aloitamme arvioimalla ensin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \\ \geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+a) + e(a+b)}. \end{aligned}$$

Kertomalla neliö $(a+b+c+d+e)^2$ auki voimme jatkaa

$$= 2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{ab + ac + \dots + eb}.$$

Riittää siis todistaa, että

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq ab + ac + bc + bd + cd + ce + de + da + ea + eb.$$

Mutta tämän voi tehdä helposti vaikkapa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä käyttäen, koska senhän mukaan

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ = \sqrt{a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + d^2 + d^2 + e^2 + e^2} \\ \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + c^2 + d^2 + d^2 + e^2 + e^2 + a^2 + a^2 + b^2} \\ \geq ab + ac + bc + bd + cd + ce + de + da + ea + eb. \end{aligned}$$

Lause. Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Todistus. Aloitamme soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä niin, että ikäviltä tuntuvat nimittäjät supistuvat pois:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \right) \\ & \quad \cdot \left(a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b) \right) \\ & \geq (a+b+c+d+e+f)^2 \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2ad + 2be + 2cf \\ & \quad + 2ab + 2ac + 2ae + 2af + 2bc + 2bd + 2bf \\ & \quad + 2cd + 2ce + 2de + 2df + 2ef \\ & = (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ & \quad + 2(a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b)). \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \\ & \geq 2 + \frac{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}{a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b)}. \end{aligned}$$

Riittää siten osoittaa, että

$$(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \geq a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b).$$

Mutta soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä näemme, että

$$\begin{aligned} & (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ & = \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2} \cdot \sqrt{(b+e)^2 + (c+f)^2 + (a+d)^2} \\ & \geq (a+d)(b+e) + (b+e)(c+f) + (c+f)(a+d) \\ & = ab + ae + db + de + bc + bf + ec + ef + ca + cd + fa + fd \\ & = a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b), \end{aligned}$$

ja olemme valmiit.

Ensimmäiset vihjeet

Tehtävän 1 vihje. Koiran suurin ongelma taitaa liittyä sen ruoansulatuskanavaan, joka halkaisee koiraparan kahteen erilliseen palaan! Muitakin ongelmia löytyy.

← Tehtävä s. 12

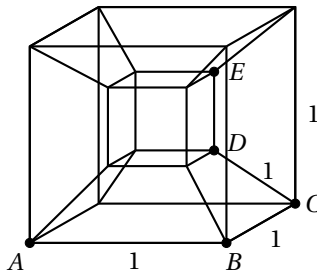
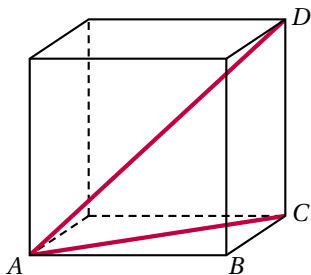
Toinen vihje s. 115 →

Tehtävän 2 vihje. Kuution osien lukumäärät lienee helpointa laskea yksitellen kuvan avulla. Hyperkuution tapauksessa kannattaa hyödyntää sivulla 8 esitettyä ajatusta: kuinka paljon mitäkin osaa tulee lisää, kun kuvio tai kappale liikkuu uuteen ulottuvuuteen?

← Tehtävä s. 12

Toinen vihje s. 115 →

Tehtävän 3 vihje. a) Kuution pohja on neliö, ja sen sivu on 1, joten pohjan lävistäjän AC pituus on $\sqrt{2}$. Kuution särmä DC on kohtisuorassa pohjaa vasten, joten kolmio ACD on suorakulmainen, ja avaruuslävistäjän AD pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseella.

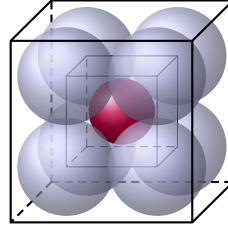
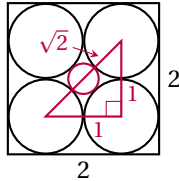


b) Voisiko apujanoista AC ja AD olla hyötyä myös hyperkuution tapauksessa? Oikeanpuoleisen kuvan pisteet A, B, C ja D kuuluvat nimittäin samaan reunakuution.

← Tehtävä s. 13

Toinen vihje s. 115 →

Tehtävän 4 vihje. a) Neljän alkuperäisen ympyrän keskipisteet muodostavat neliön, jonka sivu on 1. Tämän neliön lävistäjä jakautuu osiin, joiden pituudet ovat kysytty halkaisija d , $1/2$ ja $1/2$. Saatko vastaukseksi $d = \sqrt{2} - 1$?



b) Voisiko kahdeksan pallon keskipisteiden virittämästä kuutiosta olla apua?

← Tehtävä s. 13

Toinen vihje s. 116 →

Tehtävän 5 vihje. Ristillä on siirto, jonka jälkeen kaksi eri voittoriviä on yhden siirron päässä valmiista.

← Tehtävä s. 14

Toinen vihje s. 116 →

Tehtävän 6 vihje. Jokaiselle kärkipisteelle löytyy pari hyperkuution toiselta puolelta täsmälleen yksi piste, jossa koordinaatit ovat vastakkaiset. Esimerkiksi pisteen $(1, 0, 1, 1)$ pari on $(0, 1, 0, 0)$. Kuinka monta kärkeä hyperkuutiolla onkaan?

Voit tarkistaa vastauksen lukuarvon toisesta vihjeestä.

← Tehtävä s. 22

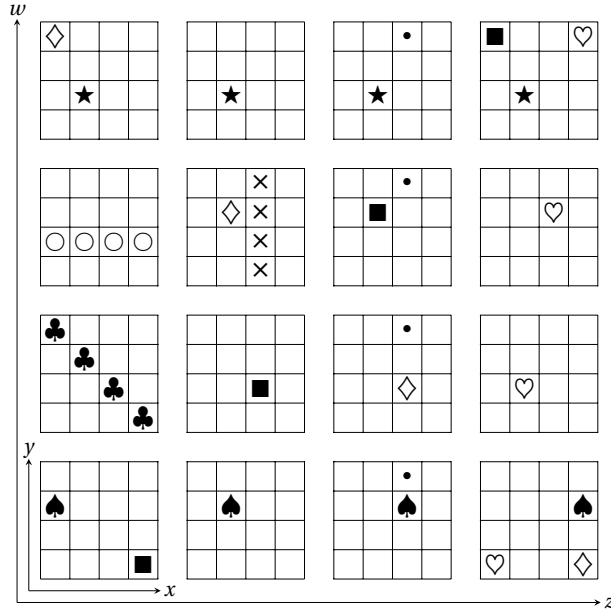
Toinen vihje s. 116 →

Tehtävän 7 vihje. Koska tällaisen hyperkuution kaikkien kärkien koordinaatit koostuvat ykkösistä ja nolista, siirtymä vastakkaiseen kärkeen on kunkin koordinaatin osalta $+1$ tai -1 . Esimerkiksi kärkeä $(0, 0, 0, 1)$ ja $(1, 1, 1, 0)$ yhdistää vektori $(1, 1, 1, -1)$ ja kärkeä $(1, 1, 0, 0)$ ja $(0, 0, 1, 1)$ vektori $(-1, -1, 1, 1)$. Vektorit ovat siis muotoa $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, missä kaikki merkit voi valita toisistaan riippumatta. Kuinka pitkiä tällaiset vektorit ovat?

← Tehtävä s. 22

Toinen vihje s. 117 →

Tehtävän 8 vihje. Käytetään yksittäisten ruutujen (x, y, z, w) koordinaatteja tehtävänannon ehdotuksen mukaisesti siten, että x ja y kuvaavat merkin paikkaa pikkuruudukossa ja z sekä w sitä, missä pikkuruudukossa ollaan. Tarkastellaan, millaisia voittorivien koordinaatit ovat. Seuraavassa kuvassa jokainen samojen symbolien nelikko muodostaa erään voittorivin.



Osassa voittorivejä muuttuu vain yksi koordinaatti ($\circ$, $\times$, $\star$, $\bullet$), osassa kaksi ($\spadesuit$, $\clubsuit$), osassa kolme ($\heartsuit$) ja osassa kaikki neljä koordinaattia ($\blacksquare$, $\diamond$). Esimerkiksi $\clubsuit$ -symboleihin merkityn voittorivin (x, y, z, w) -koordinaatit ovat

(1, 4, 1, 2)

(2, 3, 1, 2)

(3, 2, 1, 2)

(4, 1, 1, 2).

Voisi olla hedelmällistä ajatella, kuinka monta eri vaihtoehtoa voittorivin kullekin sarakkeelle on.

← Tehtävä s. 22

Toinen vihje s. 117 →

Tehtävän 9 vihje. Mitä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö sanookaan pistetulosta $ab + bc + ca$?

← Tehtävä s. 27

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävän 10 vihje. Mitä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö sanookaan pistetulosta

$$a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2?$$

← Tehtävä s. 27

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävän 11 vihje. Tässä tehtävässä voisi vaikkapa tarkastella tuloa

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \left((b+c) + (c+a) + (a+b) \right).$$

← Tehtävä s. 27

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävän 12 vihje. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a \cdot 1 + b \cdot 1)^2 = (a + b)^2,$$

eli

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}.$$

← Tehtävä s. 27

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävän 13 vihje. Tässä voisi olla hyödyllistä kirjoittaa vasemman puolen summalauseke $a + b + c$ muodossa

$$a\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + b\sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + c\sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

← Tehtävä s. 27

Toinen vihje s. 118 →

Tehtävän 14 vihje. Todistettavan epäyhtälön oikean puolen voi kirjoittaa muodossa

$$\left((\sqrt{a_1})^2 + \dots + (\sqrt{a_n})^2 \right) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)^2 \right).$$

← Tehtävä s. 27

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävän 15 vihje. Mitä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö sanookaan lausekkeesta

$$\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \right)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{b_1})^2 + (\sqrt{b_2})^2 + \dots + (\sqrt{b_n})^2 \right)?$$

← Tehtävä s. 28

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävän 16 vihje. Todistettavan epäyhtälön vasemman puolen voi kirjoittaa muodossa

$$xy \cdot zx + yz \cdot xy + zx \cdot yz.$$

← Tehtävä s. 28

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävän 17 vihje. Tässä voi aloittaa kirjoittamalla vasemman puolen muodossa

$$1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z.$$

← Tehtävä s. 28

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävän 18 vihje. Tässä voi vaikkapa aloittaa kirjoittamalla vasemman puolen muodossa

$$1 \cdot \sqrt{x+y} + 1 \cdot \sqrt{y+z} + 1 \cdot \sqrt{z+x}.$$

← Tehtävä s. 28

Toinen vihje s. 119 →

Tehtävän 19 vihje. Todistettavan epäyhtälön oikean puolen voi kirjoittaa muodossa

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}.$$

← Tehtävä s. 28

Toinen vihje s. 120 →

Tehtävän 20 vihje. Tässä voi soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä tuloon

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \right) (a + b + c + d).$$

← Tehtävä s. 28

Toinen vihje s. 120 →

Tehtävän 21 vihje. Tässä voi vaikkapa aloittaa kirjoittamalla polynomin $P(x)$ summana

$$P(x) = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} x^{\ell},$$

missä n on epänegatiivinen kokonaisluku, ja kertoimet $a_0, a_1, \dots, a_n$ ovat kaikki epänegatiivisia reaalilukuja.

← Tehtävä s. 29

Toinen vihje s. 120 →

Tehtävän 22 vihje. Tässä voisi tarkastella pistetuloa

$$\sqrt{\frac{x}{ay+bz}} \cdot \sqrt{x(ay+bz)} + \sqrt{\frac{y}{az+bx}} \cdot \sqrt{y(az+bx)} + \sqrt{\frac{z}{ax+by}} \cdot \sqrt{z(ax+by)}.$$

← Tehtävä s. 29

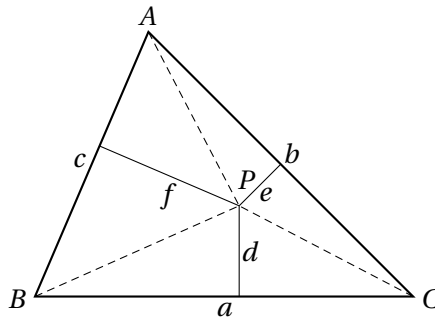
Toinen vihje s. 120 →

Tehtävän 23 vihje. Jos kolmion sivuja merkitään a , b ja c , ja jos A on 1-sivuisen säännöllisen viisikulmion ala, niin mikä onkaan kuvion kolmen viisikulmion alojen summa? (Tässä ei siis tarvitse tietää tarkkaa kaavaa säännöllisen viisikulmion alalle.) Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö voisi olla tässä hyödyllinen.

← Tehtävä s. 29

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävän 24 vihje. Tässä voisi aloittaa perustelemalla, että summa $ad + be + cf$ on vakio. Miten?



← Tehtävä s. 30

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävän 25 vihje. Mitä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä voisi päätellä pistetulosta

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1?$$

← Tehtävä s. 30

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävän 26 vihje. Jos kirjoittaa todistuksen aritmeettis-kvadraattiselle epäyhtälölle Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöön sopivasti tukeutuen, voi yhtäsuuruusehdon johtaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehdosta.

← Tehtävä s. 30

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävän 27 vihje. Tässä voisi vaikkapa aloittaa kirjoittamalla

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 + 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) + |\bar{b}|^2.$$

← Tehtävä s. 32

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävän 28 vihje. Todistettaessa edellisen tehtävän tulos sen vihjeessä 2 ehdotetulla tavalla voi hyödyntää Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehtoa.

← Tehtävä s. 32

Toinen vihje s. 121 →

Tehtävän 29 vihje. Tässä voisi tarkastella vektoreita (x, y) , (y, z) ja (z, x) , ja soveltaa kolmioepäyhtälöä kahdesti.

← Tehtävä s. 32

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävän 30 vihje. Tässä voisi aloittaa kirjoittamalla

$$x\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + x^2}.$$

← Tehtävä s. 32

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävän 31 vihje. Tässä oikealla puolella suoraan onkin neliöjuuria, joiden alla on kummassakin kolmen neliön summa.

← Tehtävä s. 32

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävän 32 vihje. Koska

$$a^3 - b^3 - c^3 = a^2 \cdot a - b^2 \cdot b - c^2 \cdot c,$$

voisi harkita sitä, että valitsisi käänteisen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön muotoilussa yllä

$$t = a^2, \quad u = a, \quad \bar{x} = (b^2, c^2), \quad \text{ja} \quad \bar{y} = (b, c).$$

← Tehtävä s. 37

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävän 33 vihje. Osoittautuu, että tässä voi soveltaa edellisen tehtävän epäyhtälöä

$$(a^3 - b^3 - c^3)^2 \geq (a^4 - b^4 - c^4)(a^2 - b^2 - c^2),$$

sekä samassa hengessä todistettavissa olevaa arviota

$$\begin{aligned}(a^4 - b^4 - c^4)^2 &= (a^{5/2} \cdot a^{3/2} - b^{5/2} \cdot b^{3/2} - c^{5/2} \cdot c^{3/2})^2 \\ &\geq \left((a^{5/2})^2 - (b^{5/2})^2 - (c^{5/2})^2 \right) \left((a^{3/2})^2 - (b^{3/2})^2 - (c^{3/2})^2 \right) \\ &= (a^5 - b^5 - c^5)(a^3 - b^3 - c^3).\end{aligned}$$

Mitä muuttujilta a , b ja c vaaditaan näihin arvioihin?

← Tehtävä s. 37

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävän 34 vihje. Tehtävää voisi lähestyä siten, että todistettavan epäyhtälön molemmat puolet neliöidään, ja sitten sievennetään saatua yhtäpitävää epäyhtälöä. Arvion $(t + u)^2 > |\bar{x} + \bar{y}|^2$ todistamisen voi aloittaa vaikkapa arviolla

$$0 < (t^2 - |\bar{x}|^2) + (u^2 - |\bar{y}|^2) + (2tu - 2\bar{x} \cdot \bar{y}).$$

← Tehtävä s. 37

Toinen vihje s. 122 →

Tehtävän 35 vihje. Yhteenlaskettavia on viisi, joista ensimmäinen on 1^2 ja viimeinen 5^2 .

← Tehtävä s. 42

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävän 36 vihje. Ensimmäisessä summassa kaikki termit ovat viidellä jaollisia, eli muotoa $5k$. Millä luvun k arvoilla saadaan oikeat termit?

← Tehtävä s. 42

Toinen vihje s. 123 →

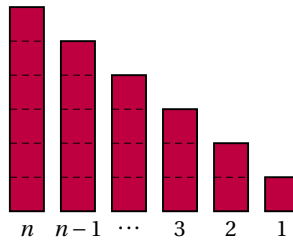
Tehtävän 37 vihje. Tavallinen (eli aritmeettinen) keskiarvo on lukujen summa jaettuna niiden lukumäärällä, eli luvulla n . Keskiarvo ilman summamerkintää on siis

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

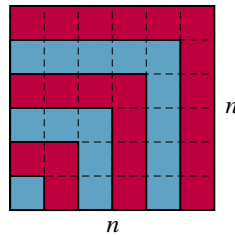
← Tehtävä s. 42

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävän 38 vihje. Jos jokaisen pikkuneliön ala on yksi, punaisen pylväskuvion pinta-ala vastaa summaa $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$.



Toisen summan osalta voi todeta, että vasemmasta alakulmasta alkaen värillisissä raidoissa on pikkuneliötä $1, 3, 5, \dots$ kappaletta. Miksi n pikkuneliön levyisen neliön viimeisessä raidassa on $2n-1$ pikkuneliötä?



← Tehtävä s. 42

Toinen vihje s. 123 →

Tehtävän 39 vihje. Voisi olla eduksi kirjoittaa summat auki esimerkiksi tapauksissa $n = 2$ ja $n = 3$.

← Tehtävä s. 43

Toinen vihje s. 124 →

Tehtävän 40 vihje. Kummassakin summassa on 1000 termiä. Jos summien indeksoinnit alkaisivat samasta luvusta, summat voisi yhdistää. Koska indeksi k alkaa luvusta 1 ja indeksi m luvusta 0, luontevaa olisi tehdä muutos $k = m + 1$ jompaankumpaan summista.

← Tehtävä s. 43

Toinen vihje s. 124 →

Tehtävän 41 vihje. Neljännessä sarakkeessa luvut a_{ij} ovat muotoa a_{i4} . On siis summattava indeksin i arvojen 1, 2, 3 ja 4 yli.

← Tehtävä s. 43

Toinen vihje s. 124 →

Tehtävän 42 vihje. Voisi olla eduksi laskea lausekkeiden $\frac{1}{4k-2}$ ja $\frac{1}{4k+2}$ arvoja pienillä luvun k arvoilla. Miten summa sievenee?

← Tehtävä s. 44

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävän 43 vihje. Tämä tehtävä muistuttaa varsin paljon tehtävää 42.

← Tehtävä s. 44

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävän 44 vihje. Summamerkintä tarkoittaa tässä summaa

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Voisi olla viisasta tarkistaa ensin, että tämä summa ja lauseke $\frac{n(n+1)}{2}$ saavat saman arvon, kun $n = 1$. Silloin ”summassa” on vain yksi termi!

← Tehtävä s. 44

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävän 45 vihje. Tällä tehtävällä on paljon yhteistä tehtävän 44 kanssa. Matkan varrella sievennyksistä

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = n \left(\frac{(n-1)(2n-1)}{6} + n \right)$$

sekä $2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$ voi olla hyötyä. Tämän viimeisen yhtäsuuruuden voi perustella kertomalla sulut auki.

← Tehtävä s. 44

Tehtävän 46 vihje. Laskun voi tehdä seuraillen sivulta 5 alkavaa esimerkkiä: lasketaan keskiarvot, muodostetaan vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sekä lasketaan korrelaatio

kaavalla $r = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|}$. Voit tarkistaa oikean tuloksen toisesta vihjeestä.

← Tehtävä s. 49

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävän 47 vihje. Data voidaan kopioida pdf-tiedostosta taulukkolaskentaohjelmaan, kuten esimerkiksi ohjelmaan LibreOffice Calc [10]. Kokonainen rivi kopioituu todennäköisesti aina yhteen soluun. Tiedot saa jaettua soluihin komennolla Tiedot > Teksti sarakkeiksi... > Erottimena > Väli Vastaavat komennot löytyvät esimerkiksi ohjelmista Microsoft Excel [32] ja Google

Sheets [19]. Kaksiosaiset valtioiden nimet voivat sotkea asettelua, joten tietoja saattaa joutua hieman järjestelemään käsin.

← Tehtävä s. 49

Toinen vihje s. 125 →

Tehtävän 48 vihje. Koska pisteet (x_i, y_i) ovat suoralla, voit olettaa, että jokaiselle indeksille i pätee $y_i = kx_i + b$, missä k ja b ovat reaalilukuja ja $k \neq 0$.

← Tehtävä s. 50

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävän 49 vihje. Jos korrelaatio on $r = 1$, mikä on vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma? Entä kun $r = -1$?

← Tehtävä s. 50

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävän 50 vihje. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan pätee

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|.$$

Tämä on selvästi sukua väitteelle, jota ollaan todistamassa.

← Tehtävä s. 50

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävän 51 vihje. Taulukkolaskentaohjelmista löytyy komennot satunnaislukujen luomiseen sekä muuhun tämän tehtävän kannalta tarpeelliseen.

Kirjoitushetkellä suosittuja taulukkolaskentaohjelmistoja ovat Microsoft Excel [32], LibreOffice Calc [10] sekä Google Sheets [19]. Näiden kaikkien suomenkielisistä versioista löytyvät esimerkiksi komennot `SATUNNAISLUKU()`, `KORRELAATIO()`, `ITSEISARVO()` ja `KESKIARVO()`.

Ohjelmointikielistä esimerkiksi Python soveltuu tähän tehtävään hyvin. Satunnaislukuja löytyy paketista `random` esimerkiksi komennolla `random.random()` ja kahden listan välisen Pearsonin korrelaatiokertoimen voi laskea paketin `scipy` komennolla `scipy.stats.pearsonr(lista1, lista2)[0]`.

← Tehtävä s. 51

Toinen vihje s. 126 →

Tehtävän 52 vihje. Punaisen koordinaatit ovat $(255, 0, 0)$ ja keltaisen $(255, 255, 0)$. Ehkäpä keskiarvoista voisi olla hyötyä?

← Tehtävä s. 59

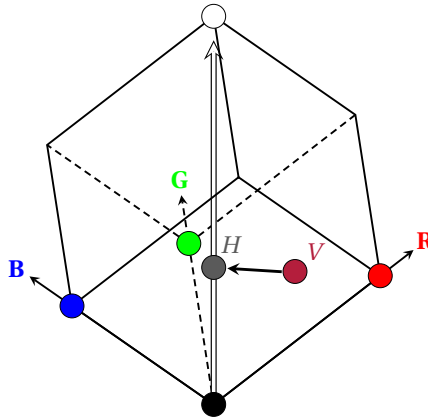
Toinen vihje s. 127 →

Tehtävän 53 vihje. Miten värin paikka RGB-kuutiossa muuttuu, jos sen kaikkiin koordinaatteihin lisätään sama vakio? Miten esimerkiksi värit (100, 150, 200) ja (110, 160, 210) sijaitsevat toisiinsa nähden?

← Tehtävä s. 59

Toinen vihje s. 128 →

Tehtävän 54 vihje. Olkoon yhden pikselin alkuperäinen väri $V = (R, G, B)$ ja sen korvaavan pikselin väri $H = \left(\frac{R+G+B}{3}, \frac{R+G+B}{3}, \frac{R+G+B}{3}\right)$. Jos $V = H$, kaikki on selvää, joten oletetaan, että $V \neq H$. Voisi olla eduksi valita suunnat jälleen niin, että RGB-kuution harmaa-akseli on pystysuorassa. Tällöin riittäisi osoittaa, että pisteet V ja H sijaitsevat yhtä korkealla.



Tehtävästä 53 ja erityisesti sen toisesta vihjeestä sivulla 128 voisi löytyä käyttökelpoisia ideoita.

← Tehtävä s. 60

Toinen vihje s. 128 →

Tehtävän 55 vihje. Voisi olla eduksi ensin selvittää, mikä on väriä $V = (100, 150, 200)$ lähin harmaa-akselin piste.

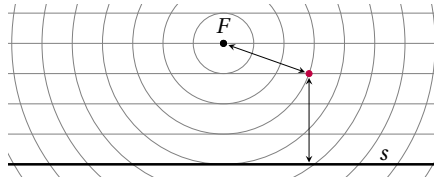
← Tehtävä s. 60

Toinen vihje s. 129 →

Tehtävän 56 vihje. Tarvitaan kaksi tolppaa ja riittävän pitkä naru. Vaan miten vuohen kaulapanta tulisi kiinnittää naruun?

← Tehtävä s. 74

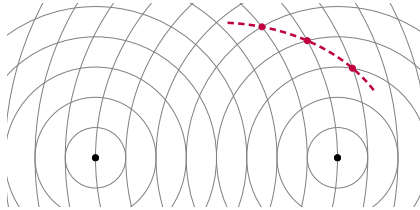
Tehtävän 57 vihje. Tulisi etsiä pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta ja polttopisteestä. Niitä löytyy ympyröiden ja suorien leikkauspisteistä.



← Tehtävä s. 74

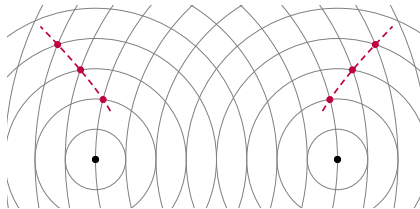
Toinen vihje s. 129 →

Tehtävän 58 vihje. Ellipsin kehän pisteestä polttopisteisiin laskettujen etäisyyksien summa on vakio, joten aina kun siirrytään ympyrältä toiselle kohti yhtä polttopistettä, täytyy siirtyä kauemmas toisesta polttopisteestä.



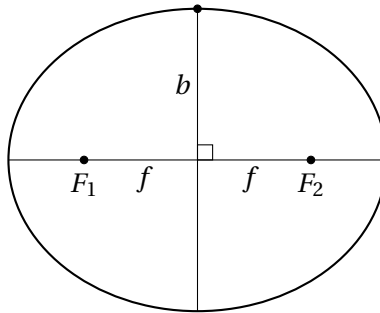
← Tehtävä s. 74

Tehtävän 59 vihje. Hyperbelin pisteestä polttopisteisiin laskettujen etäisyyksien erotus on vakio, joten aina kun siirrytään poispäin yhdestä polttopisteestä, täytyy siirtyä yhtä paljon poispäin toisesta polttopisteestä. Hyperbelin kuvaaja koostuu kahdesta erillisestä osasta.



← Tehtävä s. 74

Tehtävän 60 vihje. Voisi olla hyödyllistä tarkastella pistettä, jossa pikkuakseli leikkaa ellipsin kehän.



← Tehtävä s. 75

Toinen vihje s. 130 →

Tehtävän 61 vihje. Voisi olla eduksi verrata ellipsin sisäpistettä S sopivaan ellipsin kehän pisteeseen.

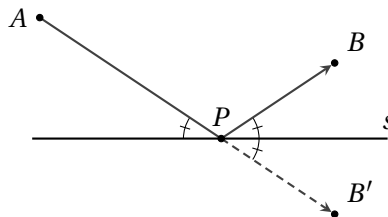
← Tehtävä s. 75

Toinen vihje s. 130 →

Tehtävän 62 vihje. Kyseessä ovat jossakin järjestyksessä suora peili, paraabeli, ellipsi ja hyperbeli. Mitkä näiden käyrien optiset ominaisuudet olivatkaan?

← Tehtävä s. 75

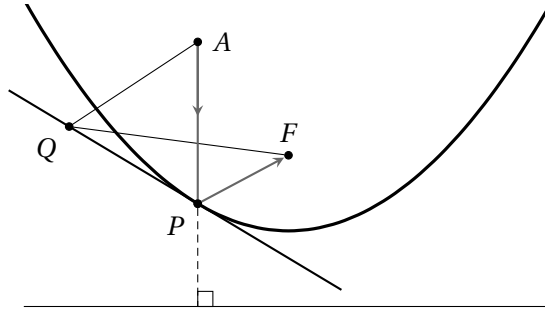
Tehtävän 63 vihje. Olisi taas eduksi tarkastella pisteen B peilikuvaa suoran s suhteen.



← Tehtävä s. 76

Toinen vihje s. 130 →

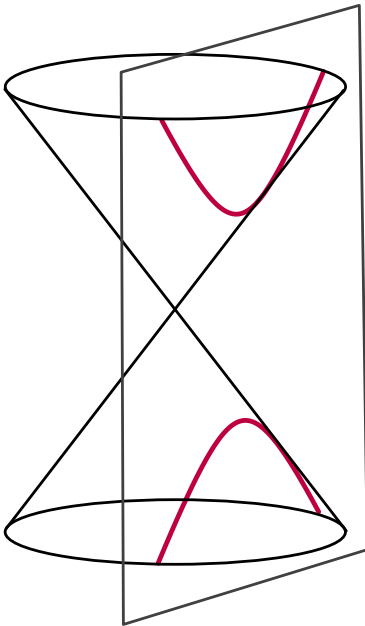
Tehtävän 64 vihje. Olkoon A piste paraabelin aukeamassa ja P sellainen piste paraabelilla, että suora AP leikkaa paraabelin johtosuoran kohtisuorasti. Piirretään paraabelille tangentti pisteen P kautta. Olkoon Q jonkin tangentin piste, joka ei ole P . Tavoitteena olisi osoittaa, että polttopisteeseen F kulkevista reiteistä APF on lyhyempi kuin AQF .



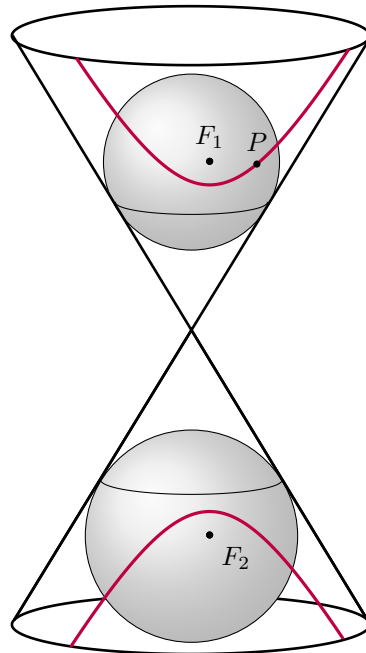
← Tehtävä s. 76

Toinen vihje s. 131 →

Tehtävän 65 vihje. Pallot kannattaa asetella niin, että ne sivuavat kartion pintaa ympyrää pitkin ja sivuavat leikkaavaa tasoa yksittäisissä pisteissä F_1 ja F_2 . Voitaisiin pyrkiä osoittamaan, että kun pistettä F_1 lähemmästä leikkauskäyrän haarasta valitaan mielivaltainen piste P , etäisyyksien erotus $PF_2 - PF_1$ on vakio.

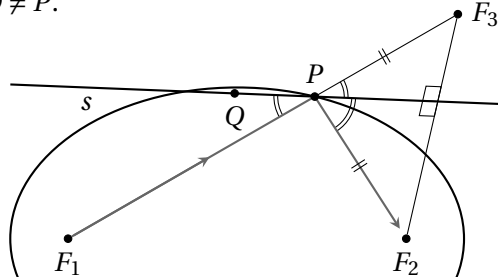


← Tehtävä s. 76



Toinen vihje s. 131 →

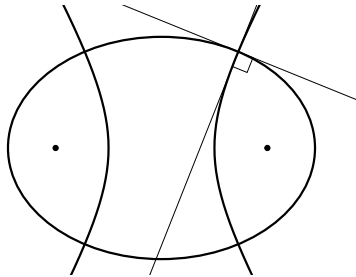
Tehtävän 66 vihje. Tehtävänannon kuvan perusteella väite tuntuu uskottavalta. Voidaan piirtää vääristynyt mallikuva, jossa kulmanpuolittaja s ei näytä tangentilta. Tämä voi auttaa välttämään perustelemattomia oletuksia. Tulisi osoittaa, että kuvan mukaisia pisteitä Q ei ole olemassa, vaan suoran s piste Q on ellipsin ulkopuolella, kun $Q \neq P$.



← Tehtävä s. 77

Toinen vihje s. 132 →

Tehtävän 67 vihje. Riittää tarkastella yhtä ellipsiä ja yhtä hyperbeliä. Käyrien välinen kulma määritellään tangenttien avulla, joten tulisi todistaa, että leikkauspisteeseen piirretyt ellipsin ja hyperbelin tangentit ovat kohtisuorat.



← Tehtävä s. 77

Toinen vihje s. 132 →

Tehtävän 68 vihje. Yhtälön voi ratkaista montaa eri reittiä, mutta valitettavasti ne eivät ole sen mukavampia kuin sivulla 79 esitelty. Esimerkiksi suora neliöinti $(d_1 + d_2)^2 = (2a)^2$ johtaa muotoon $d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 = 4a^2$, jossa ristitermissä $2d_1d_2$ on yhä neliöjuuria.

← Tehtävä s. 89

Tehtävän 69 vihje. Origokeskisen ellipsin yhtälö on muotoa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kun ellipsin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Mitkä ovat nyt a ja b ?

Mikä olikaan ellipsin isoakselin pituutta, pikkuakselin pituutta ja polttopisteiden välimatkaa yhdistävä yhtälö?

← Tehtävä s. 89

Toinen vihje s. 132 →

Tehtävän 70 vihje. Asymptooteista voi päätellä, että hyperbelin symmetria-akselit ovat x -akseli ja y -akseli. Hyperbelin yhtälö on siis muotoa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tapauksessa, jossa hyperbeli aukeaa sivusuunnassa.

← Tehtävä s. 89

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävän 71 vihje. Lienee yksinkertaisinta lähteä liikkeelle suoraan paraabelin geometrisesta määritelmästä.

← Tehtävä s. 89

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävän 72 vihje. Sivulla 86 esitellyistä seitsemästä tasokäyrätyypistä viisi on esitettävissä kartioleikkauksina ja kaksi ei.

← Tehtävä s. 89

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävän 73 vihje.

- a) Yhtälöllä $x^2 = 0$ on vain yksi ratkaisu, kun $x \in \mathbb{R}$.
- b) Suorien yhtälöt voisi kirjoittaa muodoissa $y - x = 0$ ja $y + 2x - 1 = 0$.

← Tehtävä s. 90

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävän 74 vihje. Määrittelyehtoon $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 16$ voisi sijoittaa käyrän mielivaltaisen pisteen $P = (x, y)$ koordinaatit ja pyrkiä sieventämään.

← Tehtävä s. 90

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävän 75 vihje. Ympyrän voisi sijoittaa koordinaatistoon niin, että sen keskipiste on origossa. Jos ympyrää venytetään esimerkiksi x -akselin suunnassa, miten sen yhtälö muuttuu?

← Tehtävä s. 90

Toinen vihje s. 133 →

Tehtävän 76 vihje. Skaalauksen mittakaavaksi voisi valita parametrin, kuten k , ja valita sille sopivan arvon vasta sieventämisen jälkeen.

← Tehtävä s. 90

Toinen vihje s. 134 →

Tehtävän 77 vihje. Käyrää voisi kiertää esimerkiksi 45° myötäpäivään. Tähän hyödyllisiä kaavoja löytyy sivulta 84.

← Tehtävä s. 91

Toinen vihje s. 134 →

Tehtävän 78 vihje. Jos merkitään $P = (x, y)$, ehdosta $d_2 = \varepsilon d_1$ saadaan yhtälö

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon|x|.$$

Tämä tulisi pyrkiä muokkaamaan muotoon

$$\frac{(x-p)^2}{q} + \frac{y^2}{r} = 1,$$

missä p , q ja r ovat parametreista c ja ε riippuvia lausekkeita.

← Tehtävä s. 91

Toinen vihje s. 134 →

Tehtävän 79 vihje. Mitä tehtävässä 78 saatiinkaan selville suhteesta b^2/a^2 ? Tuloksen voi tarkistaa kyseisen tehtävän toisesta vihjeestä sivulta 134.

← Tehtävä s. 91

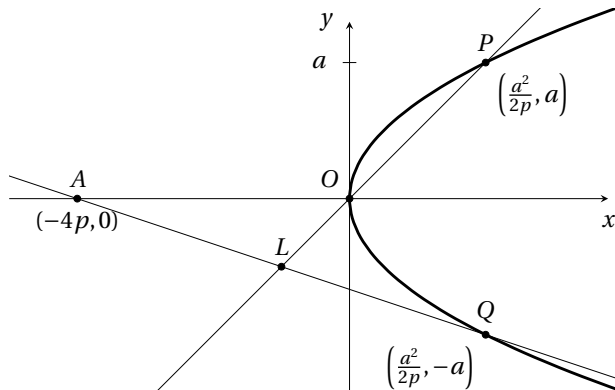
Toinen vihje s. 135 →

Tehtävän 80 vihje. Kaikki paraabelit ovat yhdenmuotoisia, joten riittää tarkastella yhtä paraabelia, esimerkiksi paraabelia $y = x^2$, jonka johtosuora on $y = -1/4$.

← Tehtävä s. 92

Toinen vihje s. 135 →

Tehtävän 81 vihje. Kun $p > 0$ ja $a > 0$, tilanne voisi näyttää tältä:



Kuvassa on merkitty pisteen P y -koordinaattia luvulla a , jolloin yhtälöstä $2px = y^2$ saadaan pisteen P x -koordinaatiksi $x = \frac{a^2}{2p}$. Nyt tulisi selvittää suorien OP ja AQ leikkauspiste L .

← Tehtävä s. 92

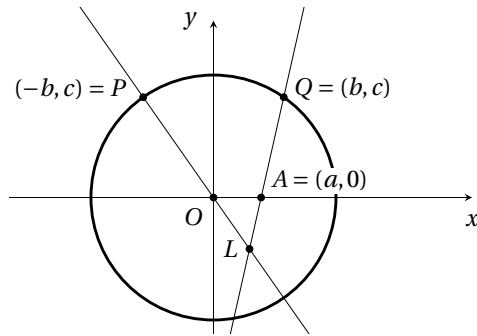
Toinen vihje s. 135 →

Tehtävän 82 vihje. Tehtävän voi ratkaista lyhyesti, jos yhtälön vasenta puolta onnistuu sieventämään sopivasti. Jos tämä ei kuitenkaan onnistu, voidaan käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa ja ratkaista y .

← Tehtävä s. 92

Toinen vihje s. 136 →

Tehtävän 83 vihje. Olkoot $A = (a, 0)$, missä $a \in \mathbb{R}$, ja ympyrän $x^2 + y^2 = r^2$ kehällä pisteet $Q = (b, c)$ ja $P = (-b, c)$, missä $c \neq 0$. Suorien OP ja AQ leikkauspiste olkoon L . Tilanne voisi näyttää esimerkiksi tältä.



Voisi olla eduksi piirtää tilanne ensin dynaamisella geometriaohjelmalla ja tarkastella, millaisen uran suorien OP ja AQ leikkauspiste piirtää erilaisilla parametrin a arvoilla. Tämän kokeilun synnyttämät hypoteesit tulee toki vielä osoittaa oikeiksi.

Tapaus $A = (0, 0)$ lienee helpoin. Sen tarkastelun jälkeen voisi pyrkiä muodostamaan suorien OP ja AQ yhtälöt tilanteessa, jossa $a \neq 0$, $b \neq 0$ ja $a \neq b$.

← Tehtävä s. 92

Toinen vihje s. 136 →

Toiset vihjeet

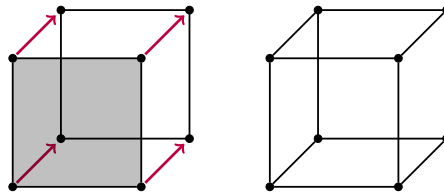
Tehtävän 1 toinen vihje. Mikähän ongelma koiran silmässä on? Miten se näkee ulkomaailman? Voi myös pohtia, miten koira menettelisi, jos se haluaisi kulkea oikealle.

← Tehtävä s. 12

← Vihje s. 96

Tehtävän 2 toinen vihje. Kärkien määrä noudattaa ulottuvuuksissa 0–3 yksinkertaista säännönmukaisuutta: 1, 2, 4, 8. Miten se jatkuu ja miksi?

Janoja koskevan säännönmukaisuuden voi ymmärtää ajattelemalla, miten kuution särmät syntyvät neliön liikuessa kolmannen ulottuvuuden läpi.

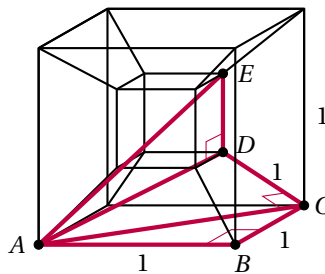


Neliön alkuperäiset 4 janaa kaksinkertaistuvat ja lisäksi neliön jokainen kärki piirtää uuden janan. Samaa ajatusta voisi hyödyntää kuution liikuessa neljänteen ulottuvuuteen.

← Tehtävä s. 12

← Vihje s. 96

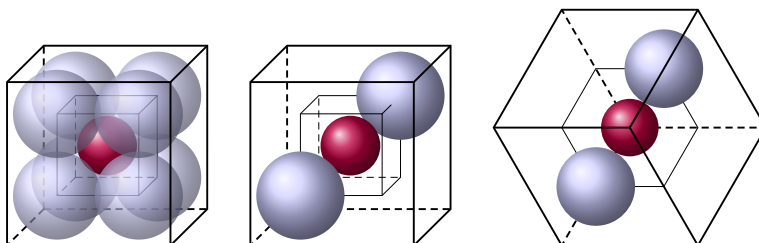
Tehtävän 3 toinen vihje. Kuvaan merkityt suorat kulmat voisivat olla avuksi.



← Tehtävä s. 13

← Vihje s. 96

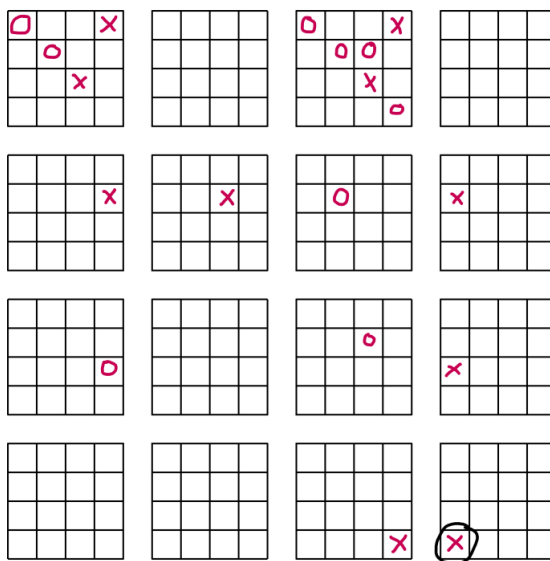
Tehtävän 4 toinen vihje. Kolmen ulottuvuuden tapauksessa kahdeksan pallon keskipisteet muodostavat kuution, jonka sivun pituus on 1 ja avaruuslävistäjän pituus tehtävän 3 tuloksen nojalla $\sqrt{3}$. Tälle avaruuslävistäjälle osuu kaksi reunustavien pallojen sädettä ja keskimmäisen pallon halkaisija. Saattoiko keskimmäisen pallon halkaisijaksi siis $d = \sqrt{3} - 1$?



← Tehtävä s. 13

← Vihje s. 97

Tehtävän 5 toinen vihje. Kuvaan merkityn siirron jälkeen nolla ei voi estää ristin voittoa seuraavalla siirrolla. Mitkä ovat ristin kaksi mahdollista voittosiirtoa?



← Tehtävä s. 14

← Vihje s. 97

Tehtävän 6 toinen vihje. Hyperkuutiolla on $2^4 = 16$ kärkipistettä, ja hyperavaruuslävistäjiä on kahdeksan. Miksi nämä lukumäärät eivät ole samat?

← Tehtävä s. 22

← Vihje s. 97

Tehtävän 7 toinen vihje. Vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välisen kulman γ voi laskea kaavalla

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|},$$

joten kahden hyperavaruuslävistäjävektorin välisen kulman selvittämiseksi tarvitaan näiden vektorien pituudet ja pistetulot. Kaikkien hyperavaruuslävistäjien pituus on sama, nimittäin $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$, joten tarvitsee enää laskea pistetulot.

Voit tarkistaa, millaisia arvoja kahta eri hyperavaruuslävistäjää vastaavien vektorien pistetulo voi saada. Kolme eri arvoa on mahdollista, mutta ne vastaavat lopulta vain kahta eri lävistäjien välistä kulmaa. (Miksi?) Tehtävänannossa lupailtu yllätys on siis tässä: kaikki hyperavaruuslävistäjien väliset kulmat eivät ole keskenään yhtä suuria!

← Tehtävä s. 22

← Vihje s. 97

Tehtävän 8 toinen vihje. Jatketaan ensimmäisen vihjeen ajatusta: jos voittorivi on muotoa

$$(x_1, y_1, z_1, w_1)$$

$$(x_2, y_2, z_2, w_2)$$

$$(x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$(x_4, y_4, z_4, w_4),$$

kussakin sarakkeessa on joko kasvavat koordinaatit 1234, laskevat koordinaatit 4321 tai vakiokoordinaatit 1111, 2222, 3333 tai 4444. Yhteensä vaihtoehtoja on siis kuusi. Jos sarakkeet valitaan toisistaan riippumatta, erilaisia vaihtoehtoja on 6^4 . Tämä on kuitenkin liian suuri luku kahdesta syystä: ensinnäkin pelkkiä vakiokoordinaatteja sisältävät rivit, kuten

$$(2, 1, 2, 4)$$

$$(2, 1, 2, 4)$$

$$(2, 1, 2, 4)$$

$$(2, 1, 2, 4),$$

eivät ole voittorivejä, sillä kaikki koordinaatit kuvaavat samaa ruutua. Tällaiset pitäisi siis vähentää tuloksesta 6^4 . Lisäksi kukin rivi tulee laskettua kahdesti, sillä esimerkiksi

$$(1, 4, 1, 2)$$

$$(4, 1, 1, 2)$$

$$(2, 3, 1, 2)$$

$$(3, 2, 1, 2)$$

$$(3, 2, 1, 2)$$

ja

$$(2, 3, 1, 2)$$

$$(4, 1, 1, 2)$$

$$(1, 4, 1, 2)$$

ovat itse asiassa sama rivi vain eri järjestyksessä lueteltuna.

Rivien määräksi pitäisi lopulta tulla 520.

← Tehtävä s. 22

← Vihje s. 98

Tehtävän 9 toinen vihje. Soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä vihjeen 1 pistetuloon päädyimme tuloon

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + a^2}.$$

← Tehtävä s. 27

← Vihje s. 98

Tehtävän 10 toinen vihje. Soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä vihjeen 1 pistetuloon päädyimme tuloon

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2}.$$

← Tehtävä s. 27

← Vihje s. 99

Tehtävän 11 toinen vihje. Vihjeen 1 tulossa voi tunnistaa neliöiden summien tulon tähän tapaan:

$$\left(\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c+a}} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2 \right)$$

← Tehtävä s. 27

← Vihje s. 99

Tehtävän 12 toinen vihje. Vihjeen 1 hengessä voi myös osoittaa arviot

$$\frac{b^2 + c^2}{b + c} \geq \frac{b + c}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq \frac{c + a}{2}.$$

Millainen arvio syntyykään näiden kolmen arvion puolittaisena summana?

← Tehtävä s. 27

← Vihje s. 99

Tehtävän 13 toinen vihje. Jos vihjeen 1 pistetuloon soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, niin syntyy neliöjuurten tulo

$$\sqrt{(a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2 + (c\sqrt{c})^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2}.$$

Tämä sievenee mukavasti.

← Tehtävä s. 27

← Vihje s. 99

Tehtävän 14 toinen vihje. Kun vihjeen 1 lausekkeeseen soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, ilmestyy pistetulo

$$\sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \dots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}},$$

joka sievenee iloisesti.

← Tehtävä s. 27

← Vihje s. 99

Tehtävän 15 toinen vihje. Kun vihjeen 1 kahden neliöiden summan tuloon soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, tuloksena syntyy pistetulo

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \cdot \sqrt{b_1} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \cdot \sqrt{b_2} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \cdot \sqrt{b_n},$$

joka sievenee varsin mukavasti.

← Tehtävä s. 28

← Vihje s. 99

Tehtävän 16 toinen vihje. Vihjeen 1 lausekkeeseen voi soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä näin:

$$xy \cdot zx + yz \cdot xy + zx \cdot yz \leq \sqrt{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2} \cdot \sqrt{(zx)^2 + (xy)^2 + (yz)^2}.$$

← Tehtävä s. 28

← Vihje s. 100

Tehtävän 17 toinen vihje. Jos Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä soveltaa vihjeen 1 lausekkeeseen, niin silloin syntyy lausekkeitä, joissa esiintyy neliöiden summa $x^2 + y^2 + z^2$. Tämän voi puolestaan jälleen kirjoittaa muodossa

$$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2.$$

← Tehtävä s. 28

← Vihje s. 100

Tehtävän 18 toinen vihje. Vihjeen 1 lausekkeesta Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö sanoo, että

$$1 \cdot \sqrt{x+y} + 1 \cdot \sqrt{y+z} + 1 \cdot \sqrt{z+x} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{z+x})^2}.$$

← Tehtävä s. 28

← Vihje s. 100

Tehtävän 19 toinen vihje. Soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä vihjeen 1 lausekkeeseen, voi päätyä luonnollisella tavalla neliöjuurten tuloon

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2}}.$$

← Tehtävä s. 28

← Vihje s. 100

Tehtävän 20 toinen vihje. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä voi arvioida vihjeessä 1 esiintyvää tuloa alhaalta lausekkeella

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{\frac{4}{c}} \cdot \sqrt{c} + \sqrt{\frac{16}{d}} \cdot \sqrt{d} \right)^2.$$

← Tehtävä s. 28

← Vihje s. 100

Tehtävän 21 toinen vihje. Vihjeen 1 lausekkeella polynomille $P(x)$ voi tulon $P(x)P(1/x)$ kirjoittaa kahden neliöiden summan tulona muodossa

$$\sum_{\ell=0}^n \left(\sqrt{a_\ell} (\sqrt{x})^\ell \right)^2 \sum_{\ell=0}^n \left(\sqrt{a_\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^\ell \right)^2.$$

← Tehtävä s. 29

← Vihje s. 100

Tehtävän 22 toinen vihje. Vihjeen 1 pistetuloon voi tosiaan soveltaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä. Loppu on pohjimmiltaan sievennystä, jota tehdessä on hyvä muistaa, että tehtävässä 9 todistamamme epäyhtälön

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

avulla on mahdollista todistaa epäyhtälö

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Lisäksi on mahdollista laskea

$$x(ay + bz) + y(az + bx) + z(ax + by) = a(xy + yz + zx) + b(xy + yz + zx).$$

← Tehtävä s. 29

← Vihje s. 101

Tehtävän 23 toinen vihje. Vihjeen 1 kuvaamin merkinnöin viisikulmioiden alojen summa on $A(a^2 + b^2 + c^2)$. Lisäksi tiedämme, että $a + b + c = 1$. Millaisia lukuja Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöön kannattaisi sijoittaa, että siinä esiintyisivät nämä lausekkeet? Milloin epäyhtälössä vallitsisikaan yhtäsuuruus?

← Tehtävä s. 29

← Vihje s. 101

Tehtävän 24 toinen vihje. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä voi osoittaa, että

$$(ad + be + cf) \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} \right) \geq (a + b + c)^2.$$

Tässä voi olla hyödyllistä kirjoittaa $ab = (\sqrt{ab})^2$ ja niin edelleen. Summa $ad + be + cf$ on itse asiassa kaksi kertaa kolmion pinta-ala.

← Tehtävä s. 30

← Vihje s. 101

Tehtävän 25 toinen vihje. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}.$$

Tehtävänannon väite seuraa tästä suoraviivaisella sieventämisellä ja kaavamaniplaaatiolla.

← Tehtävä s. 30

← Vihje s. 101

Tehtävän 26 toinen vihje. Vihjeen 1 lähestymistavalla on mahdollista päätyä siihen, että yhtäsuuruus vallitsee edellisen tehtävän aritmeettis-kvadraattisessa epäyhtälössä vain ja ainoastaan silloin, kun $a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

← Tehtävä s. 30

← Vihje s. 101

Tehtävän 27 toinen vihje. Vihjeen 1 alusta voi Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä jatkaa

$$\begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 + 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) + |\bar{b}|^2 \\ &\leq |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2. \end{aligned}$$

← Tehtävä s. 32

← Vihje s. 102

Tehtävän 28 toinen vihje. Edellisen tehtävän vihjeen 2 arvioissa avainasemassa oli arvio $\bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

← Tehtävä s. 32

← Vihje s. 102

Tehtävän 29 toinen vihje. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä vihjeessä 1 mainittuihin vektoreihin (x, y) ja (y, z) näemme, että

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + (y + z)^2} + \sqrt{z^2 + x^2}.$$

← Tehtävä s. 32

← Vihje s. 102

Tehtävän 30 toinen vihje. Vihjeen 1 hengessä tässä voi soveltaa kolmioepäyhtälöä vektoreihin (x, x) and $(y - x, z - x)$.

← Tehtävä s. 32

← Vihje s. 102

Tehtävän 31 toinen vihje. Tässä voisi soveltaa kolmioepäyhtälöä vihjeen 1 hengessä vektoreihin (x, y, z) ja $(1/x, 1/y, 1/z)$. Voi myös olla hyödyllistä muistaa, että $x + 1/x \geq 2$.

← Tehtävä s. 32

← Vihje s. 102

Tehtävän 32 toinen vihje. Vihjeen 1 valinnoilla on mahdollista arvioida käänteisellä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä, että

$$(a^2 \cdot a - b^2 \cdot b - c^2 \cdot c)^2 \geq ((a^2)^2 - (b^2)^2 - (c^2)^2)(a^2 - b^2 - c^2).$$

← Tehtävä s. 37

← Vihje s. 102

Tehtävän 33 toinen vihje. Vihjeen 1 kaksi arviota seuraavat käänteisestä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä, jos $a^4 > b^4 + c^4$ ja $a^5 > b^5 + c^5$. Seuraisivatko nämä mukavasti oletuksesta $a > b + c$?

Kun molemmat vihjeen 1 arviot ovat käytettävissä, voisi ongelman ratkaisun aloittaa vaikkapa näin:

$$(a^2 - b^2 - c^2)(a^5 - b^5 - c^5) \leq \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^4 - b^4 - c^4)^2}{a^3 - b^3 - c^3}.$$

← Tehtävä s. 37

← Vihje s. 102

Tehtävän 34 toinen vihje. Vihjeen 1 kuvaamien lähestymistapojen kannalta voi olla hyödyllistä muistaa, että

$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} = |\bar{x}|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + |\bar{y}|^2.$$

← Tehtävä s. 37

← Vihje s. 103

Tehtävän 35 toinen vihje. Yhteenlaskettavat ovat 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 ja 5^2 . Summaksi pitäisi tulla 55.

← Tehtävä s. 42

← Vihje s. 103

Tehtävän 36 toinen vihje. Ensimmäisessä summassa on peräkkäisiä viidellä jaollisia lukuja, joista ensimmäinen on $15 = 5 \cdot 3$ ja viimeinen $100 = 5 \cdot 20$, joten voidaan kirjoittaa esimerkiksi

$$15 + 20 + 25 + \dots + 100 = \sum_{k=3}^{20} (5k).$$

Muutkin muodot ovat mahdollisia, esimerkiksi $\sum_{k=1}^{18} (10 + 5k)$.

Jälkimmäisessä summassa on parittomia lukuja, eli lukuja muotoa $2k + 1$. Mitkä olisivat sopivat luvun k arvot?

← Tehtävä s. 42

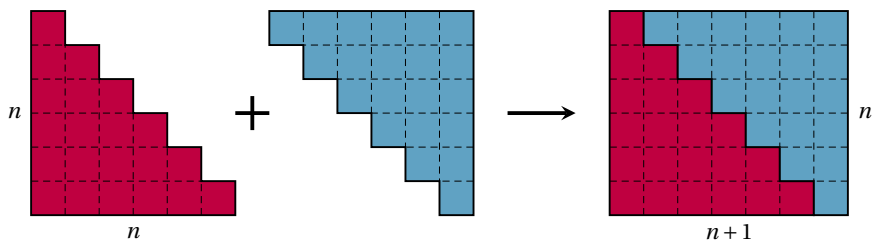
← Vihje s. 103

Tehtävän 37 toinen vihje. Summan $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ voisi merkitä summamerkinä käyttäen summausindeksiä k , joka saa arvot $1, 2, 3, \dots, n$.

← Tehtävä s. 42

← Vihje s. 103

Tehtävän 38 toinen vihje. Ensimmäisessä vihjeessä todettiin, että yhden pylväskuvion pinta-ala vastaa summaa $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Oikeanpuoleisen kuvan perusteella kaksi tällaista summaa vastaa yhteensä pinta-alaa $n \cdot (n + 1)$. Miten tästä voidaan päätellä haluttu tulos?



← Tehtävä s. 42

← Vihje s. 104

Tehtävän 39 toinen vihje. Kun $n = 3$, kaavat saavat muodot

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 5a_k &= 5 \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow 5a_1 + 5a_2 + 5a_3 = 5(a_1 + a_2 + a_3), \\ \sum_{k=1}^n 1 &= n \Rightarrow 1 + 1 + 1 = 3, \\ \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = a_0 + a_1 + a_2,\end{aligned}$$

ja viimeinen kaava muodon

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3).\end{aligned}$$

Mikä kaavoista ei päde yleisesti?

← Tehtävä s. 43

← Vihje s. 104

Tehtävän 40 toinen vihje. Jos esimerkiksi tehdään ensimmäiseen summaan indeksointimuuttujan vaihto $k = m + 1$, eli $m = k - 1$, saadaan uudeksi alarajaksi $m = 1 - 1 = 0$ ja ylärajaksi $m = 1000 - 1 = 999$. Ensimmäinen summa sievenee muotoon

$$\sum_{k=1}^{1000} k^2 = \sum_{m=0}^{999} (m+1)^2.$$

Nyt summat voidaan yhdistää seuraavasti

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1000} k^2 - \sum_{m=0}^{999} (m^2 + m) &= \sum_{m=0}^{999} (m+1)^2 - \sum_{m=0}^{999} (m^2 + m) \\ &= \sum_{m=0}^{999} ((m+1)^2 - (m^2 + m)),\end{aligned}$$

ja eteenpäin pääsee sieventämällä summattavaa lauseketta.

← Tehtävä s. 43

← Vihje s. 104

Tehtävän 41 toinen vihje. Diagonaalin luvut ovat a_{11} , a_{22} , a_{33} ja a_{44} . Rivin ja sarakkeen indeksit ovat siis samat, eli luvut ovat muotoa a_{ii} . Mitkä ovatkaan indeksin i sopivat arvot, joiden yli on summattava?

← Tehtävä s. 43

← Vihje s. 104

Tehtävän 42 toinen vihje. Summan ensimmäiset termit ovat

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14} \right) + \dots$$

Mitä termit kumoutuvat? Mitkä jäävät jäljelle?

← Tehtävä s. 44

← Vihje s. 105

Tehtävän 43 toinen vihje. Kirjoittamalla auki tulon ensimmäisiä termejä havaitaan, että supistumista tapahtuu paljon.

$$\prod_{k=1}^{1000} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1000}{1001}$$

Mitkä luvut jäävät jäljelle?

← Tehtävä s. 44

← Vihje s. 105

Tehtävän 44 toinen vihje. Todistuksen voi rakentaa esimerkiksi tarkastelemalla pienintä yhteenlaskettavien määrää $n > 1$, jolla kaava ei päde. Koska kyseessä on pienin arvo, kaava pätee arvolla $n - 1$. Saadaan siis

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{n-1} (k) + n = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n,$$

missä viimeisessä välivaiheessa on käytetty summakaavaa $n - 1$ termin summalle. Tästä eteenpäin sieventämällä voit näyttää, että kaava itse asiassa pätee myös n yhteenlaskettavalle. Ei siis ole olemassa pienintä arvoa, jolla kaava ei pätsisi. Kaava pätee siis kaikilla $n \geq 1$.

← Tehtävä s. 44

← Vihje s. 105

Tehtävän 46 toinen vihje. Vastaukseksi pitäisi tulla $r = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{18}}$, eli neliöjuurilausekkeiden sieventämisen jälkeen tasan $r = -0,5$.

← Tehtävä s. 49

← Vihje s. 105

Tehtävän 47 toinen vihje. Korrelaation saa laskettua esimerkiksi LibreOffice Calc -ohjelmassa komennolla `=KORRELAATIO()` ja hajontakuvion piirrettyä valitsemalla halutun datan ja käyttämällä komentoa `Lisää > Kaavio > XY` (Hajonta).

← Tehtävä s. 49

← Vihje s. 105

Tehtävän 48 toinen vihje. Yksittäisille koordinaateille (x_i, y_i) pätee $y_i = kx_i + b$. Saisiko tämän avulla osoitettua, että keskiarvoille pätee vastaavasti $\hat{y} = k\hat{x} + b$?

Molemmat edellä mainitut lausekkeet voisi sijoittaa vektorin

$$\bar{b} = (y_1 - \hat{y}, y_2 - \hat{y}, \dots, y_n - \hat{y})$$

lausekkeeseen. Tavoitteena voisi olla osoittaa, että korrelaation lausekkeessa esiintyvillä vektoreilla $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pätee $\bar{b} = k\bar{a}$.

← Tehtävä s. 50

← Vihje s. 106

Tehtävän 49 toinen vihje. Kun $r = 1$, vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma on $\alpha = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$. Pätee siis $\bar{b} = k\bar{a}$ jollakin positiivisella luvulla k .

Voisiko tämän perusteella päätellä, että on olemassa reaalin vakio b siten, että kaikille koordinaateille (x_i, y_i) pätee $y_i = kx_i + b$?

← Tehtävä s. 50

← Vihje s. 106

Tehtävän 50 toinen vihje. Koska $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| |\bar{b}|$, täytyy itse asiassa päteä

$$-|\bar{a}| |\bar{b}| \leq \bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}| |\bar{b}|,$$

sillä reaaliluvuilla t ja u pätee $|t| \leq u$ täsmälleen silloin kun $-u \leq t \leq u$. Miten todistus vietäisiin loppuun?

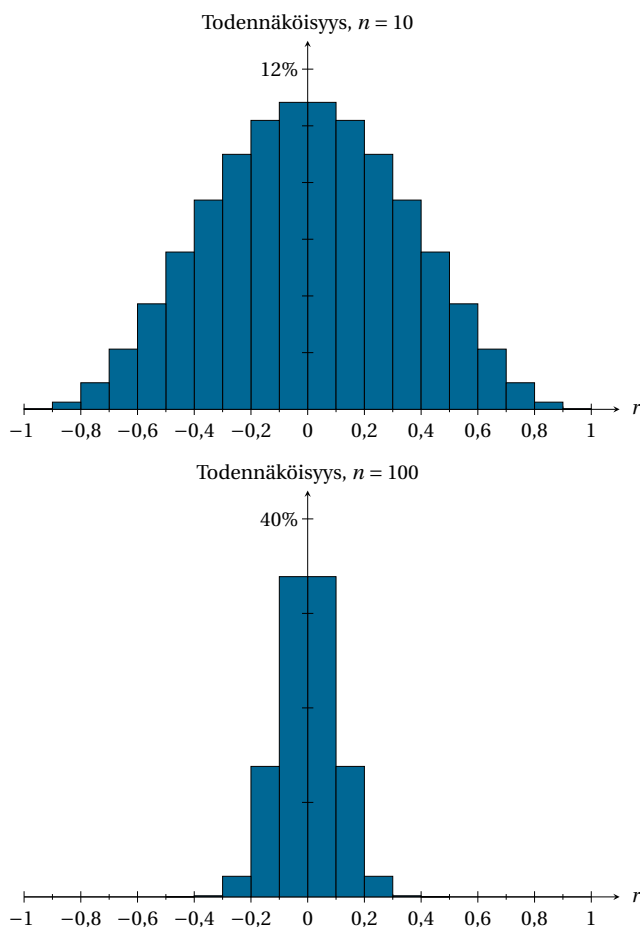
← Tehtävä s. 50

← Vihje s. 106

Tehtävän 51 toinen vihje. Miten ohjelman toteuttaakin, sen tulisi tuottaa kymmenellä lukuparilla ($n = 10$) tulos $|r| > 0,3$ noin 40% todennäköisyydellä.

Kun arvottuja lukupareja on sata ($n = 100$), tuloksen $|r| > 0,3$ todennäköisyys on enää noin 0,25%.

Seuraavissa kuvissa on esitetty korrelaatiokertoimien tarkempi jakauma kummasakin tapauksessa 0,1 välein ryhmiteltynä. Jakaumat sopivat hyvin sekä tilanteeseen, jossa alkuperäiset satunnaisluvut ovat tasaisesti jakautuneita että tilanteeseen, jossa alkuperäinen arvonta noudattaa normaalijakaumaa. Ensimmäisestä kuvaajasta voi huomata, että varsin korkeatkaan korrelaatiot eivät ole erityisen harvinaisia, kun otoskoko on vain 10.



Mozzarellan kulutuksen ja havaijilaisten juristien lukumäärin välinen korrelaatio on kuitenkin hyvin suuri: $r \approx 0,978$. Näin suuri korrelaatio syntyy sattumalta vain harvoin. Miksi kuitenkin ei ole syytä uskoa, että mozzarellan ja juristien välillä olisi syy-seurausyhteys?

← Tehtävä s. 51

← Vihje s. 106

Tehtävän 52 toinen vihje. Keskimmäisen oranssin koordinaatit voi laskea punaisen ja keltaisen koordinaattien keskiarvoina. Tämän jälkeen kaksi muuta väriä saa oranssin ja keltaisen sekä oranssin ja punaisen keskiarvoina. Lienee syytä pyöristää vasta lopuksi.

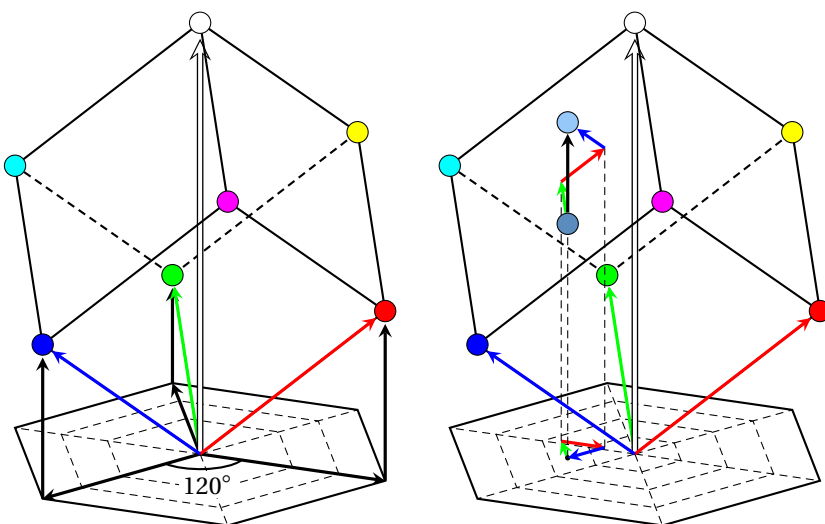
Kokonaisluvuiksi pyöristämisen jälkeen koordinaateiksi pitäisi tulla $(255, 64, 0)$, $(255, 128, 0)$ ja $(255, 191, 0)$.

← Tehtävä s. 59

← Vihje s. 106

Tehtävän 53 toinen vihje. Kuten ensimmäinen vihje vihjaakin, väri liikkuu harmaa-akselin suunnassa, kun sen kaikkiin RGB-koordinaatteihin lisätään sama vakio. Halutut pisteet ovat siis muotoa $(100 + a, 150 + a, 200 + a)$, missä a on kokonaisluku, ja tavoitteena on löytää pisteet, joissa a on suurin tai pienin mahdollinen.

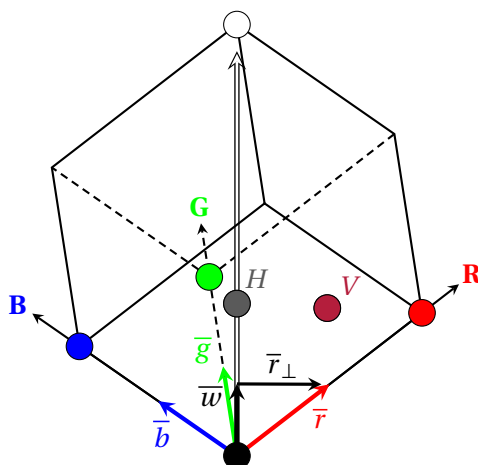
Miksi tämä sitten toimii? Symmetriasyistä R -, G - ja B -akselien suuntavektorien harmaa-akselin vastaiset vaakasuorat komponentit sijaitsevat tasavälein, eli 120° kulmassa toisiinsa. Jos liikkuu yhtä paljon R -, G - ja B -suuntiin, muutosten kohtisuorat komponentit kumoavat toisensa ja summana liike on harmaa-akselin suuntaista.



← Tehtävä s. 59

← Vihje s. 107

Tehtävän 54 toinen vihje. RGB-kuution harmaa-akseli mustasta valkoiseen on kuution avaruuslävistäjä ja symmetrisessä asemassa R -, G - ja B -akselien suhteen. Jos siis jaetaan akselien suuntaiset yksikkövektorit $\vec{r}$, $\vec{g}$ ja $\vec{b}$ kukin pystysuoraan ja vaakasuoraan komponenttiin, vektorien pystysuorat komponentit (nimeltään vaikkapa $\vec{w}$) ovat yhtä suuret. Pisteiden $V = (R, G, B)$ paikkavektorin $R\vec{r} + G\vec{g} + B\vec{b}$ pystysuora komponentti on siis $(R + G + B)\vec{w}$, joten pisteen V korkeus riippuu vain summasta $R + G + B$. Riittää siis tarkistaa, että ensimmäisessä vihjeessä nimettyjen pisteiden V ja H koordinaattien summa on sama, siis kummallakin $R + G + B$. Jos näin on, pisteet ovat yhtä korkealla, ja jana VH siis harmaa-akselia vastaan kohtisuora.



← Tehtävä s. 60

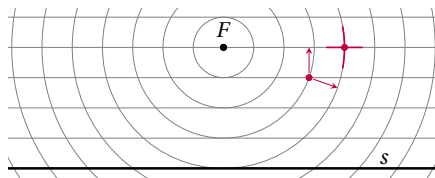
← Vihje s. 107

Tehtävän 55 toinen vihje. Väriä $V = (100, 150, 200)$ lähin harmaa-akselin piste H voidaan laskea tehtävän 54 avulla. Tämän jälkeen voidaan selvittää vektori $\overline{HV}$. Kysytty piste löytyy, kun pisteestä V liikutaan vektorin $\overline{HV}$ suunnassa kuution reunalle. Vastaukseksi pitäisi lopulta tulla $(45, 150, 255)$.

← Tehtävä s. 60

← Vihje s. 107

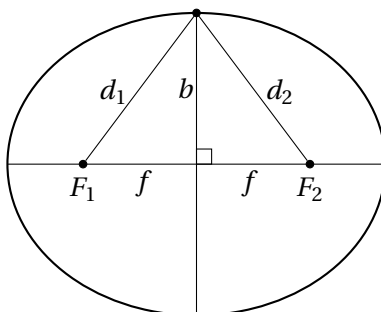
Tehtävän 57 toinen vihje. Kun yksi piste on asetettu paikoilleen, lisää löytyy esimerkiksi liikkumalla yksi ympyrän kaari kauemmas polttopisteestä ja yksi suorien väli kauemmas johtosuorasta. Kun kaikkiin sopivat leikkauspisteet on merkitty, paraabelin voi hahmotella niiden avulla.



← Tehtävä s. 74

← Vihje s. 108

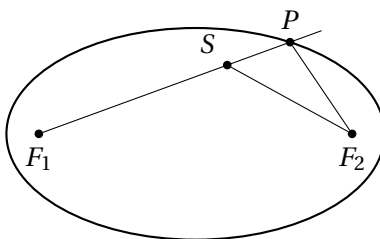
Tehtävän 60 toinen vihje. Ellipsin ominaisuudesta $d_1 + d_2 = 2a$ voisi olla hyötyä.



← Tehtävä s. 75

← Vihje s. 109

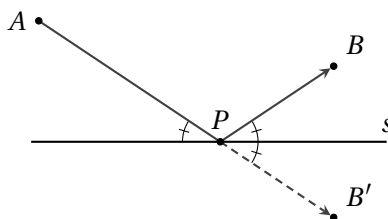
Tehtävän 61 toinen vihje. Ellipsin sisällä olevaa pistettä S voisi verrata kehän pisteeseen P , joka on puolisuoran F_1S ja ellipsin kehän leikkauspiste. Miten summat $SF_1 + SF_2$ ja $PF_1 + PF_2$ eroavat toisistaan?



← Tehtävä s. 75

← Vihje s. 109

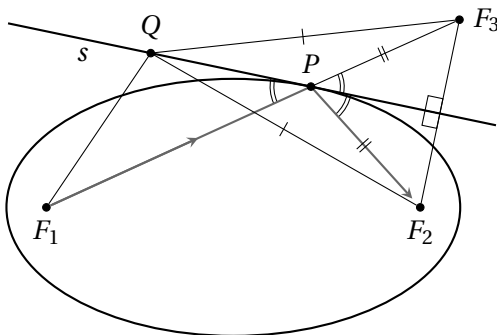
Tehtävän 63 toinen vihje. Tilanteessa esiintyvien kulmien avulla voisi perustella, että A , P ja B' ovat samalla suoralla. Piste P on siis sellainen, että murtoviiva APB' on mahdollisimman lyhyt. Mitä tämä kertoo murtoviivasta APB ?



← Tehtävä s. 76

← Vihje s. 109

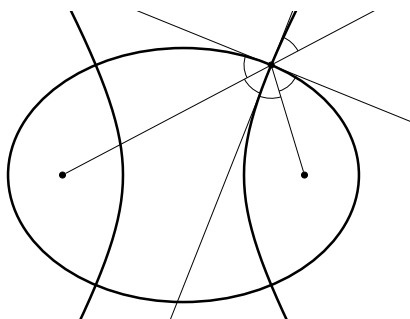
Tehtävän 66 toinen vihje. Seuraavan apukuvion pohjalta voisi perustella, että $QF_1 + QF_2 > PF_1 + PF_2$, ja piste Q on siis ellipsin ulkopuolella. Miksi $QF_2 = QF_3$?



← Tehtävä s. 77

← Vihje s. 111

Tehtävän 67 toinen vihje. Mitä ellipsin ja hyperbelin optiset ominaisuudet sanovatkaan kuvaan merkityistä kulmista?



← Tehtävä s. 77

← Vihje s. 111

Tehtävän 69 toinen vihje. Ellipsin polttopisteet sijaitsevat isoakselilla. Isoakselin pituudelle $2a$, pikkuakselin pituudelle $2b$ ja polttopisteiden välimatkalle $2f$ pätee $b^2 + f^2 = a^2$, kuten perustellaan tehtävässä 60 tai sivulta 79 alkavassa laskussa.

← Tehtävä s. 89

← Vihje s. 111

Tehtävän 70 toinen vihje. Muotoa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ olevan hyperbelin asymptootit ovat $y = \pm \frac{b}{a}x$. Hyperbelin symmetria-akselilla sijaitseva piste $(2, 0)$ tarkoittaa, että $a = 2$.

Kun hyperbelille kuuluukin y -akselin piste $(0, 2)$, hyperbeli aukeaa pystysuunnassa, ja muuttujien x ja y roolit vaihtuvat. Hyperbelin yhtälöksi tulee $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

← Tehtävä s. 89

← Vihje s. 112

Tehtävän 71 toinen vihje. Paraabeli koostuu pisteistä (x, y) , jotka ovat yhtä etäällä polttopisteestä $(0, 0)$ ja suorasta $x + 2y - 5 = 0$. Etäisyyksien laskemiseen voisi käyttää Pythagoraan lausetta ja pisteen etäisyys suorasta -kaavaa

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

← Tehtävä s. 89

← Vihje s. 112

Tehtävän 72 toinen vihje. Kaikki kaksoiskartion pinnalta löytyvät suorat kulkevat kaksoiskartion kärjen kautta.

← Tehtävä s. 89

← Vihje s. 112

Tehtävän 73 toinen vihje.

- Pistettä $(2, -3)$ voisi ajatella ympyränä, jonka säde on nolla.
- Tulon nollasäännöstä voisi olla apua.
- Jos b -kohta ratkeaa, samaa menetelmää voisi hyödyntää keskenään samoille suorille $y - x = 0$ ja $y - x = 0$.

← Tehtävä s. 90

← Vihje s. 112

Tehtävän 74 toinen vihje. Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x = -2$ on $|x - (-2)| = |x + 2|$ ja etäisyys suorasta $y = 1$ on $|y - 1|$. Tällaisia lausekkeita voisi sijoittaa käyrän määrittävään yhtälöön.

← Tehtävä s. 90

← Vihje s. 112

Tehtävän 75 toinen vihje. Origokeskeisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$. Kun ympyrä venytetään x -akselin suhteen k -kertaiseksi, uusi yhtälö on $\left(\frac{x}{k}\right)^2 + y^2 = r^2$. Miksi se on ellipsin yhtälö?

← Tehtävä s. 90

← Vihje s. 112

Tehtävän 76 toinen vihje. Kuvio skaalautuu k -kertaiseksi, kun muuttujapari (x, y) korvataan yhtälössä parilla $(\frac{x}{k}, \frac{y}{k})$. Miten k tulisi valita, jotta lopputulos olisi yhtälö $y = x^2$?

← Tehtävä s. 90

← Vihje s. 112

Tehtävän 77 toinen vihje. Jos halutaan kiertää käyrää esimerkiksi 45° myötäpäivään, käyrän pisteiden alkuperäiset koordinaatit (x, y) saadaan kiertämällä uusia koordinaatteja (x', y') vastapäivään. Koska $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$, sijoitukseksi saataisiin

$$\begin{cases} x = \cos(45^\circ)x' - \sin(45^\circ)y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \sin(45^\circ)x' + \cos(45^\circ)y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$$

Tämä muunnos tulisi siis sijoittaa käyrän alkuperäiseen yhtälöön $y = 1/x$. Lopputuloksena saadaan

$$\frac{(x')^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{2}^2} = 1, \quad \text{tai ilman pilkkuja} \quad \frac{x^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1.$$

Polttopisteiden etäisyyttä pohdittaessa voisi olla hyötyä kaavasta $a^2 + b^2 = f^2$. Mitä a , b ja f ovatkaan tässä tapauksessa?

← Tehtävä s. 91

← Vihje s. 112

Tehtävän 78 toinen vihje. Kun ehdon $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon|x|$ neliöi ja termejä järjestellään hieman, saadaan

$$\begin{aligned} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= \varepsilon^2 x^2 & || - \varepsilon^2 x^2 - c^2 \\ (1 - \varepsilon^2)x^2 - 2xc + y^2 &= -c^2. \end{aligned}$$

Muuttujaa x sisältävän osan $(1 - \varepsilon^2)x^2 - 2xc$ voisi nyt täydentää neliöksi tämänkaltaisella sievennyksellä:

$$Ax^2 + 2Bx = A\left(x^2 + 2x \cdot \frac{B}{A}\right) = A\left(x^2 + 2x \cdot \frac{B}{A} + \underbrace{\frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{A^2}}_{=0}\right) = A\left(\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A^2}\right).$$

Lopulta on mahdollista päästä yhtälöön muotoa

$$\frac{(x-p)^2}{q} + \frac{y^2}{r} = 1, \quad \text{missä } p = \frac{c}{1-\varepsilon^2}, q = \frac{c^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \text{ ja } r = \frac{c^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}.$$

← Tehtävä s. 91

← Vihje s. 113

Tehtävän 79 toinen vihje. Olkoot ellipsin iso- ja pikkuakselin puolikkaat a ja b , polttopisteen etäisyys ellipsin keskipisteestä f ja eksentrisyys ε . Tehtävässä 60 perusteltiin yhteys $b^2 + f^2 = a^2$ ja tehtävässä 78 tulos $b^2/a^2 = 1 - \varepsilon^2$. Näitä yhdistelemällä voisi päästä eteenpäin.

← Tehtävä s. 91

← Vihje s. 113

Tehtävän 80 toinen vihje. Johtosuoran pisteen $(c, -1/4)$, missä $c \in \mathbb{R}$, kautta voidaan piirtää tangentti $y + \frac{1}{4} = k(x - c)$. (Tangentilla täytyy olla kulmakerroin, koska muuten se olisi y -akselin suuntainen, eikä tangentti voi olla paraabelin akselin suuntainen.) Kulmakertoimen k pitää olla sellainen, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y + \frac{1}{4} = k(x - c) \end{cases}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu, eli että toisen asteen yhtälön diskriminantti on nolla. Tästä ehdosta saadaan yhtälö mahdollisille kulmakertoimille k . Kohtisuoruuden osoittamiseksi riittäisi todistaa, että yhtälön kahden ratkaisun tulo on -1 .

← Tehtävä s. 92

← Vihje s. 113

Tehtävän 81 toinen vihje. Edellisen vihjeen merkinnöillä suorien OP ja AQ kulmakertoimiksi saadaan

$$k_1 = \frac{\frac{a^2}{2p}}{a} = \frac{2p}{a} \quad \text{ja} \quad k_2 = \frac{-a}{\frac{a^2}{2p} - (-4p)} = -\frac{2ap}{a^2 + 8p^2}.$$

Suorien OP ja AQ leikkauspiste $L = (x, y)$ ratkeaa siis yhtälöparista

$$\begin{cases} y = \frac{2p}{a}x \\ y - 0 = -\frac{2ap}{a^2 + 8p^2}(x + 4p). \end{cases}$$

Kun tästä yhtälöparista eliminoi parametrin a , jäljellä jää pisteen L koordinaattien x ja y toteuttama yhtälö. Lopulta käynee ilmi, että piste L liikkuu ympyrää pitkin.

← Tehtävä s. 92

← Vihje s. 113

Tehtävän 82 toinen vihje. Yhtälön vasen puoli on kahden ensimmäisen asteen polynomilausekkeen tulo. Jos tekijöihinjaon keksii, tästä voi jatkaa tulon nollasäännöllä.

Suoraviivaisempi ratkaisutapa on ratkaista yhtälöstä muuttuja y toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Voidaan ryhmitellä seuraavasti:

$$-5y^2 + (11 - 24x)y + (5x^2 + 3x - 2) = 0,$$

jolloin ratkaisukaavan kertoimiksi saadaan $a = -5$, $b = 11 - 24x$ ja $c = 5x^2 + 3x - 2$. Ratkaisukaava antaa muodon

$$y = \frac{-(11 - 24x) \pm \sqrt{(11 - 24x)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (5x^2 + 3x - 2)}}{2 \cdot (-5)},$$

josta uutusterasti sieventämällä päästään ratkaisuun. Neliöjuuren sisään muodostuu kuin muodostuukin binomin neliö, ja muuttujalle y saadaan kaksi ensimmäisen asteen lauseketta.

← Tehtävä s. 92

← Vihje s. 114

Tehtävän 83 toinen vihje. Kun $a \neq b \neq 0$, leikkauspisteen L koordinaatit x ja y toteuttavat suorien OP ja AQ yhtälöt, eli ensimmäisen vihjeen merkinnöillä yhtälöparin

$$\begin{cases} y = -\frac{c}{b}x \\ y = \frac{c}{b-a}(x - a) \end{cases}$$

Tästä voisi eliminoida parametrit b ja c , joita sitoo ehto $b^2 + c^2 = r^2$. Lopulta on mahdollista päätyä yhtälöön

$$a^2 y^2 + (a^2 - 4r^2)x^2 + 4ar^2x = r^2 a^2,$$

jonka luonne riippuu kertoimen $a^2 - 4r^2$ merkistä.

← Tehtävä s. 92

← Vihje s. 114

Lähteet

Kirjan teksti on ladottu $\text{\LaTeX}$ -järjestelmällä ja kuvat piirretty pääsääntöisesti sen $\text{\TikZ}$ -paketilla. Monien kuvien piirtämisessä ovat ohjelmistot [57] ja [23] olleet suuresti avuksi.

Luvut 1 ja 2. Tilaulottuvuudet, hyperkuutio, vektorit

Tapa havainnollistaa korkeampia ulottuvuuksia on muotoutunut vuosien varrella Helsingin matematiikkalukion matematiikkamaanantai-kerhossa Maunulassa. Runsaasti ideoita on saatu teoksista [1], [47] ja [38].

Luku 3. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Epäyhtälöt ovat suosittu aihe matemaattisessa ongelmanratkaisussa, ja niistä on olemassa monia kirjoja, kuten Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön käsittelyssä hyödyntämämme [6, 8, 22, 28, 46, 52]. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö esiintyi ensimmäisen kerran teoksessa [7], ja Schwarzin lähestymistapa sen todistamiseen puolestaan ensimmäisen kerran artikkelissa [43].

Nesbittin epäyhtälö on alun perin lähteestä [34], Shapiron ongelma lähteestä [44], ja Drinfel'din epäyhtälö artikkelista [11]. Shapiron sykliseen epäyhtälöön ja Drinfel'din arvioon voi tutustua tarkemmin artikkelista [53] sekä siinä mainituista lähteistä. Artikkelia [53] ei itse sisällä todistusta tekijän γ optimaalisuudelle eikä vastaesimerkkejä Shapiron ongelman epäyhtälölle. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä käsittelevässä luvussa ja liitteessä on hyödynnetty artikkeleiden [53, 54] materiaalia. Liitteessä läpikäyty todistus Nesbittin epäyhtälön kuuden muuttujan versiolle on kirjan [22] esimerkistä 2.1.6.

Suomeksi suppeaan suhteellisuusteoriaan voi tutustua vaikkapa teoksista [12, 13]. Järeämpi teos [33] on eräs Minkowskin avaruuden teoriaa käsittelevä teos. Käänteisen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön todistus seuraa Aczélín artikkelia [2], missä se on teoreema 16.

Luku 4. Summausmerkintä Σ

Sivun 43 taikaneliokuva on yksityiskohta teoksesta [58].

Luku 5. Korrelaatio

Korrelaation tulkinta vektorien välisen kulman kosinina mainitaan esimerkiksi artikkelissa [41]

Luku 6. RGB-värit koordinaatistossa

RGB-värejä käsittelevän luvun 6 keskeiset lähteet ovat teos [5] sekä artikkelit [45] ja [24]. Haluamme lämpimästi kiittää Harald Arnkilia käsikirjoituksen kommentoinnista tämän luvun osalta. Luvun valokuvat on ottanut Ville Tilvis.

Sivun 53 kuvaaja tappisolujen herkkyydestä valon eri aallonpituuksille on muokattu Wikimedia Commons -kuvasta [61]. Kuva perustuu dataan, joka on peräisin artikkelista [48].

Luvut 7 ja 8. Kartioleikkaukset

Lukujen päälähteenä on mainio kirja [3] ja joitakin harjoitustehtäviä on poimitu teoksesta [27]. Sivun 69 todistus hyperbelin optisesta ominaisuudesta löytyy artikkelista [26].

Dandelinin palloon perustuva todistus paraabelista kartioleikkauksena (sivu 72) seurailee Aleksis Kosken meille ystävällisesti ehdottamaa todistusta. Lopputulos muistuttaa läheisesti Lorentz Lindelöfin kirjoittamaa todistusta oppikirjan Analyttinen geometria [31] sivulla 108.

Sivun 68 kuva radioteleskoopeista on sivustolta [59].

Tehtävien lähteitä

Tehtävä 1. Esimerkki kaksiulotteisesta koirasta on teoksesta [21].

Tehtävä 2. Laskemistapa on teoksen [14] luvusta "Hypercubes" ja lukumääriä koskeva summakaava teoksesta [38].

Tehtävä 3. Saanut innoitusta teoksesta [38].

Tehtävä 4. Tämän tehtävän idea on esitelty teoksen [38] luvussa "Higher Dimensions". Kirjoittaja Matt Parker kertoo kuulleen ongelman matemaatikko Colin Wrightilta.

Tehtävä 5. Moniulotteista ristinollaa käsitellään artikkelissa [17].

Tehtävä 8. Tehtävä ratkaisuneen löytyy artikkelista [17].

Tehtävä 10. Tehtävä 4a.1 kirjassa [6].

Tehtävä 11. Esimerkki 13.14 kirjassa [51].

Tehtävä 12. Tehtävä 4.6 teoksessa [8].

Tehtävä 13. Tehtävä 4a.2 kirjassa [6].

Tehtävä 14. Esimerkki 4.1 kirjassa [6].

Tehtävä 15. Korollaari 1 teoksen [22] luvussa 2.

Tehtävä 16. Ongelma 8 sivulla 77 teoksessa [28].

Tehtävä 17. Ongelma 1 sivulla 77 teoksessa [28].

Tehtävä 18. Tämä on esimerkki 13.13 teoksessa [51].

Tehtävä 19. Esimerkki 1.9 kirjassa [52].

Tehtävä 20. Tehtävä 4.3 kirjassa [8].

- Tehtävä 21.** Tämä on oleellisesti ottaen tehtävä 4b.12 kirjassa [6].
- Tehtävä 22.** Tämä on tehtävä 4b.11 kirjassa [6].
- Tehtävä 24.** Tehtävä 4c.2 kirjassa [6].
- Tehtävä 29.** Tehtävä 4.1.a) kirjassa [46].
- Tehtävä 30.** Tämä on oleellisesti ottaen tehtävä 4.1.b) kirjassa [46].
- Tehtävä 31.** Tehtävä 4.1.c) kirjassa [46].
- Tehtävä 47.** Data on ladattu sivustolta [16], tarkemmin sanottuna osoitteesta <https://ourworldindata.org/grapher/annual-working-hours-vs-gdp-per-capita-pwt>
- Tehtävä 51.** Esimerkkidata mozzarella-juustosta ja juristeista on kerätty sivustolta [55], tarkemmin sanottuna osoitteesta http://tylervigen.com/view_correlation?id=28716.
- Tehtävä 56.** Tehtävä on teoksen [3] johdantoesimerkki.
- Tehtävä 74.** Tehtävä on muokattu versio teoksen [27] tehtävästä 197.
- Tehtävä 80.** Tehtävän ratkaisun idea on teoksen [27] tehtävästä 186.
- Tehtävä 81.** Tehtävä on muokattu teoksen [27] tehtävästä 794.
- Tehtävä 82.** Tehtävä on MAOL ry:n järjestämän lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoimen sarjan tehtävä 2 vuodelta syksy 2000, jolloin toinen kirjoittaja osallistui kilpailuun. Kiitos Timo Salmiselle tehtävän etsimisestä arkistostaan.
- Tehtävä 83.** Tehtävä on teoksen [27] tehtävä 799 hieman muokatulla tehtävänannolla.

Viitteet

- [1] ABBOTT, E. A.: *Tasomaa, moniulotteinen romanssi*, Terra Cognita, 1997.
- [2] АЦЕЛЬ, Я.: *Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений*, Успехи математических наук, XI (1956), 3–68.
- [3] AKOPYAN, A. V. ja A. A. ZASLAVSKY: *Geometry of Conics*, Mathematical World, Volume 26, American Mathematical Society, 2007.
- [4] ANDREESCU, T., V. CÎRTOAJE, G. DOSPINESCU, ja M. LASCU: *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.
- [5] ARNKIL, H.: *Värit havaintojen maailmassa*, Aalto ARTS Books, 2021.
- [6] BRADLEY, C. J.: *Introduction to Inequalities*, Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010.
- [7] CAUCHY, A.-L.: *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique; 1.^{re} partie. Analyse algébrique*, Debure frères, 1821.
- [8] CVETKOVSKI, Z.: *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.
- [9] DEWDNEY, A. K.: *The Planiverse*, Copernicus, 2001.
- [10] THE DOCUMENT FOUNDATION: *LibreOffice Calc, versio 7.0.5.2*, 2020.
<https://www.libreoffice.org/discover/calc/>

- [11] DRINFEL'D, V. G.: *A cyclic inequality*, Mathematical Notes, 9 (1971), 68–71.
- [12] EINSTEIN, A.: *Erityisestä ja yleisestä suhteellisuusteoriasta*, Ursan julkaisuja, 90, Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 2003.
- [13] ENQVIST, K.: *Johdatus suhteellisuusteoriaan*, Ursan julkaisuja, 126, Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 2011.
- [14] GARDNER, M.: *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, 2001.
- [15] THE GIMP DEVELOPMENT TEAM: *GIMP 2.10.22*, 2021.
<https://www.gimp.org>
- [16] GLOBAL CHANGE DATA LAB: *Our World in Data*. Luettu 28.11.2021.
<https://ourworldindata.org/>
- [17] GOLOMB, S. W., ja A. W. HALES: *Hypercube tic-tac-toe*, artikkeli kirjassa [37], 167–182.
- [18] HALMETOJA, M. ja J. MERIKOSKI: *Matemaattista fysiikkaa lukiolaisille 1*, 2009.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2009/mfl.pdf>
- [19] GOOGLE: *Google Sheets*, 2021.
<https://www.google.com/sheets/about/>
- [20] HALES, A. W.: Henkilökohtainen kirjeenvaihto, 2021.
- [21] HAWKING, S.: *Ajan lyhyt historia*, WSOY, 1988.
- [22] HUNG, P. K.: *Secrets in Inequalities, volume 1 - basic inequalities*, GIL Publishing House, 2007.
- [23] INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE: *GeoGebra Classic 6*, 2016.
- [24] JOBLOVE, G., ja D. GREENBERG: *Color spaces for computer graphics*, ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 12 (1978), 20–25.
- [25] JORDAN, G. ja J. MOLLON: *Tetrachromacy: the mysterious case of extra-ordinary color vision*, Current Opinion in Behavioral Sciences, 30 (2019), 130–134.
- [26] KANTER, L.H.: *A Note on the Optical Property of the Hyperbola*, School Science and Mathematics, 71, 1971.
- [27] KATTAINEN, P.: *800 lukiomatematiikan tehtävää*, Otava, 1965.
- [28] KAZARINOFF, N. D.: *Analytic Inequalities*, Dover Publications, 2003.
- [29] KOSHITAKA, H., M. KINOSHITA, M. VOROBYEV ja K. ARIKAWA *Tetrachromacy in a butterfly that has eight varieties of spectral receptors*, Proceedings of the Royal Society 275 (2008), 947–954.
- [30] LAININEN, P.: *Tilastollisen analyysin perusteet*, Otatieto, 2000.
- [31] LINDELÖF, L.: *Analyttinen Geometria*, Suomalaisen kirjallisuuden seura, 1924. (Alkuteos 1864.)
- [32] MICROSOFT: *Microsoft Excel, versio 2110*, 2021.
<https://www.microsoft.com/fi-fi/microsoft-365/excel>
- [33] NABER, G. L.: *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*, Applied Mathematical Sciences, 92, Springer, 2012.
- [34] NESBITT, A. M.: *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903), 37–38.
- [35] NETO, A. C. M.: *An Excursion through Elementary Mathematics, Volume I: Real Numbers and Functions*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2017.
- [36] NEUMEYER, C. *Tetrachromatic color vision in goldfish: evidence from color mixture experiments*, Journal of Comparative Physiology A, 171 (1992) 639–649.
- [37] NOWAKOWSKI, R. J. (toim.): *More Games of No Chance*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 42, Cambridge University Press, 2002.
- [38] PARKER, M.: *Things to Make and Do in the Fourth Dimension*, Penguin Books, 2015.

- [39] PATASHNIK, O.: *Qubic: $4 \times 4 \times 4$ tic-tac-toe*, Mathematics Magazine, 53 (1980), 202–216.
- [40] PYTHON SOFTWARE FOUNDATION: *Python 3.8*
<https://www.python.org/>
- [41] RODGERS, J.L. ja W.A. NICEWNADER *Thirteen Ways to Look at the Correlation Coefficient*, The American Statistician, 42 (1988), 59–66.
- [42] SCHLÄFLI, L.: *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Springer, 1901.
- [43] SCHWARZ, H. A.: *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, XV (1888), 319–361.
- [44] SHAPIRO, H. S.: *Problem 403*, American Mathematical Monthly, 61 (1954), 571.
- [45] SMITH, A. R.: *Color gamut transform pairs*, ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 12 (1978), 12–19.
- [46] STEELE, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Problem Books, Mathematical Association of America, Cambridge University Press, 2004.
- [47] STEWART, I.: *Flatland: like flatland, only more so*, Basic Books, 2002.
- [48] STOCKMAN, A., ja L.T. SHARPE: *The spectral sensitivities of the middle- and long-wavelength-sensitive cones derived from measurements in observers of known genotype*, Vision Research, 40 (2000), 1711–1737.
- [49] TILVIS, V., ja E. V. VESALAINEN: *Pitkän matematiikan lisäsivut 2: Algebra*, Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio, 2020.
- [50] TILVIS, V., ja T. TÖRMÄ: *Pitkän matematiikan lisäsivut 5*, Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio, 2025.
- [51] VADERLIND, P.: *Matematiska utmaningar: En kurs i problemlösning*, Studentlitteratur, 2016.
- [52] VENKATACHALA, B. J.: *Inequalities: An Approach Through Problems*, Texts and Readings in Mathematics, 49, Hindustan Book Agency, 2009.
- [53] VESALAINEN, E. V.: *Moniulotteisuuden ihmeitä: Shapiron syklinen epäyhtälö*, Solmu, 1/2018, 26–34.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/1/nesbitt-shapiro.pdf>
- [54] VESALAINEN, E. V.: *Moniulotteisuuden ihmeitä: ongelmien ratkaisuita*, Solmu, 2/2018, 32–33.
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/2/nesbitt-shapiro_ratkaisut.pdf
- [55] VIGEN, T.: *Spurious Correlations*, 2021. Luettu 19.11.2021.
<https://www.tylervigen.com/spurious-correlations>.
- [56] WOLFRAM MATHWORLD: *Quadratic Curve*. Luettu 23.12.2024.
<https://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurve.html>
- [57] WOLFRAM RESEARCH, INC.: *Mathematica*, versio 12.0, 2019.

Kuvalähteet

- [58] DÜRER, A.: *Melencolia I*, 1514, kuva poimittu osoitteesta [https://en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I#/media/File:Albrecht_D%C3%BCrer_-_Melencolia_I_-_Google_Art_Project_\(AGDdr3EHmNGyA\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I#/media/File:Albrecht_D%C3%BCrer_-_Melencolia_I_-_Google_Art_Project_(AGDdr3EHmNGyA).jpg) . jpg, Public Domain.
- [59] PICKPIK: *White satellite receivers*
<https://www.pickpik.com/radar-dish-radar-earth-station-fuchssta-dt-reception-send-94130> Luettu 16.11.2024.
- [60] TILVIS, V.: *Kuva tappisolujen vasteista on muokattu Wikimedia Commons -kuvasta* [61].
- [61] WIKIMEDIA COMMONS, KÄYTTÄJÄ BENRG: *Cone fundamentals with sRGB spectrum*. Luettu 28.11.2021. Kuva perustuu artikkelin [48] dataan.
https://en.wikipedia.org/wiki/Cone_cell#/media/File:Cone-fundamentals-with-srgb-spectrum.svg