

Ville Tilvis  
Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio  
Avoin CC BY 4.0 lisenssi © ⓘ



## Paradokseja ja muuta mukavaa



Penrosen kolmio [6]

### Paradokseista

Sanaa paradoksi käytetään monissa merkityksissä. Sillä voidaan tarkoittaa esimerkiksi vaikeaa, mutta kuitenkin ratkaistavissa olevaa ongelmaa, joka alkuun näyttää mahdottomalta, tai vaikkapa ristiriitaiselta vaikuttavaa käyttäytymismallia: ”Liisa inhoaa juhlia, mutta ei koskaan kieltäydy kutsusta.”

Logiikassa paradoksilla tarkoitetaan lausetta, joka ei voi olla tosi eikä epätosi. Klassisin esimerkki tästä on valehtelijan paradoksi: jos joku sanoo ”Tämä lause on epätosi”, onko kyseessä tosi vai epätosi lause?

Paradoksit eivät ole vain harmitonta ajanvietettä, vaan niillä voi olla myös syvällistä matemaattista merkitystä. Paradoksit koettelevat loogisen rakenteemme rajoja ja tuovat esiin niiden puutteita. Paradokseja käytetään myös suoraan päättelyn osana. Esimerkiksi Gödelin ensimmäinen epätäydellisyyslause (jonka mukaan jokainen riittävän edistynyt aksiomaattinen järjestelmä sisältää lauseita, joita ei voi todistaa oikeiksi tai vääriksi) perustuu versioon valehtelijan paradoksista.

Tähän on koottu kokoelma klassisia paradokseja ja muita loogisia pulmia. Osa ongelmistä on olemassa selkeä ja yleisesti hyväksytty ratkaisu, osasta ei vielä välttämättä yksimielisyyttä.

## Harjoitustehtäviä

**Tehtävä 1.** Kumpi lauseista on tosi?

*Alempi lause on tosi.  
Ylempi lause on epätosi.*

**Tehtävä 2.** Mitä mieltä olet seuraavasta lauseesta?

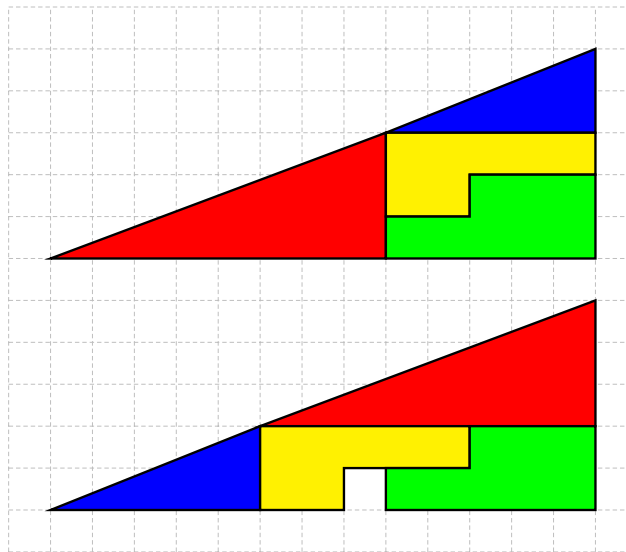
”Tässä lauseessa on tasan kolme virhettä.”

**Tehtävä 3.** Arvioi kunkin lauseen totuusarvoa:

1. Tässä listassa on täsmälleen yksi epätosi väite.
2. Tässä listassa on täsmälleen kaksi epätotta väitettä.
3. Tässä listassa on täsmälleen kolme epätotta väitettä.
4. Tässä listassa on täsmälleen neljä epätotta väitettä.

**Tehtävä 4.** Krokotiili kaappasi äidiltä vauvan. Se lekotteli joessa suu auki vauva suussa ja sanoi äidille: ”Jos arvaat, mitä teen seuraavaksi, tuon vauvan takaisin. Jos et arvaa, syön sen!” Mitä äiti vastaa?

**Tehtävä 5.** Mitähän tässä tapahtuu?



**Tehtävä 6. Parturiparadoksi** (Bertrand Russel)

Eräässä kylässä asuva parturi noudattaa tarkasti seuraavaa ohjetta: ”Kylän parturi leikkaa parran kaikkilta niiltä kyläläisiltä, jotka eivät leikkaa omaa partaansa, eikä kenenkään muun.” Kuka leikkaa parturin parran?

**Tehtävä 7.** Mukaelma **Russelin paradoksista.**

Kirja on *itsensä mainitseva*, jos sen nimi esiintyy kirjan tekstissä (kuten kirja Hobitti), ja *tavallinen*, jos kirjan nimi ei esiinny tekstissä (kuten kirja Avaruusseikkailu 2001). Laaditaan tietokirja, joka listaa kaikki tavalliset kirjat, ja vain ne. Onko tämä tietokirja tavallinen vai itseensä viittaava?

**Tehtävä 8. Russelin paradoksi.**

Jos joukko sisältää itsensä alkiona (kuten joukko  $A = \{1, A\}$ ), sitä sanotaan kummalliseksi. Jos joukko ei sisällä itseään alkiona (kuten joukko  $B = \{1, 2, 3\}$ ), sitä sanotaan tavalliseksi. Olkoon kaikkien tavallisten joukkojen joukko  $M$ . Onko joukko  $M$  tavallinen vai kummallinen?

**Tehtävä 9. Berryn paradoksi.** Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku, jota ei voi määrittellä alle sadan kirjoitusmerkin virkkeellä?

**Tehtävä 10.** Roomalainen kirjailija Aulus Gellius (n. 125 - 180) mainitsee kirjassaan *Attilan öitä* seuraavasta kiintoisasta tapauksesta.

Tarinan mukaan Protagoras (n. 490 eaa.–420 eaa.) opetti puheoppia ja lakia oppilaalleen nimeltä Euathlus. Sopimus oli, että Euathlus maksaisi opetuksesta puolet etukäteen ja jälkimmäisen puolen vasta, kun olisi voittanut ensimmäisen oikeusjuttunsa. Euathlus ei kuitenkaan koskaan aloittanut lakiuraansa.

Protagoras haastoi oppilaansa oikeuteen ja vaati rahojaan. Kumman kuuluisi voittaa, opettajan vai oppilaan?

### **Kovia pähkinöitä purtavaksi**

**Tehtävä 11. Siniset silmät -paradoksi.** Saarella asuu joukko ihmisiä, jotka ovat täysin loogisia: jos jotakin on pääteltävissä, he päättävät sen heti.

Saarella on outo tapa: jokainen, joka saa tietää omien silmiensä värin, joutuu poistumaan saarelta keskiyöllä kulkevalla lautalla. Kukaan ei siis tiedä omien silmiensä väriä, mutta näkee kaikkien muiden silmät ja muistaa näkemiensä värien lukumäärät. Silmien väreistä ei puhuta saaren asukkaiden kesken mitään.

Kaikki saaren asukkaat tietävät kaiken edellä mainitun.

Saarella asuu 100 sinisilmäistä ja 100 ruskeasilmäistä ihmistä, sekä Guru, jolla sattuu olemaan vihreät silmät. Gurulla on lupa puhua silmien väristä yhden ainoan kerran heidän saarella viettämiensä vuosien aikana. Eräänä keskipäivänä Guru sanoo kaikkien kuullen:

”Näen jonkun, jolla on siniset silmät.”

Kuka lähtee saarelta ja milloin?

(Vastaus ei ole ”ei kukaan”. Tässä ei ole mitään typerää komppaa, ei peilejä, silmien värit eivät muutu jne.; vastaus on pääteltävissä.)

**Tehtävä 12. Kahden kenraalin ongelma.** Kaksi bysanttilaista kenraalia miehittää armeijoihin kahta kukkulaa, joiden välisessä laaksossa vihollinen on. Jos kenraalit hyökkäävät yhtä aikaa, voitto on varma, mutta jos vain toinen hyökkää, tappiot ovat karneat. Koska hyökkäyksen valmisteluun kuluu monta tuntia, hyökkäysaika pitää sopia etukäteen viestinviejien välityksellä. Mikä tahansa ajankohta sopii kummallekin kenraalille. Jokaisen viestin kohdalla on kuitenkin pieni riski, että viestinviejä tapetaan matkalla eikä viesti pääse perille. (Viesti ei silloinkaan joudu vihollisen käsiin, se on salakirjoitusta.)

Kuinka monen viestin täytyy vähintään päästä perille, jotta hyökkäys onnistuu turvallisesti? Kenraalit hyökkäävät vain, jos tietävät toisenkin hyökkäävän.

**Tehtävä 13. Yllättävä teloitus.** Tuomari luki seuraavan rangaistuksen: ”Nyt on maanatai. Sinut tullaan teloittamaan aamunkoitteessa viimeistään perjantaina, mutta en kerro minä päivänä. Teloituspäivän aamuna et vielä tiedä, että kuolet sinä päivänä.”

(A) Vanki mietti hetken ja tajusi, ettei häntä voida teloittaa perjantaina. Miksi?

(B) Mietittyään hetken lisää vanki riemuisti, sillä häntä ei voitaisi teloittaa minään kyseisen viikon päivistä. Miksi?

(C) Vanki siis yllättyi aika lailla, kun teloittajat saapuivat keskiviikkona. Mikä meni vikaan?

**Tehtävä 14. Newcombin paradoksi.** Huoneessa on kaksi laatikkoa: laatikko *A* ja laatikko *B*. Laatikossa *B* on joka tapauksessa 1000 euroa, laatikossa *A* on joko 1 000 000 euroa tai ei mitään. Menet huoneeseen, ja sinulla on kaksi vaihtoehtoa:

1. Otat vain laatikon *A*.
2. Otat molemmat laatikot.

Viikko ennen tätä koetta lähes täydellinen Ennustaja (esim jumala tai ulkoavaruuden superäly) on ennustanut kumman valinnan teet. Ennustaja haluaa rankaista ahneita: Jos ennustuksen mukaan otat molemmat laatikot, Ennustaja on jättänyt laatikon *A* tyhjäksi. Jos ennustuksen mukaan otat vain laatikon *A*, Ennustaja on kätkenyt sinne miljoona euroa. Palkinnot ovat nyt olleet laatikossa jo viikon ja Ennustaja ei voi muuttaa niitä enää. Kannattaako ottaa molemmat laatikot vai vain laatikko *A*?

## Viitteet

- [1] CRANE, G.R.: *Perseus Digital Library* (luettu 13.3.2024)  
<https://www.perseus.tufts.edu/hopper/>
- [2] GARDNER, M.: *The Colossal Book of Mathematics*, W.W. Norton & Company, Inc., 2001
- [3] GELLIUS, A.: *Noctes Atticae*. Saatavilla englanniksi käännettynä sivustolla [1] osoitteessa  
<http://data.perseus.org/citations/urn:cts:latinLit:phi1254.phi001.perseus-lat1:1sum.1>  
Viitattu kohta on viidennen kirjan luvussa 10:  
<https://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:2007.01.0072:book=5:chapter=10> (luettu 13.3.2024)
- [4] LAMPORT, L., R. SHOSTAK, ja M. PEASE: *The Byzantine Generals Problem*, ACM Transactions on Programming Languages and Systems, Vol. 4, No. 3, 1982, sivut 382-401.
- [5] MUNROE, R.: *Blue Eyes: The Hardest Logic Puzzle in the World* (luettu 13.3.2024)  
[https://xkcd.com/blue\\_eyes.html](https://xkcd.com/blue_eyes.html)
- [6] KÄYTTÄJÄ ARKOPRI: *Penrose Triangle* -kuva, Wikimedia Commons. (luettu 9.1.2022)  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose\\_Triangle.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Triangle.png)
- [7] WIKIPEDIA: *Byzantine fault* (luettu 13.3.2024)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Byzantine\\_fault](https://en.wikipedia.org/wiki/Byzantine_fault)
- [8] WIKIPEDIA: *Newcomb's paradox* (luettu 13.3.2024)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Newcomb%27s\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Newcomb%27s_paradox)
- [9] WIKIPEDIA: *Unexpected hanging paradox* (luettu 13.3.2024)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Unexpected\\_hanging\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Unexpected_hanging_paradox)