Matematiikkaa Mesopotamiasta

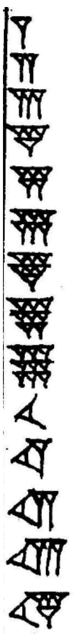
Aino Haavisto ja Ville Tilvis

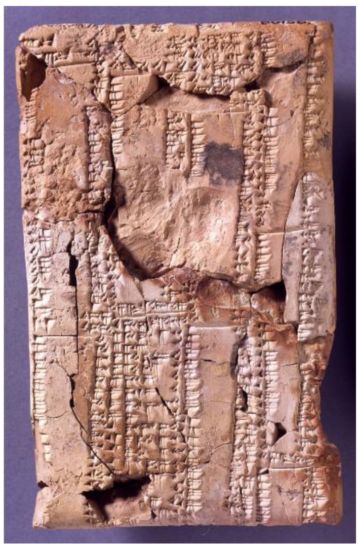
Maailman vanhimmat korkeakulttuurit syntyivät Lähi-idän suurissa jokilaaksoissa. Kun yhteiskunta monimutkaistui, syntyi tarve merkitä asioita muistiin. Kirjoituksen kanssa samaa tahtia kehittyi laskento, sillä ensimmäisenä merkittiin muistiin nimenomaan talouteen liittyviä asioita: veroluetteloita ja työntekijöiden palkkoja. Vanhimmat tekstit on kirjoitettu *sumerin* kielellä n. 3000 eaa, sittemmin valtakieleksi tuli samalla kirjoitusjärjestelmällä kirjoitettu *akkadi*, jonka tunnetuimmat murteet *babylonia* ja *assyria* ovat myös alueen myöhempien kulttuuripiirien/valtakuntien nimiä. Tuoreimmat nuolenpäätekstit on kirjoitettu ajanlaskun alun jälkeen: kirjoitusjärjestelmää käytettiin yli 3000 vuotta.

Mesopotamia – suunnilleen nykyisen Irakin alue – on luonnoltaan melko köyhää. Ainoa kirjoitusmateriaaliksi sopiva materiaali, jota oli yllin kyllin tarjolla, oli savi. Nuolenpääkirjoitusta kirjoitettiin painelemalla merkit ruokotikulla kosteaan saveen. Kuivuessaan savesta tulee kestävää, ja säilyy jopa vuosituhansia. Nykypäiviin saakka on säilynyt vähintään satojatuhansia, mahdollisesti jopa yli miljoona savitaulua. Teksteissä on niin kaunokirjallisuutta, diplomaattisia kirjeitä, uskonnollisia tekstejä kuin arkipäiväistä kirjeenvaihtoa, kuitteja, sopimuksia – ja matematiikkaa.

Vaikka nuolenpääkirjoitus ja sen matemaattiset merkinnät olivat kömpelöitä, kehittyi matemaattinen osaaminen käytännön asioissa vuosituhansien mittaan pitkälle. Joskus kuulee puhuttavan mesopotamialaisesta tieteestä – uudelta ajalta tuttua tieteellistä metodia ja jatkuvaa tavoitetta luoda uutta tietoa vanhan päälle ei ollut, mutta pyrkimystä laittaa maailmaa järjestykseen ja asetella taulukoihin ja listoihin kyllä. Usein käytettyjä tuloksia kirjattiin muistiin, jotta niitä ei tarvinnut aina laskea uudestaan päässä. Alla otteita eräästä aikansa taulukkokirjasta, muinaisbabylonialaisesta (noin vuosien 1900 eaa – 1600 eaa väliltä) savitaulusta BM 80150 (BM =British Museum).

Tehtävä 1. Mitä saat selville tästä lukujärjestelmästä? (Pohdi tehtävää ennen kuin jatkat lukemista)

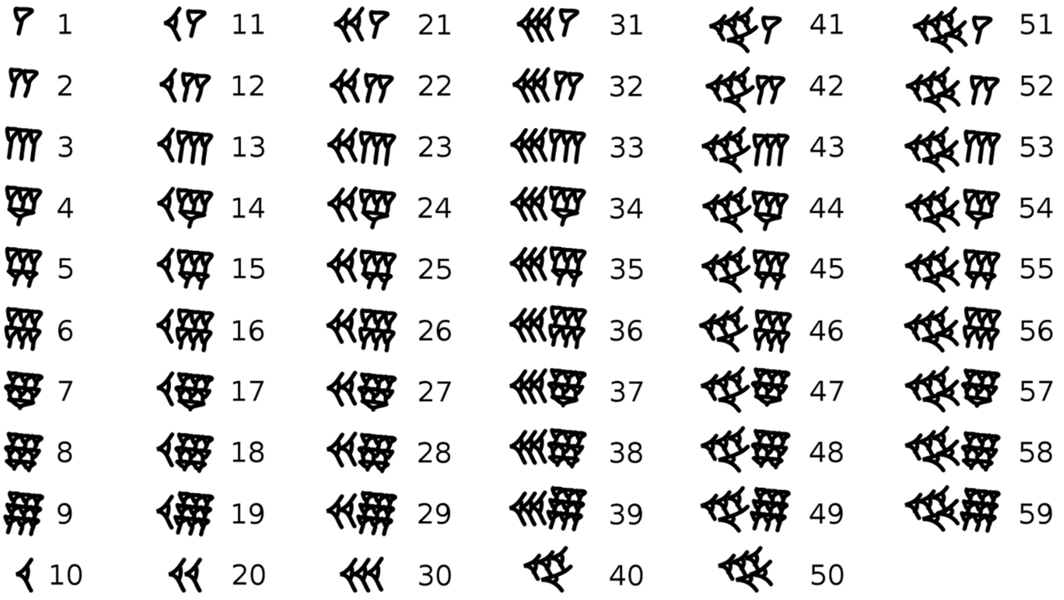




Kuva 1: Valokuva koko taulusta

Mesopotamialainen lukujärjestelmä

Käytössä oli sekoitus 60- ja 10-järjestelmää. Käytössä on paikkajärjestelmä, luvun sijainti kertoo sen suuruusluokan. Numeroiden lukusuunta on sama kuin meillä, vasemmalta suurimmasta pienimpään oikealle. 1, 60, ja kaikki muut 60:n potenssit merkitään samalla tavalla: . Samoin tehdään murtoluvuille: voi merkitä myös lukua 1/60 tai 1/3600 jne. Koska nollaa ei merkitä, ei yksittäisestä luvusta voi päätellä suuruusluokkaa mitenkään muutenkin kuin kontekstista.



Kukin fontissa kolmiosta ja viivasta koostuva *kiila* on yksi painallus saveen.

60-järjestelmä

Tarkastellaan lukua 3754. Kymmenjärjestelmässä se näyttää tältä:

tuhannet	sadat	kymmenet	ykköset
3	**7**	**5**	**4**
$(3 \cdot 10^3)$	$(7 \cdot 10^2)$	$(5 \cdot 10^1)$	$(4 \cdot 10^0)$

60-järjestelmässä sama luku näyttää tältä:

3600:t	kuudetkymmenet	ykköset
1	**2**	**34**
$(1 \cdot 60^2 = 3600)$	$(2 \cdot 60^1 = 120)$	$(34 \cdot 60^0 = 34)$

Kymmenjärjestelmän luku 3754 merkittäisiin siis .

Jos 60-järjestelmän lukuja halutaan merkitä arabialaisilla numeroilla, on tapana merkitä luvut pilkulla erotettuina: 1,2,34.

Vastaavasti 60-järjestelmän luku 3,20 tarkoittaisi 10-järjestelmän lukua $3 \cdot 60^1 + 20 = 200$ tai esimerkiksi lukua $3 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 = 12\ 000$. Toisaalta se voisi tarkoittaa myös lukua $3 + \frac{20}{60}$ tai lukua $\frac{3}{60} + \frac{20}{60^2}$. Järjestelmässä ei käytetty nollaa tai desimaalipilkkua. Modernisti nämä 60-järjestelmän desimaaliluvut merkittäisiin 3;20 ja 0;3,20.

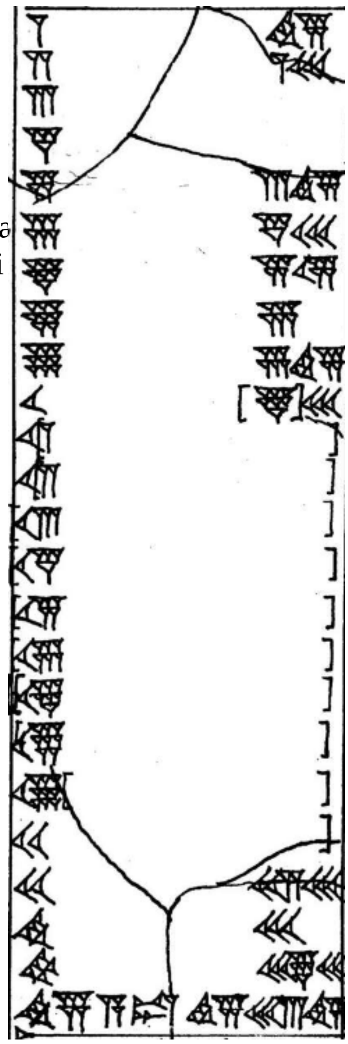
Tehtävä 2. Muuta luvut 10-järjestelmään:

a)  b)  c)  d) 

e) 

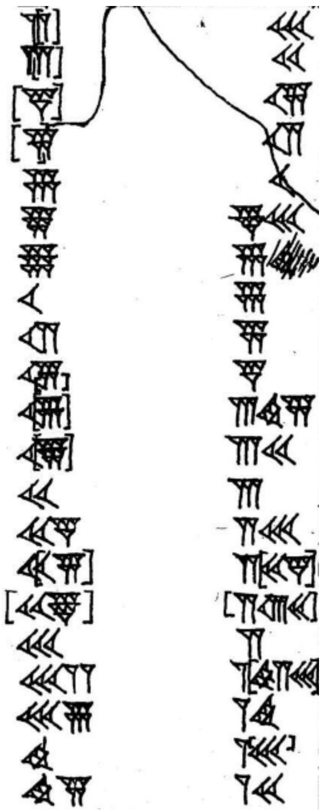
Tehtävä 3. Muuta nämä 10-järjestelmän luvut 60-järjestelmään.
Voit käyttää nuolenpääkirjoitusta tai arabialaisia numeroita ja pilkkuja:

a) 105 b) 200 c) 1002



Tehtävä 4. Jatketaan savitaulun BM 80150 parissa (oikealla). Osa savita
on vuosituhansien saatossa tuhoutunut. Nämä kohdat on merkitty [ ] tai
Täytä taulukosta oikealta puuttuvat rivit.
(Viimeinen rivi on otsikko, eikä siitä kannata välittää)

Alat varmaankin huomata, miksi kaikkia kertotauluja ei opeteltu ulkoa,
vaan katsottiin taulukosta.



Tehtävä 5. Entä mitä vasemmalla olevassa kuvassa on taulukoitu?

Tehtävä 6. Halutessasi voit tutkia, mitä kaikkea tähän savitauluun oli taulukoitu British Museumin sivuilla: https://www.britishmuseum.org/collection/object/W_1891-0509-263

Tehtävä 7. Missä 60-järjesetelmä on käytössä tänäkin päivänä?

Kertolaskuja

Kertolaskuja laskettiin jakamalla lasku osiin, ja tarvittaessa kertolaskujen tuloksia tarkistettiin taulukoista. Luvun 23 kertotaulutaulukon (liitteenä) avulla voidaan laskea

$$
\begin{aligned}
23 \cdot 57 \quad &= 23 \cdot 50 + 23 \cdot 7 \\
&= 19{,}10 \quad + 2{,}41 \quad = 21{,}51.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8. Laske 60-järjestelmän kertolaskut käyttäen osittelulakia ja liitteenä olevia kertotauluja. Älä muuta lukuja missään vaiheessa 10-järjestelmään.

a) $17{\cdot}55$ b) $43{\cdot}34$ c) $27{\cdot}1{,}45$

Tehtävä 9. Kertolaskuja laskettiin myös monimutkaisempian kaavojen avulla. Laske kuusikymmenjärjestelmässä kertolasku $23 \cdot 33$ kaavalla

$$ab = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4.$$

Voit hyödyntää taulukkoa neliöistä, joka on liitteenä.

Geometriaa

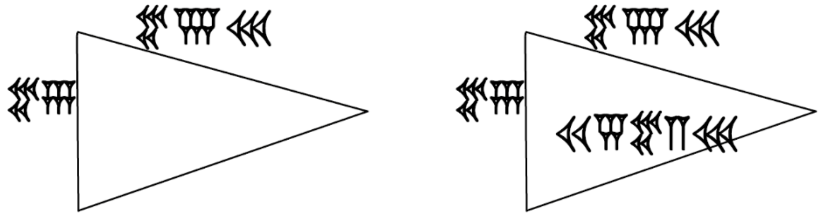
Mesopotamialaisten insinööritaito oli korkealla tasolla: he rakensivat korkeita porraspyramideja, zikkurateja, suuria palatseja, laajoja kastelukanavaverkostoja, sotakoneita… Ne kertovat geometrian osaamisesta – vaikka piille käytettiinkin yleensä likiarvoa 3 ja kulman käsitettä ei käytetty.

Kolmion pinta-ala laskettiin *pää* · *pituus* · 1/2 – meille nimellä *kanta* · *korkeus* · 1/2 tuttu kaava, joka toimii suorakulmaisille kolmioille. Sitä sovellettiin myös muille kuin suorakulmaisille kolmioille – kovin huonosti kaavaan soveltuvien kolmioiden pinta-aloja ei yksinkertaisesti laskettu, ainakaan nykyaikaan säilyneissä savitauluissa.

Tehtävä 10. Tässä on kuva pienestä matematiikantehtävästä (noin vuosien 1900 eaa – 1600 eaa väliltä). Laske kolmion pinta-ala. Valokuva ja viivapiirros alkuperäisestä taulusta UM 29-15-709 (University of Pennsylvania Museum of Archaeology and Anthropology): https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P256427 .

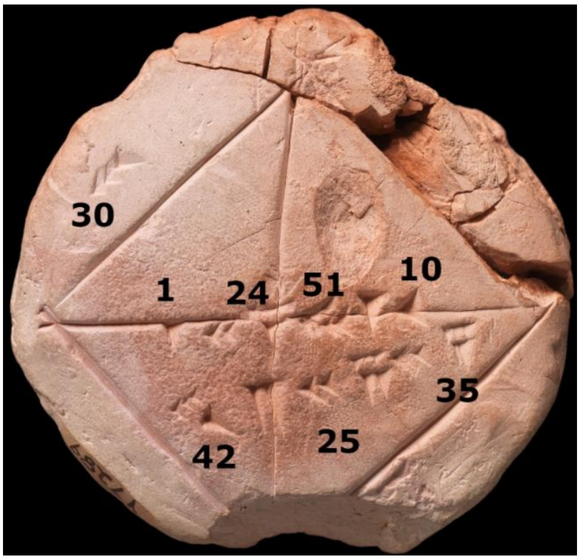
Alkuperäisessä taulussa on myös merkitty vastaus, pinta-ala (vasemmanpuoleinen kuva) – tosin pinta-ala on ilmeisesti laskettu käyttäen lyhemmän sivun mittana  .

Tarkista laskemalla molemmat versiot – mitä luulet, onko virhe tehtävänannossa vai vastauksessa?



Neliöjuuri

Savitaulun YBC 7289 arvellaan olleen oppilaan harjoitustyö. Savitaulussa on neliö, sen lävistäjät, neliön sivun vieressä luku 30, lävistäjän luona luku 1;24,51,10, ja sen vieressä näiden kahden luvun tulo 42;25,35. Luku 1;24,51,10 on erittäin hyvä likiarvo luvulle $\sqrt{2}$. Kymmenjärjestelmään muutettuna ero on vasta 6. desimaalissa:



$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

$$1;24{,}51{,}10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}4142\mathbf{129}\ldots$$

Kyseessä näyttää siis olleen harjoitus, jossa koululainen on laskenut lävistäjän pituuden neliölle, jonka sivu on 30. Toinen luonteva tulkinta sivun pituudeksi on 0;30 = 30/60 = ½, jolloin olisikin laskettu ½ -sivuisen neliön lävistäjän pituudeksi $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

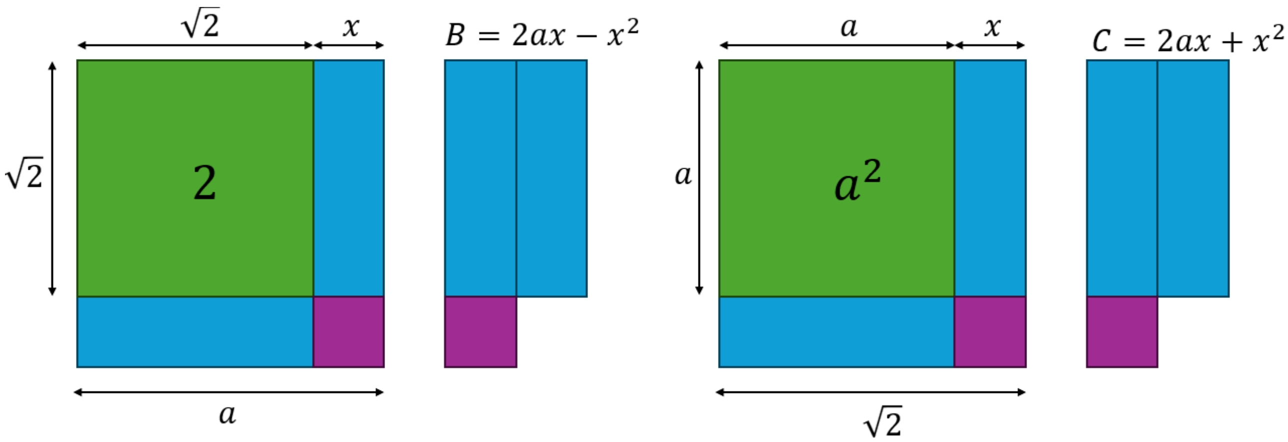
Mutta mistä luvun 2 neliöjuuren hyvä likiarvo on saatu? Mahdollisesti on käytetty toisista savitauluista löytyvää metodia, jotka modernilla algebralla merkittynä olisi seuraava:

> Lasketaan luvulle $\sqrt{N}$ likiarvo. Valitaan ensin jokin helppo luku a, joka on lähellä lukua $\sqrt{N}$, eli $a^2 \approx N$.
>
> Jos $a^2 > N$, likiarvo a on liian suuri. Lasketaan erotus $B = a^2 - N$.
> Uusi, parempi, likiarvo on $a - \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{a}$. Tämä likiarvo on yhä liian suuri.
>
> Jos $a^2 < N$, likiarvo a on liian pieni. Lasketaan erotus $C = N - a^2$.
> Uusi, parempi, likiarvo on $a + \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{a}$. Tämäkin likiarvo on liian suuri.

Näin voidaan jatkaa monta kierrosta. Likiarvo paranee joka kierroksella.

Tehtävä 11. Laske tällä metodilla likiarvo luvulle $\sqrt{2}$. Aloita likiarvosta $a = 1$ ja käytä metodia kolme kertaa. Voit laskea kymmenjärjestelmässä.

Tehtävä 12. Selvitä seuraavan kuvan perusteella, miksi edellä esitetty menetelmä toimii luvulle $\sqrt{2}$. Miksi siis luvun $\sqrt{2}$ liian suurelle likiarvolle a korjaus $\frac{1}{2} \cdot \frac{B}{a}$ on lähellä oikeaa korjausta x, mutta $a - \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{a} < \sqrt{2}$ (vasemmanpuoleinen kuva)? Ja vastaavasti; miksi liian pienelle likiarvolle a luku $\frac{1}{2} \cdot \frac{C}{a}$ on lähellä oikeaa korjausta x, mutta $a + \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{a} > \sqrt{2}$ (oikeanpuoleinen kuva) ?



Tehtävä 13. Näytä laskemalla, että edellä esitetty menetelmä antaa samat luvut kuin menetelmä, jossa luvun $\sqrt{N}$ likiarvo a korvataan paremmalla likiarvolla $\frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$.

Tämä kaava antaa mahdollisesti intuitiivisen tavan hahmottaa, miksi menetelmä toimii: Koska $\sqrt{N} \cdot \sqrt{N} = N$ ja $a \cdot \frac{N}{a} = N$, luvuista a ja $\frac{N}{a}$ aina toinen on suurempi ja toinen pienempi kuin oikea arvo $\sqrt{n}$ (ellei sattumoisin a ole tasan $\sqrt{N}$). Lukujen a ja $\frac{n}{a}$ keskiarvo on siis hyvä arvaus paremmaksi likiarvoksi.

Liite: kertotauluja

n	17n	17n
1	17	0,17
2	34	0,34
3	51	0,51
4	68	1,08
5	85	1,25
6	102	1,42
7	119	1,59
8	136	2,16
9	153	2,33
10	170	2,50
20	340	5,40
30	510	8,30
40	680	11,20
50	850	14,10
60	1020	17,00

n	27n	27n
1	27	0,27
2	54	0,54
3	81	1,21
4	108	1,48
5	135	2,15
6	162	2,42
7	189	3,09
8	216	3,36
9	243	4,03
10	270	4,30
20	540	9,00
30	810	13,30
40	1080	18,00
50	1350	22,30
60	1620	27,00

n	34n	34n
1	34	0,34
2	68	1,08
3	102	1,42
4	136	2,16
5	170	2,50
6	204	3,24
7	238	3,58
8	272	4,32
9	306	5,06
10	340	5,40
20	680	11,20
30	1020	17,00
40	1360	22,40
50	1700	28,20
60	2040	34,00

n	43n	43n
1	43	0,43
2	86	1,26
3	129	2,09
4	172	2,52
5	215	3,35
6	258	4,18
7	301	5,01
8	344	5,44
9	387	6,27
10	430	7,10
20	860	14,20
30	1290	21,30
40	1720	28,40
50	2150	35,50
60	2580	43,00

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	**16**	4,16	**31**	16,01	**46**	35,16
2	4	**17**	4,49	**32**	17,04	**47**	36,49
3	9	**18**	5,24	**33**	18,09	**48**	38,24
4	16	**19**	6,01	**34**	19,16	**49**	40,01
5	25	**20**	6,40	**35**	20,25	**50**	41,40
6	36	**21**	7,21	**36**	21,36	**51**	43,21
7	49	**22**	8,04	**37**	22,49	**52**	45,04
8	1,04	**23**	8,49	**38**	24,04	**53**	46,49
9	1,21	**24**	9,36	**39**	25,21	**54**	48,36
10	1,40	**25**	10,25	**40**	26,40	**55**	50,25
11	2,01	**26**	11,16	**41**	28,01	**56**	52,16
12	2,24	**27**	12,09	**42**	29,24	**57**	54,09
13	2,49	**28**	13,04	**43**	30,49	**58**	56,04
14	3,16	**29**	14,01	**44**	32,16	**59**	58,01
15	3,45	**30**	15,00	**45**	33,45	**1,00**	1,00,00

Lähteet

BM 80150 -savitaulu https://www.britishmuseum.org/collection/object/W_1891-0509-263

David Fowler ja Eleanor Robson: *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, HISTORIA MATHEMATICA 25 (1998), 366–378

Mathematik. *Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie* (1990), osa 7, 531-585. De Gryuter. (Nimestään huolimatta englanninkielinen artikkeli)

Eleanor Robson (2002) Words and Pictures: New Light on Plimpton 322, *The American Mathematical Monthly*, 109:2, 105-120. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/news/monthly105-120.pdf

UM 29-15-709 -savitaulu https://cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P256427

YBC 7289 -savitaulu: Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/YBC_7289

Lisäluettavaa

Cuneify https://cuneify.herokuapp.com/ Sovellus, joka muuttaa latinalaisilla kirjaimilla tai arabialaisilla numeroilla antamasi tekstin nuolenpäämerkeille. Muunnettava teksti tulee antaa standardimuotoisena translitteraationa, joten ilman tietämystä nuolenpääkirjoituksesta sovelluksesta saa helposti ulos lähinnä numeroita.

Aleksi Sahala. (2017). *Johdatus sumerin kieleen*. Suomen Itämainen Seura.

Saana Svärd ja Jouni Harjumäki (2021). *Johdatus akkadin kieleen*. Suomen Itämainen Seura.

Saana Svärd ja Joanna Töyräänvuori (toim.) 2022. *Muinaisen Lähi-idän imperiumit. Kadonneiden suurvaltojen kukoistus ja tuho.* Gaudeamus.