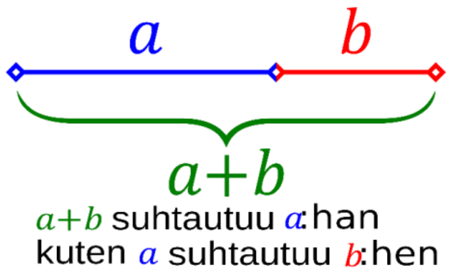
Kultainen leikkaus ja lukujonoja

Erkki Nurminen

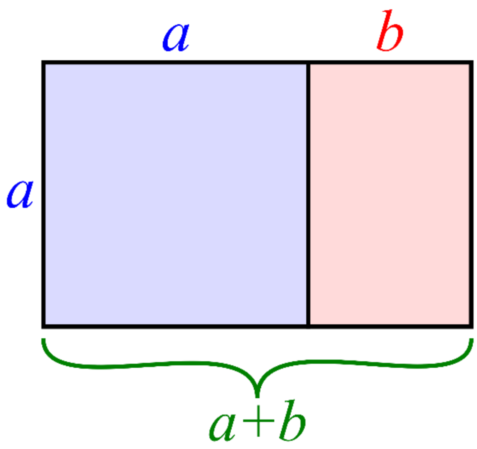
Kultainen leikkaus

Kultainen leikkaus eli jako *jatkuvassa suhteessa* tarkoittaa seuraavaa: janalla oleva piste jakaa janan kahteen osaan a ja b niin, että pidemmän osan a suhde lyhyempään osaan b on sama kuin koko janan $a+b$ suhde pidempään osaan a:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



Usein kultaisella leikkauksella viitataan tilanteeseen, jossa se esiintyy kaksiulotteisena: Kun neliötä, jonka sivun pituus on a, pidennetään toiseen suuntaan b:n verran, saadaan suorakulmio, jonka sivujen pituuksien suhde $(a+b):\ a$ on kultainen leikkaus.



Suhdetta $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ kutsutaan *kultaisen leikkauksen suhteeksi* ja sitä merkitään kreikkalaisella aakkosella φ (fii). Suhde on irrationaaliluku, joka selvästikin suurempi kuin 1 (koska $a > b$), mutta pienempi kuin 2 (koska $b < a$, joten $b + a < 2a$).

Tehtävä 1. Selvitä kokeilemalla, mikä rationaaliluku olisi lähellä kultaisen leikkauksen arvoa: Piirrä jana, jonka pituus on joko 8, 13 tai 21 ruutua ja valitse siltä jokin kokonaislukupiste, jolloin saat janan kaksi osaa a ja b. Laske nyt suhteet $\frac{a+b}{a}$, siis koko janan suhde pidempään osaan ja $\frac{a}{b}$, eli pidemmän osan suhde lyhyempään. Säädä jakopisteen paikkaa niin, että saat näille mahdollisimman lähellä toisiaan olevat arvot.

Tehtävä 2. Ratkaise yhtälöstä $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ tarkka arvo kultaisen leikkauksen suhteelle $\frac{a}{b}$. Luvuista a ja b ei tiedetä mitään muuta kuin että niitä rajoittaa tämä suhdeyhtälö. Ei siis ole mahdollista ratkaista kahden muuttujan yhtälöstä näitä lukuja erikseen, mutta on kyllä mahdollista ratkaista niiden suhde $\frac{a}{b}$.

Vinkki: Jaa vasemman puolen jakolasku kahteen osaan. Kannattaa ottaa ratkaistavalle suhteelle käyttöön merkintä $\frac{a}{b} = \varphi$ ja ilmoittaa yhtälön osat sen avulla, jolloin a ja b:n yhtälön sijaan saadaan yhtälö, joka sisältää vain yhtä tuntematonta, suhdetta φ. Ratkaisu vaatii 2. asteen yhtälön ratkaisun hallintaa, mutta sen voi myös ohittaa laskinohjelman solve-toiminnolla.

Tuloksena saadaan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (tai $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, joka kuitenkin on negatiivinen, eikä siis voi olla jakosuhde). Tästä nähdään, että $\varphi \approx 1{,}61803 \ldots$ on irrationaaliluku (mutta kuitenkin algebrallinen luku, onhan se toisen asteen polynomin nollakohta).

Saadulla luvulla φ on alkuperäisestä yhtälöstä johtuen se ominaisuus, että sen käänteisluku on luvun 1 verran pienempi kuin φ itse. Näin ollen käänteisluku on:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}61803 \ldots$$

Kultaisen leikkauksen voi myös konstruoida geometrisesti ns. harppi- ja viivainkonstruktiolla. Tällaisissa konstruointitehtävissä saa käyttää ainoastaan harppia, jolla voi piirtää ympyröitä tai siirtää jonkin kuvasta otetun etäisyyden muuttumattomana kuvan toiseen kohtaan, sekä viivainta, jolla voi piirtää suoria (mutta ei mitata etäisyyksiä). Konstruktioita on kätevää tehdä esim. Geogebralla.

Tehtävä 3. Konstruoi kultainen leikkaus harpilla ja viivaimella seuraavasti:

1. Piirrä vaakasuora jana AB, jonka pituus on tässä tehtävässä $a + b$
2. Piirrä sen toiseen päähän B jana, joka on kohtisuorassa sitä vastaan ja pituudeltaan puolet siitä. (Miten? Tarvitaan a) normaali pisteeseen B ja b) janan AB puolitus…)
3. Merkitään uuden janan päätepistettä C. Täydennä kuvio suorakulmaiseksi kolmioksi ABC.
4. C keskipisteenä, piirrä sektori, jonka säde on BC. Merkitse hypotenuusalle kaaren leikkauspiste D.
5. A keskipisteenä piirrä sektori, jonka säde on AD. Merkitse alkuperäiselle janalle kaaren leikkauspiste S.
6. Nyt S jakaa janan AB kultaisen leikkauksen suhteessa, siis AB : AS = AS : SB.

Rekursiivisia lukujonoja

Seuraavaksi tutkitaan ns. *ketjumurtolukua*

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Ketjumurtoluvun määritelmässä siis jakolaskun nimittäjänä on aina summa, jonka jälkimmäinen termi taas on samaa ketjua jatkava jakolasku. Näin yhä uusia murtolukuja tulee nimittäjään loputtomasti. Voisi kuvitella, ettei tällaisella lausekkeella välttämättä edes ole mitään hyvin määriteltyä arvoa tai jos onkin, sen määrittäminen on mahdotonta. Näin ei kuitenkaan ole. Asiaa voidaan lähestyä lukujonojen näkökulmasta:

Tehtävä 4. Muodosta lukujono, jossa ääretön ketjumurtoluku muodostetaan pala kerrallaan aloittamalla yksinkertaisesta alkutilanteesta:

- jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- toinen jäsen on $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{a_1}$
- kolmas jäsen on $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{a_2}$

Mikä säännöllisyys tässä huomataan? Miten lukujonon voisi määritellä?

Tällaista määrittelyä edellisen jäsenen avulla kutsutaan *rekursiiviseksi*. Sen avulla voidaan nyt ryhtyä selvittämään, lähestyvätkö lukujonon jäsenet jotain tiettyä lukua. Tätä voi tutkia ensin *numeerisesti*:

Tehtävä 5. Laske taulukkolaskennan (excel / libreofficen calc) avulla em. ketjumurtoluvun lukuja (vaikka 30 ensimmäistä). Kirjoita johonkin soluun lukujonon ensimmäinen jäsen ja sen alle kaava, jolla toinen jäsen lasketaan ensimmäisen avulla. Koska kaava pysyy koko ajan samana, nyt riittää kopioida sama kaava edelleen alempiin soluihin. Kannattaa käyttää taulukkolaskennan täytä alas -toimintoa. Mitä lukua lukujonon jäsenet tämän perusteella näyttävät lähestyvän.

Numeerisesti saatu tulos ei kuitenkaan vielä todista, että lukujonon jäsenet todella lähestyisivät tätä lukua, eli että lukujonolla olisi raja-arvo – voidaan vain sanoa, että jonon jäsenet näyttävät lähestyvän tätä lukua. Numeerinen ratkaisu ei myöskään paljasta mahdollisen raja-arvon tarkkaa arvoa, vain likiarvon. Jotta asia olisi tarkasti osoitettu ja tarkka arvo voitaisiin löytää tulos pitäisi vielä vahvistaa *algebrallisesti* laskemalla. Tässä tulee apuun ketjumurtoluvun määritelmään sisältyvä äärettömyys.

Tehtävä 6. Ratkaise algebrallisesti edellä esitetyn ketjumurtoluvun x arvo.

Vinkki: Tarkastellaan vain määritelmän lausekkeen ensimmäistä nimittäjää. Jos koko ketjumurtolukua merkitään kirjaimella x, mitä tämä ensimmäinen nimittäjä tällöin olisi? Koita sijoittaa ja ratkaista ehdosta x:n arvo.

Tehtävä 7. Ratkaise lausekkeen $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}}$ arvo sekä numeerisesti taulukkolaskennan avulla, että algebrallisesti.

Tutkitaan seuraavaksi mallia jänispopulaatiosta. Tämän populaatiomallin kehitti matemaatikko Leonardo Pisalainen vuonna 1202:

Tehtävä 8. Populaatio alkaa kasvaa yhdestä jänisparista ja sen kokonaismäärää tarkastellaan kuukausittain laskemalla, montako *paria* jäniksiä kaikkiaan on. Jänisten pitää kasvaa kaksi kuukautta vanhoiksi ennen kuin ne voivat lisääntyä. Siitä lähtien ne saavat kaksi poikasta, siis yhden parin kuussa. Kaikki syntyneet parit alkavat puolestaan edelleen lisääntyä kaksikuisina. Oletetaan vielä, että jänikset eivät kuole tarkastelujakson aikana. Laadi kaavio, josta näkyy, miten jänispopulaatio kehittyy ja laske, montako paria siinä on kahdeksan ensimmäisen kuukauden aikana. Minkälainen lukujono näistä muodostuu?

Fibonaccin lukujono

Fibonaccin lukujono on varmasti yksi maailman tunnetuimmista. Lukujono määritellään niin, että kaksi sen ensimmäistä jäsentä ovat ykkösiä ja tämän jälkeen jokainen sen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{kun } n > 2 \end{cases}$$

Melko tunnettua tässä jonossa on myös, että kun lasketaan sen peräkkäisten jäsenien suhteita $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, saadaan tietty mielenkiintoinen tulos.

Tehtävä 9. Tutki numeerisesti taulukkolaskennalla Fibonaccin lukujonon peräkkäisten jäsenten suhdetta. Mitä lukua se näyttää lähestyvän? $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$, jne. (Tutki esim. 30:ä ensimmäistä suhdetta.)

Vinkki: laske ensin lukujonon jäseniä: kirjoita kahteen päällekkäiseen soluun jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ja niiden alapuoliseen soluun laskukaava, jossa nämä kaksi lasketaan yhteen. Kopioi (täytä) sitten tämä kaava alaspäin niin pitkälle kuin haluat. Seuraavaksi kirjoita jonon oikeanpuoleiseen sarakkeeseen toisen jäsenen kohdalle laskukaava, joka laskee kahden ensimmäisen jäsenen suhteen, siis $\frac{a_2}{a_1}$. Kopioi (täytä) sitten puolestaan tämä kaava alaspäin.

Tämä numeerinen tarkastelu ei taaskaan ole riittävä osoitus siitä, että suhteen raja-arvo todella olisi se, miltä se näyttää. Koitetaan todistaa saatu tulos algebrallisesti. Tarkastellaan ensin tehtävän 3 tilannetta:

Tehtävä 10. Laske tehtävän 3 ketjumurtoluvun muodostavan lukujonon $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{kun } n > 1 \end{cases}$ jäseniä rationaalilukumuodossa. Mitä huomataan? Mitä tämän tuloksen perusteella voidaan päätellä?

Tehtävä 11. Osoita algebrallisesti, että Fibonaccin lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ lähestyy kultaisen leikkauksen suhdetta φ.

Vinkkejä: Ota lähtökohdaksi Fibonaccin lukujonon rekursiokaava, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Jotta siihen saataisiin peräkkäisten jäsenten suhteita, se pitäisi nyt jakaa sopivalla jäsenellä, mutta millä? Tarkoituksena on kuitenkin saada nimenomaan peräkkäisten jäsenten suhteita, miten päin hyvänsä.

Lisää vinkkejä: Edellisestä seuraa kaksi ongelmaa: 1) Toinen suhde on väärin päin, siis halutun suhteen $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ käänteisluku. Jos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a, \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{a}$. ja 2) Suhteet eivät ole samojen peräkkäisten jäsenten väliset. Tämä on hiukan hankalampaa, mutta tavallaan kyse on samasta asiasta kuin esim. ketjumurtoluvun raja-arvon määrittämisessä. Siinä luvun kaavassa oleva nimittäjä oli sama x kuin ratkaistava luku, vaikka nimittäjässä x on yksi osamäärä vähemmän. Vastaavalla tavalla, jos lasketaan Fibonaccin lukujonon peräkkäisten jäsenten suhteen raja-arvoa, jota lähestytään, kun edetään jonossa äärettömän pitkälle, ei ole merkitystä sillä tarkastellaanko suhdetta $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ vai $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, ne lähestyvät samaa arvoa. Millä tahansa äärellisellä n:n arvolla suhteet eivät olisi yhtä suuret. Nyt tätä suhdetta voidaan merkitä vaikkapa a:llä ja ratkaista se.

Siis Fibonaccin lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde lähestyy kultaisen leikkauksen suhdetta φ.

Fibonaccin lukujonon ideaa laajentamalla saadaan Tribonaccin lukujono, jonka jäsen lasketaan kolmen edellisen jäsenen summana (ja kolme ensimmäistä on ykkösiä. Vastaavasti neljän jäsenen summaa käyttää Tetranacci-jono ja viiden summaa Pentanacci-jono.

Tehtävä 12. Laske taulukkolaskennalla Tribonaccin, Tetranaccin ja Pentanaccin jonojen 30 ensimmäistä jäsentä. Tutki numeerisesti, mitä lukuarvoa näiden jonojen peräkkäisten jäsenten suhde lähestyy.

Tehtävä 13. Pohdi, miten peräkkäisten jäsenten suhde kehittyy, kun siirrytään yhä useampaa edellistä jäsentä käyttäviin jonoihin. Kasvaako suhde rajatta vai onko sillä jokin yläraja? Olisiko mahdollista ainakin jollain vakuuttavuudella todistaa, miten asiassa käy?

Kuvien lähteet

Sivun 1 janakuva: Muokattu kuvasta Wikipedia: Golden ratio line.svg, Public Domain.
https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio#/media/File:Golden_ratio_line.svg
Sivun 1 suorakulmiokuva: Wikipedia: SimilarGoldenRectangles.svg , Public Domain.
https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio#/media/File:SimilarGoldenRectangles.svg