Topi Törmä

Heronin kaava ja Heronin kolmiot

Heronin kaavalla voi laskea kolmion pinta-alan suoraan sivujen pituuksista. Kaava on nimetty antiikin Keikassa n. 2000 vuotta sitten eläneen matemaatikon Heron Aleksandrialaisen mukaan. Hän esitti kaavan ja sen todistuksen teoksessaan Metrica.

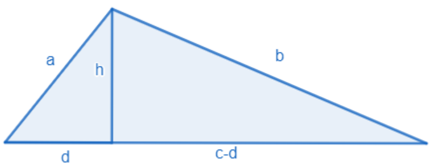
Heronin kaava: Jos kolmion sivujen pituudet ovat a, b sekä c ja puolet kolmion piiristä on $s = \frac{a+b+c}{2}$, niin kolmion pinta-ala on

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{1}$$

Esimerkki 1. Kolmion sivujen pituudet ovat 4, 7 ja 9. Tällöin kolmion piirin puolikas on $\frac{4+7+9}{2} = 10$. Heronin kaavan nojalla kolmion pinta-ala on

$$A = \sqrt{10(10-4)(10-7)(10-9)} = \sqrt{10\cdot 6\cdot 3} = \sqrt{6^2\cdot 5} = 6\sqrt{5}.$$

Heronin kaavan todistus: Tarkastellaan kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c. Voidaan olettaa, että c on kolmion pisin sivu. Merkitään kolmion pisimmälle sivulle piirrettyä korkeusjanaa kirjaimella h. Korkeusjana jakaa sivun c kahteen osaan, joiden pituudet ovat d ja $c-d$.



Pythagoraan lauseella saadaan yhtälöpari, josta voidaan ratkaista h ja d:

$$\begin{cases} d^2 + h^2 &= a^2 \\ (c-d)^2 + h^2 &= b^2 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & d^2 - (c-d)^2 = a^2 - b^2 \\ & d^2 - c^2 + 2cd - d^2 = a^2 - b^2 \\ & d = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$h = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right)^2},$$

joten kolmion pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}ch &= \frac{1}{2}c\sqrt{a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2c^2-\frac{1}{4}c^2\cdot\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{16}} = \sqrt{\frac{(2ac-c^2-a^2+b^2)(2ac+c^2+a^2-b^2)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{(b^2-(a-c)^2)((a+c)^2-b^2)}{16}} = \sqrt{\frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},
\end{aligned}
$$

missä $s=\frac{a+b+c}{2}$. □

Kolmiota, jolla sekä sivujen pituudet että pinta-ala ovat kokonaislukuja, kutsutaan Heronin kolmioksi. Esimerkiksi kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5, on Heronin kolmio, sillä sen pinta-ala on

$$\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6\cdot 3\cdot 2} = 6.$$

Mikäli lisäksi kolmion piirin ja pinta-alan arvot ovat samat, niin sovitaan, että kolmiota kutsutaan Super-Heronin kolmioksi! Tällaisia kolmioita on vain 5.

Heronin kaava voidaan yleistää jännenelikulmioille. Jännenelikulmiolla tarkoitetaan nelikulmiota, jonka kärkipisteiden kautta voidaan piirtää ympyrä. Yleistetty kaava tunnetaan Brahmaguptan kaavana 600-luvulla eläneen intialaisen matemaattikon Brahmaguptan mukaan.

Brahmaguptan kaava: Jos jännenelikulmion sivujen pituudet ovat a, b, c sekä d ja puolet jännenelikulmion piiristä on $s=\frac{a+b+c+d}{2}$, niin jännennelikulmion pinta-ala on

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \tag{2}$$

Huomaa, että kun $d=0$ (eli nelikulmio surkastuu kolmioksi) saadaan Heronin kaava.

Nyt voidaankin sitten pohtia, milloin jännenelikulmion piiri ja pinta-ala ovat molemmat kokonaislukuja ja yhtäsuuria. Paljonko tällaisia "Super-Brahmaguptan nelikulmioita"on?

Harjoitustehtävviä

Tehtävä 1. Kolmion sivujen pituudet ovat 3, 6 ja 7. Määritä kolmion pinta-ala.

Tehtävä 2. Kolmion sivujen pituudet ovat 5, 7 ja 8. Määritä kolmion pisintä sivua vastaan piirretyn korkeusjanan pituus.

Tehtävä 3. Osoita, että kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 15, 13 ja 4, on Heronin kolmio.

Tehtävä 4. Keksi esimerkki Heronin kolmiosta, jota ei ole esiintynyt tässä materiaalissa.

Tehtävä 5. Todista Heronin kaava käyttäen kosinilausetta, kolmion pinta-alan sinikaavaa $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ja trigonometrian peruslausetta $\left(\cos\gamma\right)^2 + \left(\sin\gamma\right)^2 = 1$.

Tehtävä 6. Osoita, että Heronin kolmion piiri on aina parillinen kokonaisluku.

Tehtävä 7. Etsi kaikki Super-Heronin kolmiot.

Vinkki: Muodosta yhtälö asettamalla kolmion piiri $2s$ ja Heronin kaavan antama pinta-ala yhtäsuuriksi. Lisäksi kannattaa merkitä $x = s - a$, $y = s - b$ ja $z = s - c$, jolloin yhtälön saa sievennettyä muuttujien x, y ja z yhtälöksi. Etsi yhtälölle kaikki positiiviset kokonaislukuratkaisut (x, y, z). (Seuraavalla sivulla jatkovihje.)

Voit etsiä Super-Heronin kolmioita myös sopivalla koodilla. Pohdi tällöin, miten voit varmistua siitä, että olet löytänyt kaikki.

Tehtävä 8. Todista Brahmaguptan kaava. (Vinkki seuraavalla sivulla.)

Jatkovihje tehtävään 7: Tarkasteltava yhtälö sievenee muotoon $4(x+y+z) = xyz$, missä x, y ja z ovat positiivisia kokonaislukuja. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $x \leq y \leq z$. Pohdi, kuinka suuri luku x voi olla, jotta yhtälö voi pitää paikaansa? Osoittautuu, ettei luvulle x ole kovin montaa mahdollista arvoa. Käy nämä tapaukset erikseen läpi.

Vinkki tehtävään 8: Jaa jännenelikulmio kahteen kolmioon ja sovella kolmioihin samoja kaavoja kuin tehtävässä 5. Kaavat $\sin x = \sin(180° - x)$ ja $\cos x = -\cos(180° - x)$ ovat myös hyödyllisiä. Lisäksi on hyödyllistä tietää, että jännenelikulmiossa vastakkaisten kulmien summa on 180°.