Kenguru 2017 Benjamin

(6. ja 7. luokka)

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

NIMI ____ LUOKKA _________

Pisteet: ___________ Kenguruloikan pituus: ______

Irrota tämä vastauslomake tehtävämonisteesta. Merkitse tehtävän numeron alle valitsemasi vastausvaihtoehto.

Oikeasta vastauksesta saat 3, 4 tai 5 pistettä. Joka tehtävässä on yksi oikea vastaus.

Väärästä vastauksesta saat miinuspisteitä ¼ tehtävän pistemäärästä, siis esimerkiksi 4 pisteen tehtävästä -1 piste. Tyhjästä ruudusta ei anneta miinuspisteitä.

Tavoitteita on kaksi: saada mahdollisimman paljon pisteitä tai mahdollisimman monta peräkkäistä oikeaa vastausta.

TEHTÄVÄ	1	2	3	4	5	6	7
VASTAUS	B	C	C	D	B	B	E

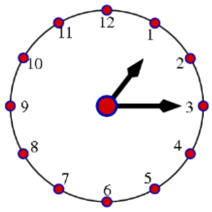
TEHTÄVÄ	8	9	10	11	12	13	14
VASTAUS	E	B	C	D	D	C	C

TEHTÄVÄ	15	16	17	18	19	20	21
VASTAUS	B	C	C	C	E	D	C

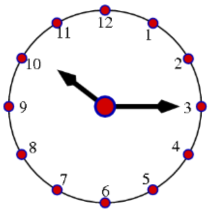
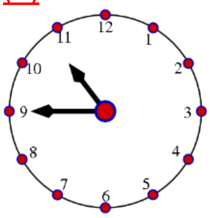
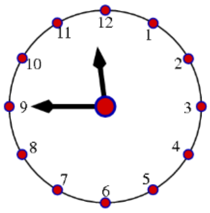
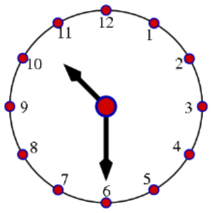
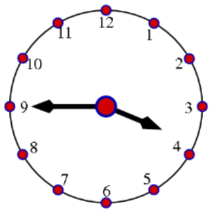
Kilpailu pidetään aikaisintaan 16.3.
Logon suunnitteli Petra Siilanen.

3 pistettä

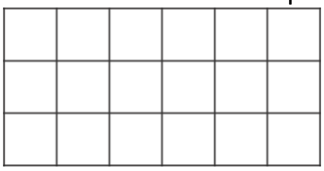
1.
Kello on nyt viisitoista yli yksi.



Kuinka paljon kello oli kaksi ja puoli tuntia sitten?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)


2.
Anssi värittää kuvassa näkyvän ruudukon siten, että kolmasosa ruuduista on sinisiä ja puolet ruuduista keltaisia. Loput ruuduista hän värittää punaiseksi.



Kuinka monta ruutua Anssi värittää punaiseksi?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Ratkaisu: Ruutuja on yhteensä 18, joten kolmasosa ruudukosta on 6 ruutua, ja puolet ruudukosta 9 ruutua. Yhteensä sinisiä ja keltaisia ruutuja on näin ollen $6 + 9 = 15$. Punaiseksi väritetään siten $18 - 15 = 3$ ruutua.

3.
Kärpäsellä on kuusi jalkaa, hämähäkillä kahdeksan jalkaa, kanalla kaksi jalkaa ja kissalla neljä jalkaa. Kolmella kärpäsellä ja kahdella hämähäkillä on yhteensä niin monta jalkaa kuin yhdeksällä kanalla ja

(A) kahdella kissalla (B) kolmella kissalla (C) neljällä kissalla (D) viidellä kissalla (E) kuudella kissalla

Ratkaisu: Kolmella kärpäsellä ja kahdella hämähäkillä on yhteensä $3 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 24$ jalkaa. Koska yhdeksällä kanalla on $9 \cdot 2 = 18$ jalkaa, jäljelle tarvitaan vielä 16 jalkaa. Koska kissalla on neljä jalkaa, saadaan kissojen lukumäärä jakamalla luku 16 luvulla 4: $16 : 4 = 4$.

4.

Yasiin tietää, että $1111 \cdot 1111 = 1234321$. Kuinka paljon on $1111 \cdot 2222$?

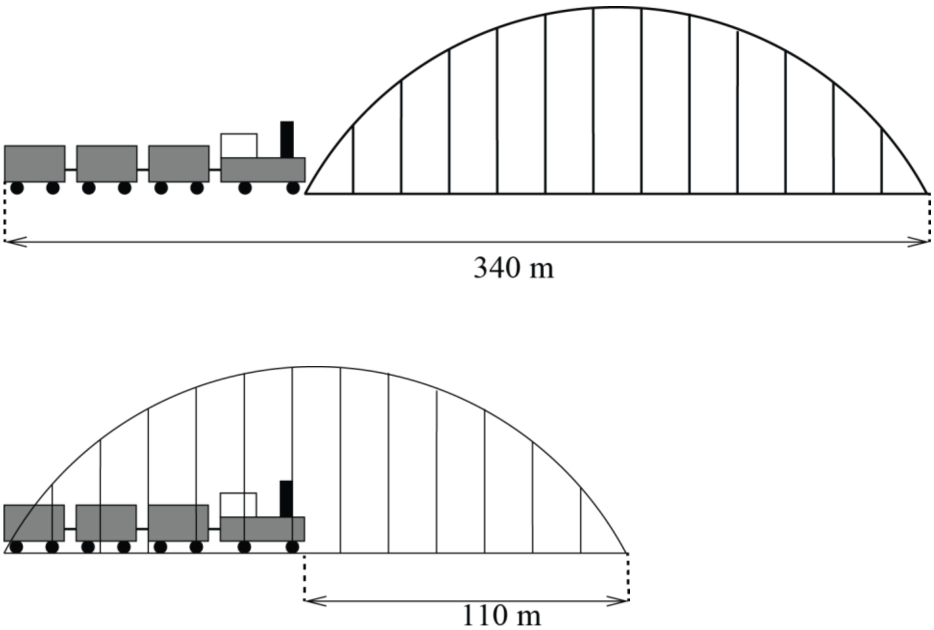
(A) 3456543 (B) 2345432 (C) 2234322 (D) 2468642 (E) 4321234

Ratkaisu: Koska $2222 = 1111 \cdot 2$, voidaan kirjoittaa

$1111 \cdot 2222 = 1111 \cdot 1111 \cdot 2 = 1234321 \cdot 2 = 2468642$

5.

Kuinka pitkä juna on?



(A) 55 m (B) 115 m (C) 170 m (D) 220 m (E) 230 m

Ratkaisu: Laittamalla kaksi junaa peräkkäin (toinen sillalle, toinen sillan ulkopuolelle) saadaan junien yhteispituudeksi $340\text{ m} - 110\text{ m} = 230\text{ m}$. Siispä junan pituus on puolet tästä eli $230\text{ m} : 2 = 115\text{ m}$.

6.

Aino on asettanut neljä korttia kuvan mukaiseen järjestykseen.

2 0 1 7

Mitä seuraavista järjestyksistä ei ole mahdollista muodostaa vaihtamalla vain kahden kortin paikkaa?

(A) 2 7 1 0

(B) 0 1 2 7

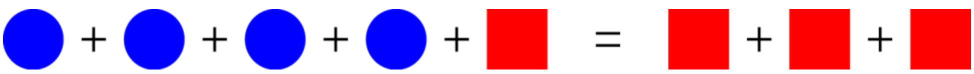
(C) 1 0 2 7

(D) 0 2 1 7

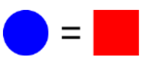
(E) 2 0 7 1

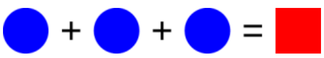
Ratkaisu: Koska vain kahden kortin paikan keskenään vaihtaminen on sallittua, täytyy kahden kortin olla siirron jälkeen entisellä paikallaan. Näin ei ole vaihtoehdossa B, joten sen muodostaminen ei ole mahdollista.

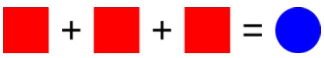
7.

Tiedetään, että 

Mikä seuraavista pitää paikkansa?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

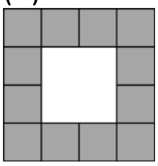
Ratkaisu: Poistamalla punainen neliö yhtäsuuruusmerkin molemmilta puolilta, tiedetään että neljä sinistä ympyrää vastaa kahta punaista neliötä. Siksi yhtä punaista neliötä vastaa kaksi sinistä ympyrää eli vaihtoehto E on oikein.

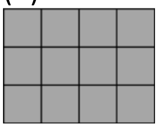
4 pistettä

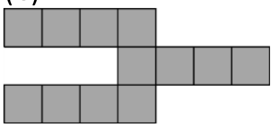
8.

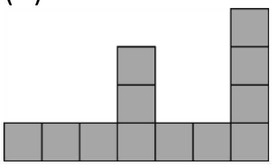
Adnalla on neljä tällaista kuviota: 

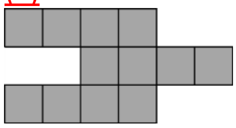
Mitä seuraavista kuvioista Adnan ei ole mahdollista muodostaa kuvioiden avulla?

(A)


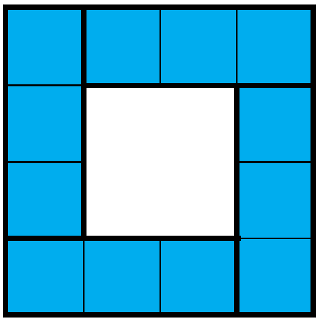
(B)


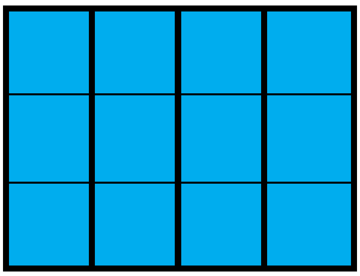
(C)


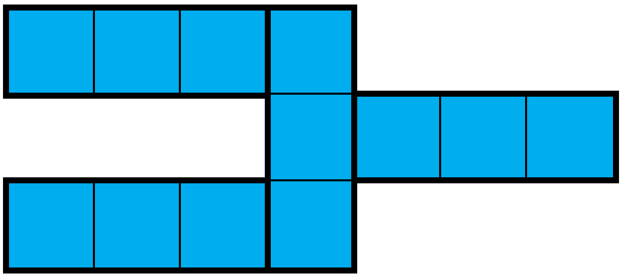
(D)


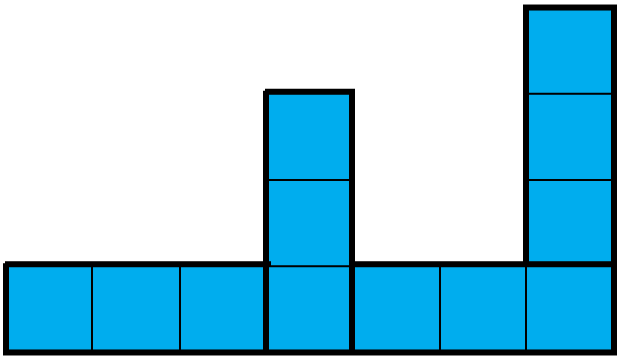
(E)


Ratkaisu:

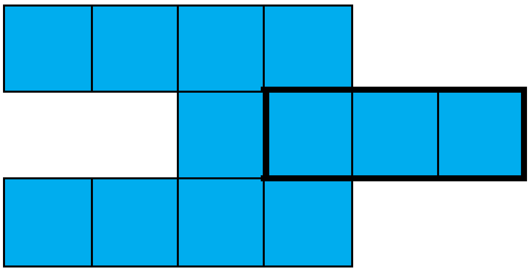
Kuvio A onnistuu näin: 

Kuvio B onnistuu näin: 

Kuvio C onnistuu näin: 

Kuvio D onnistuu näin: 

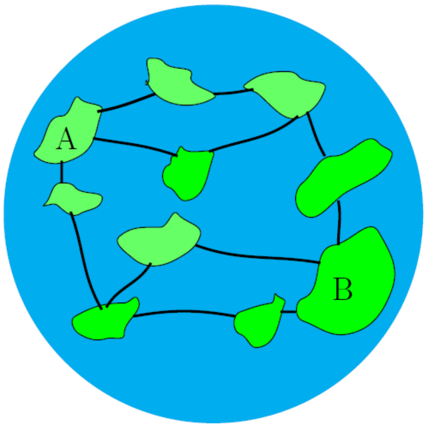
Kuvio E ei onnistu. Kuvion oikea reuna on pakko rakentaa kuvan mukaisesti, ja tämän jälkeen kuvion loppuosan rakentaminen ei enää onnistu. Ylhäällä ja alhaalla on neljän ruudun pätkät, joita ei voi kolmen ruudun pätkällä täyttää.



9.

Eräällä planeetalla on kymmenen saarta ja kaksitoista siltaa (ks. kuva). Kaikilla silloilla on liikennettä.

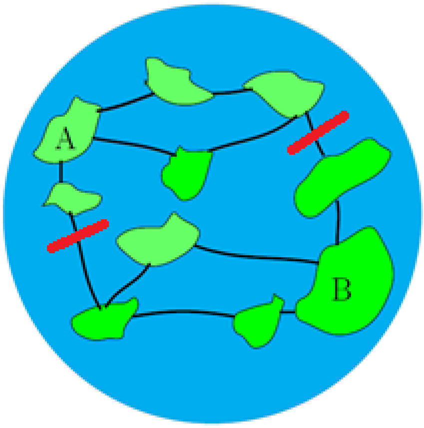
Mikä on pienin määrä siltoja, jotka on suljettava, jotta pääsy saarelta A saarelle B estyy?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Ratkaisu:

Saarelle B vie kolme siltaa, mutta sopivasta paikasta leikkaamalla kahden sillan tuhoaminen riittää.



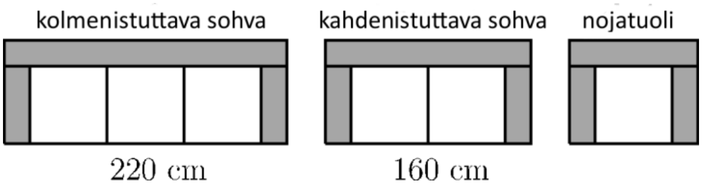
10.
Jere kävi patikoimassa viiden päivän ajan, maanantaista perjantaihin. Hän käveli joka päivä 2 km pidemmän matkan kuin edellisenä päivänä. Yhteensä hän käveli viitenä päivänä 70 kilometriä. Kuinka pitkän matkan Jere käveli torstaina?

(A) 12 km (B) 14 km (C) 16 km (D) 18 km (E) 20 km

Ratkaisu:
Tiistaina Jere käveli 2 km pidemmän matkan kuin maanantaina, keskiviikkona 4 km pidemmän matkan, torstaina 6 km pidemmän matkan ja perjantaina 8 km pidemmän matkan. Yhteensä hän siis käveli viisi kertaa maanantain patikkamatkan ja lisäksi $2\text{ km} + 4\text{ km} + 6\text{ km} + 8\text{ km} = 20\text{ km}$. Näin ollen maanantaina kävelty matka saadaan jakamalla puuttuvat 50 km viidellä. Maanantaina Jere käveli siis $50\text{ km} : 5 = 10\text{ km}$. Torstaina kävelty matka oli siten $10\text{ km} + 6\text{ km} = 16\text{ km}$.

11.

Huonekaluliikkeessä on myynnissä kolmenistuttavia sohvia, kahdenistuttavia sohvia ja nojatuoleja. Kaikkien istuimien osat selkänojaa lukuun ottamatta samankokoisia istuimesta riippumatta. Kuvassa istuimet näkyvät ylhäältä katsottuna. Käsinojat mukaan luettuna kolmenistuttavan sohvan leveys on $220\ \mathrm{cm}$ ja kahdenistuttavan sohvan leveys on $160\ \mathrm{cm}$.



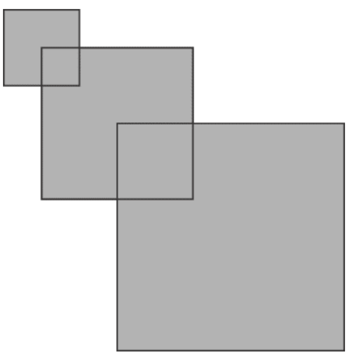
Kuinka leveä nojatuoli on?

(A) $60\ \mathrm{cm}$ (B) $80\ \mathrm{cm}$ (C) $90\ \mathrm{cm}$ (D) $100\ \mathrm{cm}$ (E) $120\ \mathrm{cm}$

Ratkaisu: Koska kolmenistuttavan ja kahdenistuttavan sohvan leveys eroaa vain yhden istuinelementin (kuvassa valkoinen suorakulmio) verran, saadaan elementin leveys vähentämällä kahdenistuttavan sohvan leveys kolmenistuttavan sohvan leveydestä: $220\ \mathrm{cm} - 160\ \mathrm{cm} = 60\ \mathrm{cm}$. Vastaavasti nojatuolin leveys eroaa kahdenistuttavan sohvan leveydestä istuinelementin leveyden verran, joten nojatuolin leveys saadaan vähentämällä yhden istuinelementin leveys ($60\ \mathrm{cm}$) kahdenistuttavan sohvan leveydestä: $160\ \mathrm{cm} - 60\ \mathrm{cm} = 100\ \mathrm{cm}$. Näin ollen vaihtoehto D on oikein.

12.

Eemi piirsi kolme neliötä osittain päällekkäin kuvassa näkyvällä tavalla ja väritti niiden muodostaman kuvion. Pienimmän neliön sivun pituus on $2\ \mathrm{cm}$. Keskimmäisen neliön sivun pituus on $4\ \mathrm{cm}$ ja sen kärki on pienimmän neliön keskipisteessä. Suurimman neliön sivun pituus on $6\ \mathrm{cm}$ ja sen kärki on keskimmäisen neliön keskipisteessä. Kuinka suuri on väritetyn alueen pinta-ala?



(A) $16\ \mathrm{cm}^2$ (B) $27\ \mathrm{cm}^2$ (C) $32\ \mathrm{cm}^2$ (D) $51\ \mathrm{cm}^2$ (E) $56\ \mathrm{cm}^2$

Ratkaisu:
Pienen neliön pinta-ala $= 2\ \mathrm{cm} \cdot 2\ \mathrm{cm} = 4\ \mathrm{cm}^2$ (neljännes $= 4\ \mathrm{cm}^2 : 4 = 1\ \mathrm{cm}^2$)
Keskimmäisen neliön pinta-ala $= 4\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm} = 16\ \mathrm{cm}^2$ (neljännes $= 16\ \mathrm{cm}^2 : 4 = 4\ \mathrm{cm}^2$)
Suurimman neliön pinta-ala $= 6\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm} = 36\ \mathrm{cm}^2$
Neliöiden pinta-alat yhteensä $= 4\ \mathrm{cm}^2 + 16\ \mathrm{cm}^2 + 36\ \mathrm{cm}^2 = 56\ \mathrm{cm}^2$

Koska suuremman neliön kärki sijaitsee pienemmän keskipisteessä ja neliöiden sivut ovat yhdensuuntaiset, peittää isompi neliö neljäsosan pienemmästä neliöstä, joten riittää laskea kaikkien kolmen neliön pinta-alat yhteen ja vähentää siitä neljännes pienimmän neliön pinta-alasta sekä neljännes keskimmäisen neliön pinta-alasta:

$$56\ \mathrm{cm}^2 - 1\ \mathrm{cm}^2 - 4\ \mathrm{cm}^2 = 51\ \mathrm{cm}^2$$

Siispä vaihtoehto D on oikein.

13.
Maria kirjoitti peräkkäin kaikki luvut yhdestä kahteenkymmeneen ja sai siten 31-numeroisen luvun 1234567891011121314151617181920. Tämän jälkeen hän poisti luvusta 24 numeroa siten, että jäljelle jäänyt luku oli mahdollisimman suuri. Minkä luvun Maria sai?

(A) 9671819 (B) 9567892 (C) 9781920 (D) 9912345 (E) 9818192

Ratkaisut: Koska joku vaihtoehdoista on oikein, riittää käydä vaihtoehdot läpi suurimmasta pienimpään ja valita ensimmäinen mahdollinen vaihtoehto.

Vaihtoehto D ei ole mahdollinen, sillä koska alkuperäisen luvun numeroiden järjestystä ei vaihdeta, kahden yhdeksikön jälkeen ei voi olla numeroita 1, 2, 3, 4 tai 5 (numeroita 9 on vain kaksi ja ainoat numerot viimeisen yhdeksikön jälkeen ovat 2 ja 0).

Samoin toiseksi suurin vaihtoehto E ei ole mahdollinen, sillä mainitun kahden yhdeksikön välillä ei ole kahta numeroa 8.

Sen sijaan vaihtoehto C on mahdollinen. Alla näkyvät poistetut numerot yliviivattuina:

$$\cancel{12345678}9\cancel{101112131415161}7\cancel{1}81920$$

14.

Pussissa on vain punaisia ja vihreitä marmorikuulia. Kun Tuomas poimii pussista viisi marmorikuulaa, ainakin yksi niistä on punainen. Kun kuulia otetaan kuusi, vähintään yksi niistä on vihreä. Kuinka monta kuulaa pussissa voi enintään olla?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

Ratkaisu: Koska viidestä poimitusta kuulasta yhden täytyy olla punainen, muita kuin punaisia kuulia voi olla enintään neljä. Vastaavasti, koska kuudesta poimitusta kuulasta yhden täytyy olla vihreä, muita kuin vihreitä kuulia voi olla enintään viisi. Näin ollen marmorikuulia voi olla pussissa enintään $4 + 5 = 9$ kappaletta.

5 pistettä

15.

Daniel suunnittelee juoksulenkeilleen aikataulua. Hän haluaa käydä lenkillä täsmälleen kaksi kertaa viikossa, joka viikko samoina viikonpäivinä. Hän ei koskaan halua lenkkeillä peräkkäisinä päivinä. Kuinka monella tavalla Daniel voi valita juoksupäivänsä?

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10 (E) 8

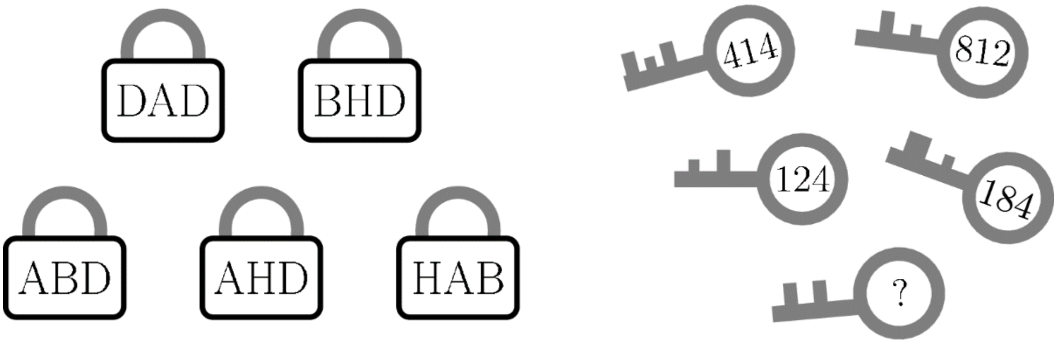
Ratkaisu:

Taulukoidaan mahdolliset juoksupäivät.

ma	ti	ke	to	pe	la	su
x		x				
x			x			
x				x		
x					x	
	x		x			
	x			x		
	x				x	
	x					x
		x		x		
		x			x	
		x				x
			x		x	
			x			x
				x		x

Erilaisia mahdollisuuksia juoksupäivien valinnalle on 14.

16.
Jokaiseen viidestä lukosta sopii vain sen oma avain. Avaimissa on koodi: avainten numerot vastaavat lukkojen kirjaimia.



Mitä viimeisessä avaimessa lukee?

(A) 382 (B) 282 (C) 284 (D) 823 (E) 824

Ratkaisu:
Ainut lukko, jossa on kaksi samaa kirjainta, on DAD. Täten avain 414 (ainoana, jossa on kaksi samaa numeroa) sopii tähän lukkoon. Voidaan päätellä, että D = 4 ja A = 1.

Koska HAB on ainoa lukko, jossa keskimmäinen kirjain on A (lukon DAD lisäksi) ja 812 ainoa avain, jonka keskimmäinen numero on 1 (avaimen 414 lisäksi), voidaan päätellä, että H = 8 ja B = 2.

Näin ollen ABD = 124 ja AHD = 184.

Jäljelle jää lukko BHD, jota vastaa yllä olevan perusteella avain 284 eli vaihtoehto C on oikein.

17.
Neljä opettajaa teki maaleja käsipallo-ottelussa, jokainen eri määrän maaleja. Heistä vähiten maaleja teki Harri. Muut kolme opettajaa tekivät yhteensä 20 maalia. Kuinka monta maalia Harri korkeintaan teki?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Ratkaisu:
Harri saattoi tehdä 4 maalia (jolloin muut tekivät esimerkiksi $5, 6$ ja 9 maalia: $5+6+9=20$). Tämä on myös suurin mahdollinen määrä, sillä jos hän teki esimerkiksi 5 maalia, saivat muut kolme vähintään $6+7+8=21$ maalia. Siispä vaihtoehto C on oikein.

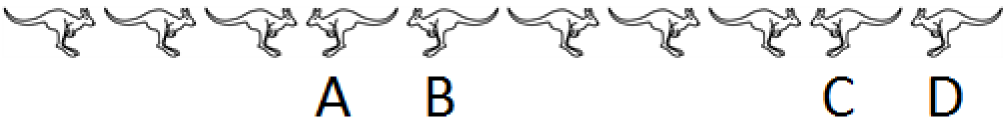
18.

Kymmenen kengurua seisoi jonossa kuvan mukaisesti. Yhtäkkiä kaksi vierekkäistä, toisiinsa katsovaa kengurua vaihtoivat paikkaa hyppäämällä toistensa ohi. Sama toistui, kunnes yksikään paikanvaihto ei enää ollut mahdollinen. Kuinka monta paikanvaihtoa tapahtui yhteensä?

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

Ratkaisu:

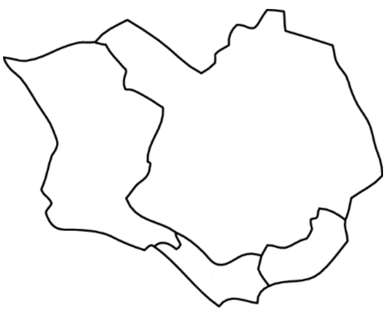
Vasemmalle katsovia kenguruita on neljä ja oikealle katsovia kuusi. Jokainen vasemmalle katsova kenguru voi hypätä oikealle katsovien kenguruiden yli.



Kenguru A voi hypätä kolmen kengurun yli, samoin kenguru B.
Kenguru C voi hypätä kuuden kengurun yli, samoin kenguru D.
Tämän jälkeen paikanvaihtoja ei enää voi tapahtua.
Paikanvaihtoja tapahtui yhteensä $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 18$.

19.

Amralla on neljä eriväristä värikynää, joilla hän aikoo värittää kuvassa näkyvän saaren kartan. Saari jakautuu neljään valtioon, eikä kahta valtiota voi värittää keskenään samalla värillä, mikäli niillä on yhteistä rajaa. Kukin valtio väritetään yhdellä värillä. Kuinka monella tapaa Amra voi kartan värittää?



(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36 (E) 48

Ratkaisu:

Oletetaan ensin, että Amra käyttää kaikkia neljää väriä. Hän voi värittää vasemmanpuoleisimman maan neljällä eri värillä. Tämän jälkeen hän voi värittää oikealla ylhäällä olevan maan kolmella eri värillä ja keskellä alhaalla olevan maan kahdella eri värillä. Viimeiselle maalle on tämän jälkeen vain yksi mahdollinen väri. Vaihtoehtoja on siis $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

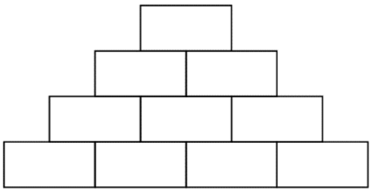
Oletetaan sitten, että Amra käyttää vain kolmea väriä. Tällöinkin hän voi valita aloitusvärin neljällä eri tavalla, eli hän voi värittää vasemmanpuoleisimman maan neljällä eri värillä. Tämän jälkeen hän voi värittää oikealla ylhäällä olevan maan kolmella eri värillä ja keskellä alhaalla olevan maan kahdella eri värillä. Viimeiselle maalle on tämän jälkeen vain yksi mahdollinen väri, nimittäin väri, jolla Tomas aloitti värittämisen. Vaihtoehtoja on siis $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Alle kolmella värillä karttaa ei voi värittää, sillä yhteisten rajojen vuoksi kolme vasemmanpuoleisinta maata on väritettävä keskenään eri väreillä.

Väritysmahdollisuuksia on siis $24 + 24 = 48$.

20.

Aku täyttää kuvan yhteenlaskupyramidin kokonaisluvuilla. Yhteenlaskupyramidissa jokainen ruutu sisältää yhden luvun ja jokainen ylemmän rivin luku saadaan laskemalla suoraan sen alla olevien kahden ruudun luvut yhteen. Kuinka monta paritonta lukua Akun yhteenlaskupyramidissa voi enimmillään olla?

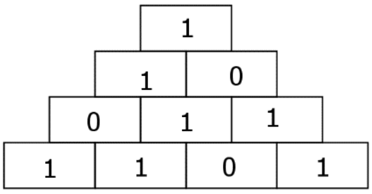


(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

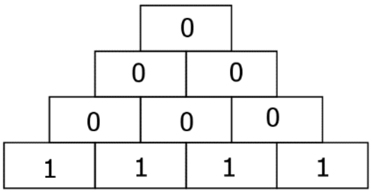
Ratkaisu:

Parittomuuden ja parillisuuden kannalta lukujen suuruuksilla ei ole merkitystä, ainoastaan sillä, ovatko luvut parittomia vai parillisia. Merkitään paritonta lukua luvulla 1 ja parillista lukua luvulla 0.

Ainakin 7 paritonta onnistuu, esimerkiksi näin:



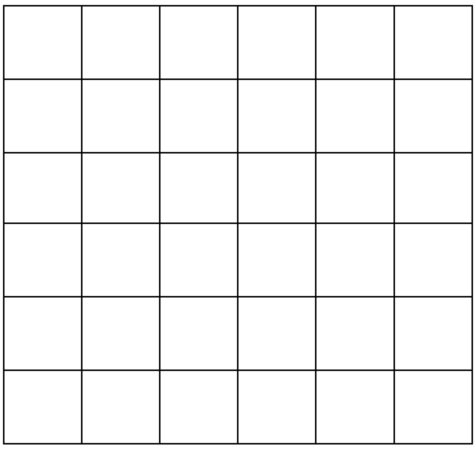
Tarkastelemalla alimman rivin eri vaihtoehtoja havaitaan, että suurempi määrä parittomia lukuja ei ole mahdollinen. Jos kaikki neljä alarivin lukua olisivat parittomia, olisivat kaikki ylempien rivien luvut parillisia, eikä parittomia lukuja kuviossa olisi kuin neljä:



Tästä voidaan päätellä, että jotta ylemmillä riveillä olisi parittomia lukuja, on jokaisella rivillä (lukuun ottamatta ylintä riviä) oltava vähintään yksi pariton ja vähintään yksi parillinen luku. Koska kolmelle alimmalle riville tulee lukuja 4, 3 ja 2 kappaletta, voi niillä olla parittomia lukuja enintään $3 + 2 + 1 = 6$ kappaletta. Kun kuvion päällimmäinen luku on pariton, voi lukuja näin ollen olla enintään 7 kappaletta, joten vaihtoehto D on oikein.

21.

6 X 6 -pelilaudan jokaisessa ruudussa on tasan yksi lamppu. Sellaisia lamppuja, joiden ruuduilla on yhteinen sivu, sanotaan naapureiksi. Osa lampuista sytytetään ja joka minuutti ne lamput, joilla on vähintään kahdessa naapurissa valo, syttyvät. Kuinka monta lamppua alussa on vähintään sytytettävä, jotta kaikki lamput saadaan lopulta syttymään?



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Ratkaisu:

Ainakin 6 lamppua riittää, kun lamput (tässä 0) asetetaan pelilaudan nurkasta nurkkaan kuvan mukaisesti:

5	4	3	2	1	0
4	3	2	1	0	1
3	2	1	0	1	2
2	1	0	1	2	3
1	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	5

Minuutin päästä syttyvät lamput on merkitty luvulla 1, minuutti näiden jälkeen syttyvät luvulla 2 jne.

Todetaan vielä, että 6 lamppua on myös pienin vaadittava määrä:

Jotta kahden lampun onnistuu sytyttää kaksi muuta lamppua, on niiden oltava nurkistaan kiinni toisissaan. Esimerkiksi:

1	0
0	1

3 x 3 -ruudukon vaadittava vähimmäismäärä palavia lamppuja on 3, sillä kahden lampun sytyttämisellä saadaan sytytettyä enimmillään yllä esitelty 2 x 2 -ruudukko. Esimerkiksi:

1	0	
0	1	

Vastaavasti 4 x 4 -ruudukon sytyttämiseen vaaditaan vähintään 4 lamppua, 5 x 5 -ruudukon sytyttämiseen vaaditaan vähintään 5 lamppua ja 6 x 6 -ruudukon sytyttämiseen vaaditaan vähintään 6 lamppua.