

**3 pistettä****1.**

Jalkapalloseura FC Kangaroo teki kolmessa ottelussa yhteensä kolme maalia. Vastustajat tekivät näissä otteluissa yhteensä vain yhden maalin. Kangaroo voitti näistä otteluista yhden, hävisi yhden ja pelasi yhden tasan. Mikä oli tulos siinä ottelussa, jonka Kangaroo voitti?

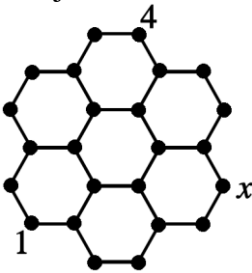
- (A) 2-0 **(B) 3-0** (C) 1-0 (D) 2-1 (E) 0-1

Ratkaisu:

Koska vastustajat tekivät vain yhden maalin, FC Kangaroo hävisi yhden pelin 0-1. Tasapelin täytyi siis päättyä 0-0, joten voittopeli päättyi 3-0.

2.

Kuvioon kirjoitetaan luku jokaisen pisteen paikalle siten, että jokaisen janan päätepisteissä olevien lukujen summa on sama.



Kaksi lukua on kirjoitettu valmiiksi. Mikä luku tulee x :n paikalle?

- (A) 1** (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) tarvitaan lisätietoja

Ratkaisu:

Jotta ehdot täyttävä numerointi olisi mahdollista, pisteissä voi esiintyä korkeintaan kahta lukua. Kun lasketaan luvusta 1 lähtien joka toinen piste käy ilmi, että $x = 1$. Luvulla 4 ei ole ratkaisun kannalta merkitystä.

3.

Kolme kuljettajaa osallistui kilpa-ajoon: Michael, Fernando ja Sebastian. Heti lähdön jälkeen Michael oli johdossa, Fernando toisena ja Sebastian kolmantena. Kilpailun aikana Michaelin ja Fernandon keskinäinen paremmuusjärjestys vaihtui 9 kertaa, Fernandon ja Sebastianin 10 kertaa sekä Michaelin ja Sebastianin 11 kertaa. Missä järjestyksessä kuljettajat tulivat maaliin?

- (A) Michael, Fernando, Sebastian **(B) Fernando, Sebastian, Michael** (C) Sebastian, Michael, Fernando (D) Sebastian, Fernando, Michael (E) Fernando, Michael, Sebastian

Ratkaisu:

Jos ohituksia on parillinen määrä, järjestys ei muutu ja vastaavasti pariton määrä muuttaa sen. Siis Fernando saapuu maaliin ennen Michaelia ja Sebastiania ja Sebastian ennen Michaelia.

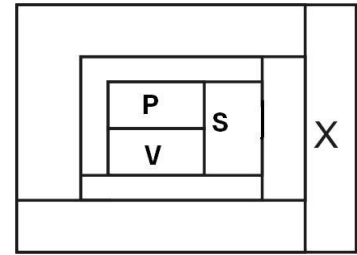


Kenguru 2011 Student RATKAISUT
(lukion 2. ja 3. vuosi)

4.

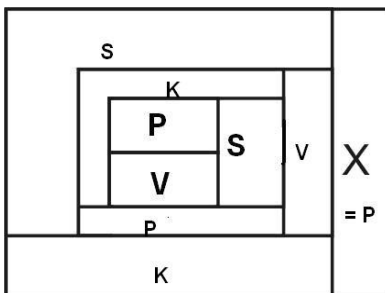
Jokainen kuvan alue väritetään yhdellä värillä joko punaiseksi (P), vihreäksi (V), siniseksi (S) tai keltaiseksi (K). Kolme aluetta on jo väritetty.

Toisissaan kiinni olevat alueet ovat aina erivärisiä. Mikä väri tulee kirjaimella X merkittyyn alueeseen?



- (A) punainen (B) sininen (C) vihreä (D) keltainen (E) ei voi päätellä näillä tiedoilla

Ratkaisu:



5.

Tiedetään, että $2^x = 15$ ja $15^y = 32$. Kuinka paljon on xy ?

- (A) 5 (B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ (C) $\log_2 47$ (D) 7 (E) $\sqrt{47}$

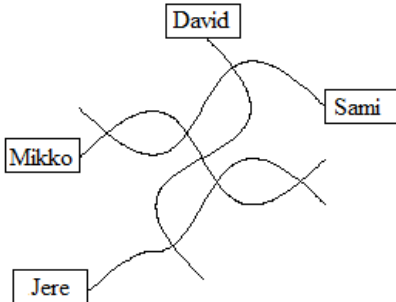
Ratkaisu:

$$32 = 15^y = (2^x)^y = 2^{xy} \Leftrightarrow xy = 5$$



6.

Ollessaan laivamatkalla Joni yritti piirtää kartan kotikylästään, mutta merenkäynti oli kovaa ja laiva keinui.



Hän onnistui piirtämään neljä katua, niiden seitsemän risteystä ja ystäviensä talot. Oikeasti Nuolikatua, Naulakatu ja Viivainkatu ovat kuitenkin aivan suoria. Neljäs katu on Mutkatie. Kuka asuu Mutkatiellä?

- (A) David (B) Jere (C) Mikko (D) Sami (E) ei voida tietää tämän kartan perusteella

Ratkaisu:

Mikon kotikatua on ainoa tie, joka risteää kahdesti kahden eri tien (kahdesti Samin ja kahdesti Jeren kotikadun) kanssa. Siten joko Mikon kotikatua ei ole suoria tai kumpikaan Jeren ja Samin kotikaduista ei ole suoria. Koska kaikki paitsi yksi katu ovat suoria, Mikko asuu Mutkatiellä.

7.

Kaikki nelinumeroiset luvut, joiden numeroiden summa on 4, luetellaan suurimmasta pienimpään. Kuinka mones luku listassa on 2011?

- (A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9. (E) 10.

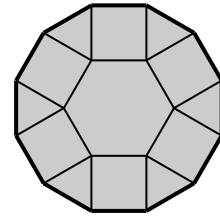
Ratkaisu:

4000,
3100,
3010,
3001,
2200,
2110,
2101,
2020,
2011.



8.

Oheinen kuvio koostuu säännöllisestä kuusikulmiosta, jonka sivun pituus on yksi, sekä kuudesta kolmiosta ja kuudesta neliöstä.



Mikä on kuvion piiri?

- (A) $6(1 + \sqrt{2})$ (B) $6(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ **(C) 12** (D) $6 + 3\sqrt{2}$ (E) 9

Ratkaisu:

Koska kuusikulmion sivun pituus on 1, on myös neliön sivun pituus 1, joten kolmiot ovat tasakylkisiä ja kylkien pituus on 1. Kuusikulmion kulmien summa on $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$ ja yksi kulma $720^\circ : 6 = 120^\circ$. Siten kolmion huippukulma on $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, joten kolmio on tasasivuinen ja sen sivun pituus on 1. Koska sekä kolmion että neliön sivun pituus on 1, on piiri $12 \cdot 1 = 12$.

9.

48 lasta lähti lomamatkalle laskettelemaan. Kuudella heistä oli mukanaan täsmälleen yksi sisarus, yhdeksällä täsmälleen kaksi sisarusta ja neljällä täsmälleen kolme sisarusta. Muilla lapsilla ei ollut sisarusia mukanaan. Kuinka monta perhettä matkalle lähti yhteensä?

- (A) 19 (B) 25 (C) 31 **(D) 36** (E) 48

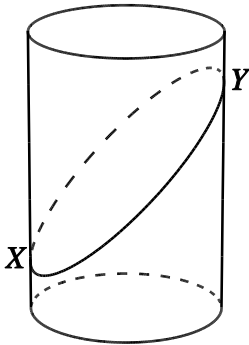
Ratkaisu:

Kahden lapsen perheitä on oltava 3, kolmen lapsen perheitä 3 ja neljän lapsen perheitä 1. Näistä tulee yhteensä $6 + 9 + 4 = 19$ lasta, loput 29 ovat liikkeellä ilman sisarusia. Perheitä on siis yhteensä $3 + 3 + 1 + 29 = 36$.



10.

Suorakulmion muotoinen paperinpala kierretään suoran ympyrälieriön ympärille. Sitten paperi ja lieriö leikataan kuvan mukaisesti tasolla, joka kulkee pisteiden X ja Y kautta.



Paperin alempi puolisko levitetään. Miltä näistä se voisi näyttää?

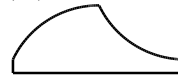
(A)



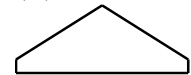
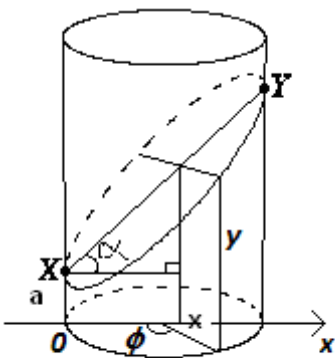
(B)

(C)

(D)



(E)

*Ratkaisu:*

Nopeasti on pääteltävissä, että kaikki muut paitsi C ovat mahdottomia: ne nimittäin sisältävät terävän ”nokan” eli pisteen, jossa käyrän derivaatta ei ole määritelty. C on ainoa sileä. Oikea käyrä on muodoltaan sinikäyrä. Viereisen kuvan merkinnöillä on nimittäin

$$x = 1 - \cos \phi \text{ ja } y = a + x \tan \alpha.$$

Kulma α on leikkaustason kaltevuuskulma, joten $u = \tan \alpha$ on vakio.

Saadaan

$$y = a + ux = a + u(1 - \cos \phi) = a + u - u \cos \phi = k \cos \phi + b,$$

ja edelleen

$$y = k \cos \phi + b, \text{ missä } k = -u \text{ ja } b = a + u.$$

4 pistettä

11.

Jesse kirjoitti taululle parittomat luvut luvusta 1 lukuun 2011. Bob pyyhki pois kaikki kolmella jaolliset. Kuinka monta lukua taululle jäi?

(A) 335

(B) 336

(C) 671

(D) 1005

(E) 1006

Ratkaisu:

Taululla on alussa 1006 lukua. Välillä $[1, 2011]$ on 670 kolmella jaollista lukua ($2010 = 3 \cdot 670$). Niistä joka toinen on parillinen, joten pyyhittäviä lukuja on 335. $1006 - 335 = 671$.



12.

Veljekset Andrej ja Brano kuuluvat shakkikerhoon. He kertovat (totuudenmukaisesti) seuraavaa:
Andrej: ”Kaikki kerhomme jäsenet viittä lukuun ottamatta ovat poikia.”

Brano: ”Jokaisessa kerhon jäsenistä muodostetussa kuuden hengen ryhmässä on ainakin neljä tyttöä.”

Kuinka monta jäsentä kerhossa on?

- (A) 6 **(B) 7** (C) 8 (D) 12 (E) 18

Ratkaisu:

Andrej sanoo, että tyttöjä on 5. Branon väite on totta vain, jos poikia on nolla, yksi tai kaksi. Koska Andrej ja Brano ovat poikia, oikea vastaus on $5 + 2 = 7$.

13.

Ämpärissä on palloja, joihin on kuhunkin kirjoitettu eri positiivinen kokonaisluku. 30 pallossa on kuudella jaollinen luku, 20 pallossa seitsemällä jaollinen luku ja 10 pallossa on 42:lla jaollinen luku. Kuinka monta palloja on vähintään?

- (A) 30 **(B) 40** (C) 53 (D) 54 (E) 60

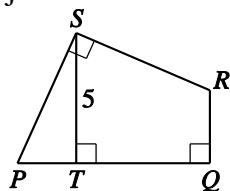
Ratkaisu:

Kuudella jaollisten pallojen ja seitsemällä jaollisten pallojen joukoilla on 10 samaa jäsentä, joten näitä palloja on yhteensä $20 + 30 - 10 = 40$. Tämä on siis minimi. Lisäksi voi olla palloja, jotka eivät ole jaollisia kuudella tai seitsemällä.

14.

Kuvassa on nelikulmio $PQRS$, jolle pätee $PS = SR$, $\sphericalangle PSR = \sphericalangle RQP = \sphericalangle QTS = 90^\circ$

ja $ST = 5$.

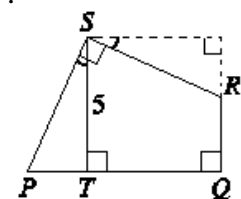


Mikä on nelikulmion $PQRS$ pinta-ala?

- (A) 20 (B) 22,5 **(C) 25** (D) 27,5 (E) 30

Ratkaisu:

Täydennetään nelikulmio $RSTQ$ suorakulmioksi. Lisätty kolmio on yhtenevä kolmion PTS kanssa (kks), sillä kuvaan merkityt kulmat ovat yhtä suuret (molemmat ovat kulman TSR komplementtikulmia) ja lisäksi $PS = SR$. Syntyi siis neliö; kysytty ala on $5 \cdot 5 = 25$.





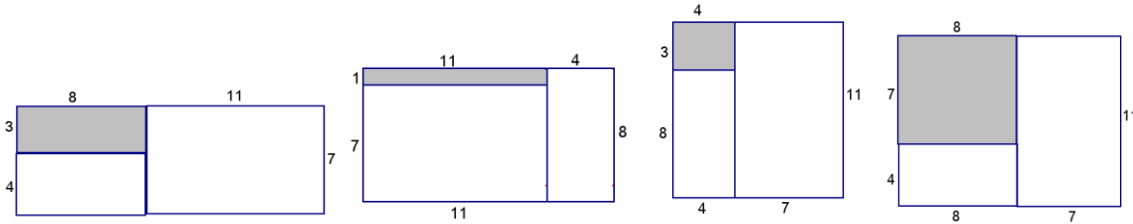
15.

Kolmesta suorakulmiosta halutaan rakentaa ilman aukkoja tai päällekkäisyyksiä suurempi suorakulmio. Yhden suorakulmion mitat ovat 7×11 ja toisen 4×8 . Kolmannesta suorakulmiosta halutaan alaltaan mahdollisimman suuri. Mitkä ovat sen mitat?

- (A) 1×11 (B) 3×4 (C) 3×8 **(D) 7×8** (E) 7×11

Ratkaisu:

Mahdolliset asetelmat ovat



Näistä suurin ala on 7×8 -suorakulmiolla.

16.

Lentoyhtiö ei laskuta tiettyyn kilorajaan asti matkatavaroista mitään. Jokaisesta tämän ylittävästä kilosta maksetaan kiinteä hinta. Herra ja rouva Matka maksoivat 60 kg matkatavaroistaan yhteensä 3 euroa. Herra Kulkuri joutui maksamaan samasta kilomäärästä 10,50 €. Kuinka paljon matkatavaroita yksin matkustava saa viedä ilmaiseksi?

- (A) 10 kg (B) 18 kg (C) 20 kg **(D) 25 kg** (E) 39 kg

Ratkaisu:

Olkoon suurin ilmainen paino x kg ja maksu ylikiloista y €/kg. Saadaan:

$$\begin{cases} (60 - 2x) \cdot y = 3 \\ (60 - x) \cdot y = 10,50 \end{cases} \Rightarrow x = 25.$$

17.

Max ja Hugo heittivät kourallisen noppia selvittääkseen, kumpi tiskaa. Jos ei tule yhtään kuutosta, Max tiskaa; jos kuutosta tulee tasan yksi, Hugo tiskaa; muussa tapauksessa ei tiskata ollenkaan. Kuinka montaa noppaa pitää heittää, jotta kummallakin olisi yhtä suuri todennäköisyys päätyä tiskaamaan?

- (A) 3 **(B) 5** (C) 8 (D) 9 (E) 17

Ratkaisu:

Olkoon noppia n kpl.

$P(0 \text{ kpl kuutosta}) = P(1 \text{ kpl kuutosta})$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} = n \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow n = 5.$$

**18.**

Mike haluaa kirjoittaa 3×3 -ruudukon joka ruutuun kokonaisluvun siten, että jokaisen 2×2 -ruudukon lukujen summa on 10. Neljä numeroa on jo kirjoitettu.

	2	
1		3
	4	

Mikä seuraavista voisi olla puuttuvien lukujen summa?

(A) 9

(B) 10

(C) 12

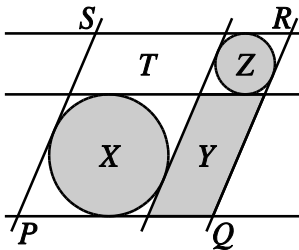
(D) 13

(E) ei mikään edellä mainituista*Ratkaisu:*

Jos keskimmäiseen ruutuun tulee luku x , nurkkaruutuihin tulee vasemmasta ylänurkasta lähtien myötäpäivään $7 - x$, $5 - x$, $3 - x$ ja $5 - x$. Kysytty summa on siis muotoa $20 - 3x$. Koska $20 = 18 + 2$, täytyy koko summan jakojäännöksen olla kolmella jaettaessa 2. Millään luvuista 9, 10, 12 ja 13 näin ei ole.

19.

Kuvassa on kolme vaakasuoraa suoraa ja kolme niitä leikkaavaa, keskenään yhdensuuntaista suoraa.



Kumpikin kuvan ympyrä sivuaa neljää suoraa kuvan mukaisesti. Varjostettujen alueiden alat ovat kuvan mukaisesti X , Y ja Z . Koko suunnikkaan $PQRS$ ala on W .

Mikä on pienin lukumäärä aloja X , Y , Z ja W , joiden tietäminen riittää alan T selvittämiseen?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) alaa T ei voi päätellä aloista X , Y , Z ja W .*Ratkaisu:*

Suunnikkaat T ja Y ovat yhtenevät. Niiden kulmat ovat yhdensuuntaisten suorien samankohtaisia kulmia ja siis yhtäsuuret. Lisäksi pitkien sivujen etäisyys on sama (ympyrän Z halkaisija), samoin lyhyiden (ympyrän X halkaisija). Riittää siis tietää pinta-ala Y , ala T on sama.

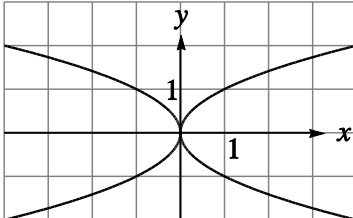


20.

Kuinka moni yhtälöiden

$$y = x^2, y = -x^2, y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x}, y = \sqrt{-x}, y = -\sqrt{-x}, y = \sqrt{|x|}, y = -\sqrt{|x|}$$

kuvaajista esiintyy alle olevassa koordinaatistossa?



- (A) ei yksikään (B) 2 (C) 4 **(D) 6** (E) kaikki 8

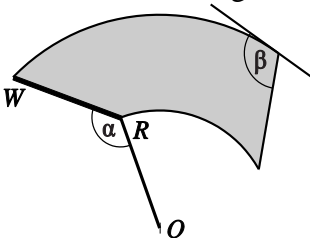
Ratkaisu:

Yhtälöiden $y = x^2$ ja $y = -x^2$ kuvaajia ei ole kuvassa (esimerkiksi piste $(\sqrt{2}, 2)$ puuttuu). Muut ovat.

5 pistettä

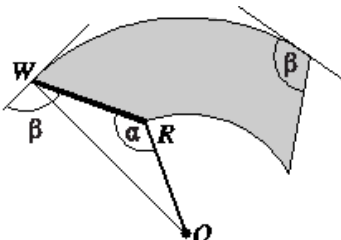
21.

Auton takalasin pyyhkijä koostuu sulasta RW ja sen kanssa yhtä pitkää varresta OR , joiden välinen kulma on vakio α . Pyyhkijä kääntyy akselinsa O ympäri kuvan mukaisesti ja puhdistaa tummennetun alueen. Kuinka suuri on puhdistetun alueen oikean reunan ja nurkkaan piirretyn kaarevan osan tangentin välinen kulma β ?



- (A) $270^\circ - \frac{\alpha}{2}$ **(B) $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$** (C) $270^\circ - \alpha$ (D) $90^\circ + \alpha$ (E) $180^\circ + \frac{\alpha}{2}$

Ratkaisu:



Tangentti on kohtisuorassa O -keskisen ympyrän sädettä vastaan. Kulma β on merkitty kuvaan myös toisessa asemassaan. Tasakylkisen kolmion ROW kantakulma on siis $\beta - 90^\circ$, joten $2(\beta - 90^\circ) = 180^\circ - \alpha \Leftrightarrow \beta = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

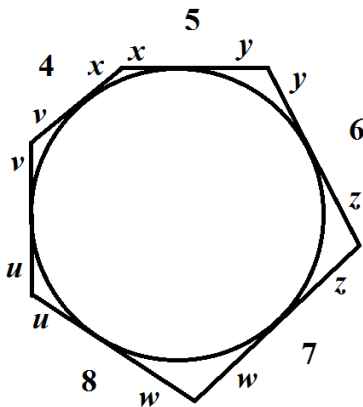


22.

Kuusikulmion sivut PQ , QR , RS , ST , TU ja UP ovat kaikki saman ympyrän tangentteja. Sivujen PQ , QR , RS , ST ja TU pituudet ovat tässä järjestyksessä 4, 5, 6, 7 ja 8. Kuinka pitkä on sivu UP ?

- (A) 9 (B) 8 (C) 7 **(D) 6** (E) ei voida päätellä näillä tiedoilla

Ratkaisu:



Samasta pisteestä ympyrälle piirretyt tangentit ovat yhtä pitkät.

Kuvan merkinnöillä

I: $v + x = 4$

II: $x + y = 5$

III: $y + z = 6$

IV: $z + w = 7$

V: $w + u = 8$.

Laskemalla puolittain $I - II + III - IV + V$ saadaan $v + u = 6$.

23.

Anni piirsi tavanomaiseen (x, y) -tasoon pisteen $A = (1, -10)$ ja sen kautta kulkevan paraabelin $y = ax^2 + bx + c$. Sitten hän repi paperin ja jäljellä jäi vain kuvassa näkyvä palanen.



Mikä seuraavista väittämistä voisi olla väärä?

- (A) $a > 0$ (B) $b < 0$ (C) $a + b + c < 0$ (D) $b^2 > 4ac$ **(E) $c < 0$**

Ratkaisu:

Koska paraabeli on kuvan perusteella ylöspäin aukeava, $a > 0$.

Koska huipun x -koordinaatti $-\frac{b}{2a}$ on positiivinen, $b < 0$.

Paraabelin y -koordinaatti pisteessä $x = 1$ on $a + b + c = -10 < 0$.

Paraabeli on ylöspäin aukeava ja saa negatiivisia arvoja. Sillä on siis kaksi nollakohtaa, joten $D > 0$ ja siis $b^2 > 4ac$.

Voi kuitenkin olla, että $c \geq 0$. Esimerkiksi $y = x^2 - 11x$ käy.



24.

Tutkitaan lukua 100 pienempiä positiivisia kokonaislukuja x , joille pätee, että $x^2 - 81$ on jaollinen luvulla 100. Mikä on kaikkien tällaisten lukujen summa?

- (A) 200 (B) 100 (C) 90 (D) 81 (E) 50

Ratkaisu:

Yksi tällainen luku on 9, koska $9^2 - 81 = 0 = 100 \cdot 0$.

Etsitään loput luvut:

$x^2 - 81 = 100n$ eli $(x+9)(x-9) = 100n$ ja $9 \leq x < 100$, koska tulo on positiivinen.

$x+9$ on joku luvun $100n$ tekijä, samoin $x-9$.

Jos $x+9$ on pariton, myös $x-9$ on pariton ja tulo on pariton.

Kumpikaan ei siis voi olla muotoa $5k$ (k on pariton positiivinen kokonaisluku).

Jos $x+9$ on jaollinen luvulla 5, $x-9$ ei ole ja päinvastoin. Siis luvun 25 täytyy olla tekijänä toisessa näistä luvuista. Koska $x < 100$ ja $x+9 < 109$, ainoat tämän ehdon täyttävät luvun $100n$ tekijät ovat 50 ja 100.

Koska $x+9 > x-9$, vain $x+9$ voi olla 100, jolloin $x = 91$ ja $x-9 = 82$, $82 \cdot 100 = 8200$.

Jos $x+9 = 50$, $x = 41$ ja $x-9 = 32$. Saadaan $50 \cdot 32 = 1600 = 16 \cdot 100$.

Jos $x-9 = 50$, $x = 59$ ja $x+9 = 68$. Saadaan $50 \cdot 68 = 3400 = 34 \cdot 100$.

Ainoat lukua 100 pienemmät luvun x positiiviset arvot ovat siis 9, 41, 59, ja 91.

Näiden summa on 200.

25.

Lauseke $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ on kahden tulon osamäärä, jossa eri kirjaimet vastaavat eri numeroita. Samaa kirjainta vastaa joka kohdassa sama numero. Mikään numeroista ei ole nolla. Mikä on pienin positiivinen kokonaislukuarvo, joka lausekkeella voi olla?

- (A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 5 (E) 7

Ratkaisu:

Supistetaan ensi kaikki, minkä voi supistaa. Sen jälkeen selvitetään ensin pienin positiivinen lukuarvo (ei tarvitse olla kokonaisluku), joka lausekkeella voi olla panemalla jaettavaan mahdollisimman pieniä numeroita ja jakajaan mahdollisimman suuria:

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} = \frac{K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{3} > 1$$

Pienin positiivinen lukuarvo, jonka lauseke voi saada, ei siis voi olla 1. Luku 5 on korvattava sellaisella luvulla, joka on jaollinen kolmella. Luku 6 on pienin tällainen luku.

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} = \frac{K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{9 \cdot 8} = 2$$



26.

Funktiojono $f_1(x), f_2(x), \dots$, toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

$$f_1(x) = x \text{ ja } f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}. \text{ Minkä arvon saa } f_{2011}(2011)?$$

- (A) 2011 (B) $-\frac{1}{2010}$ (C) $\frac{2010}{2011}$ (D) 1 (E) -2011

Ratkaisu:

Sievennetään rohkeasti:

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x - (x-1)} = x = f_1(x)$$

Siis $f_n(x) = f_{n+3k}(x)$ eli $f_{2011}(2011) = f_1(2011) = 2011$.

27.

Olkoot a, b ja c positiivisia kokonaislukuja, joille pätee $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Kuinka monta jakajaa luvulla abc on vähintään (mukaan lukien 1 ja abc)?

- (A) 30 (B) 49 (C) 60 **(D) 77** (E) 1596

*Ratkaisu:*Jakajien kannalta minimaalisessa tulossa abc on vain alkutekijöitä 2 ja 3, sillä muut tekijät lisääisivät jakajien määrää. Olkoon siis $a = 2^x 3^y, b = 2^z 3^w, c = 2^u 3^v$. Sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$2^{2x} 3^{2y} = 2^{3z+1} 3^{3w} = 2^{5u} 3^{5v+1}, \text{ eli}$$

$$\begin{cases} 2x = 3z + 1 = 5u \\ 2y = 3w = 5v + 1 \end{cases}$$

josta nähdään, että x on jaollinen viidellä, u ja w kahdella sekä y kolmella. Kokeillaan pienimpiä lukuja: $x = 5, u = w = 2, y = 3$, jolloin saadaan

$$\begin{cases} 10 = 3z + 1 = 10 \\ 6 = 6 = 5v + 1 \end{cases}$$

eli $v = 1$ ja $z = 3$. Onneksaasti saatiin siis ratkaisu. Nyt $abc = 2^{x+z+u} 3^{y+w+v} = 2^{10} 3^6$. Tekijöissä eksponentit voidaan valita toisistaan riippumatta, joten tekijöitä on yhteensä $11 \cdot 7 = 77$.

**28.**

4×5 -ruudukkoon kirjoitetaan kaksikymmentä keskenään erisuurta positiivista kokonaislukua kukin omaan ruutuunsa. Kahdella vierekkäisellä luvulla (eli luvuilla, joiden ruuduilla on yhteinen sivu) tulee olla aina yhteinen tekijä, joka on suurempi kuin 1. Merkitään kirjaimella n suurinta taulukkoon tulevaa lukua. Mikä on luvun n pienin mahdollinen arvo?

- (A) 21 (B) 24
- (C) 26
- (D) 27 (E) 40

Ratkaisu:

Jos alkuluku p on mukana, tarvitaan myös pienimmilläänkin $2p$ ja $3p$, koska joka luvulla on vähintään kaksi naapuria. Jos halutaan suurimman luvun olevan alle 30, alkuluvut 11, 13, 17, 19 ja 23 eivät voi olla mukana. Koska myöskään 1 ei käy, minimi on $20 + 6 = 26$.

26 on mahdollista monella tavalla, esimerkiksi:

3	18	21	7
9	24	6	14
15	12	2	4
5	10	8	16
25	20	22	26

Tässä ratkaisussa oikean alanurkan parillisten lukujen järjestystä voi muuttaa mielivaltaisesti.

29.

Laatikossa on punaisia ja vihreitä palloja. Jos otamme laatikosta sattumanvaraisesti kaksi palloa, ne ovat samaa väriä todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Mikä seuraavista voisi olla pallojen kokonaismäärä?

- (A)
- 81 (B) 101 (C) 1000 (D) 2011 (E) 10001

Ratkaisu:

Olkoon punaisia palloja a ja vihreitä b kappaletta. Halutaan, että

$$\begin{aligned} P(\text{pun ja vih}) + P(\text{vih ja pun}) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4ab &= a^2 + b^2 + 2ab - a - b \\ \Leftrightarrow a + b &= a^2 + b^2 - 2ab \\ \Leftrightarrow a + b &= (a - b)^2. \end{aligned}$$

Pallojen yhteismäärän täytyy siis olla neliöluku, kuten 81. (Tällöin $a = 45$ ja $b = 36$ tai päinvastoin.)



30.

Suuri $3 \times 3 \times 3$ -kuutio koostuu 27 identtisestä pikkukuutiosta. Kuutio leikataan tasolla, joka kulkee suuren kuution keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa yhtä sen avaruuslävistäjää vastaan. Kuinka montaa pikkukuutiota taso leikkaa?

(A) 17

(B) 18

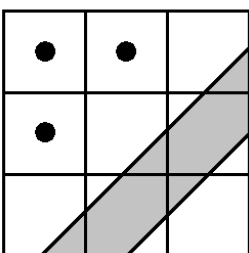
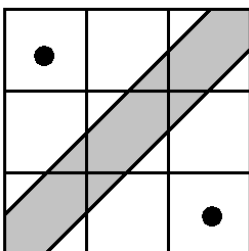
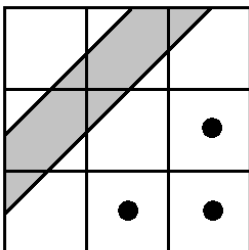
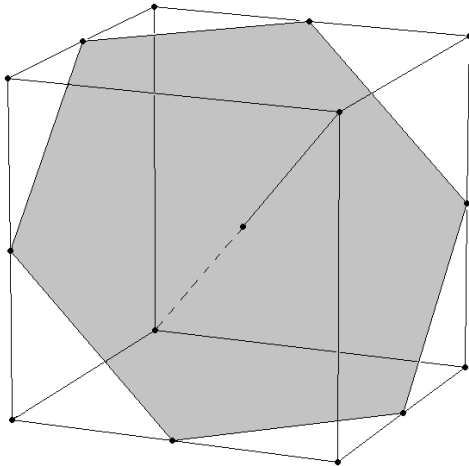
(C) 19

(D) 20

(E) 21

Ratkaisu:

Suuren kuution ja tason leikkauskuvio näyttää tältä:



Yllä on esitetty tason kulku päällimmäisen, keskimmäisen ja alimman pikkukuutiokerroksen läpi. Kuvaan pisteillä merkityt 8 kuutiota eivät koske tasoon, loput 19 koskevat.