Kenguru 2011 Cadet RATKAISUT
(8. ja 9. luokka)

Maunulan yhteiskoulu
HELSINGIN MATEMATIIKKALUKIO

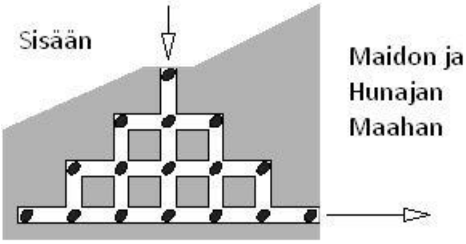
OIKEAT VASTAUSVAIHTOEHDOT ON ALLEVIIVATTU.

**3 pistettä**

**1.**
Minkä laskun tulos on suurin?
(A) $2011^1$ (B) $1^{2011}$ (C) $1\cdot 2011$ **(D)** $1+2011$ (E) 1 : 2011

*Ratkaisu:*
$2011^1 = 2011,\quad 1^{2011} = 1,\quad 1\cdot 2011 = 2011\quad 1+2011 = 2012\ (suurin)\quad ja\quad 1:2011 \approx 0{,}0005$

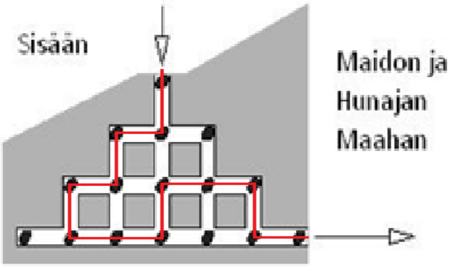
**2.**
Hamsteri Fridolin suuntaa kulkunsa kohti legendaarista Maidon ja Hunajan Maata. Matka sinne kulkee sokkelon kautta. Sokkelossa on 16 kurpitsansiementä kuvaan merkityissä paikoissa.

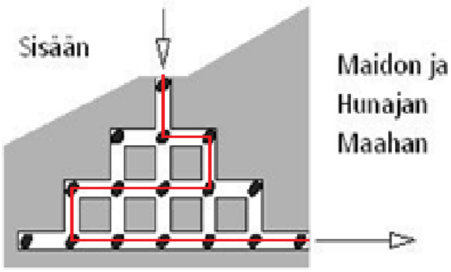



Fridolin ei saa käydä missään kohdassa sokkeloa kahdesti. Kuinka monta kurpitsan siementä Fridolin enintään onnistuu keräämään?

(A) 12 **(B)** 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

*Ratkaisu:*
Vähintään kolme siementä jää keräämättä: ylimmältä riviltä jommassakummassa reunassa oleva, alarivin reunimmainen vasemmalta ja lisäksi yksi reitistä riippuva siemen. Kuvissa on kaksi reittivaihtoehtoa.




**3.**
Suojatie on tehty 50 cm leveistä valkoisista ja mustista raidoista. Joka toinen raita on musta, ja sekä ensimmäinen että viimeinen raita ovat valkoisia. Valkoisia raitoja on yhteensä kahdeksan. Kuinka pitkä suojatie on?

(A) 5,5 m (B) 6,5 m **(C)** 7,5 m (D) 8,5 m (E) 9,5 m

*Ratkaisu:* Valkoisia raitoja on kahdeksan ja mustia 7, yhteensä 15 raitaa. $15\cdot 0{,}5m = 7{,}5m$.

**4.**
Digitaalisen kelloni näyttöön tuli juuri aika 20:11. Kuinka monen minuutin kuluttua näytössä näkyvät taas numerot 0, 1, 1 ja 2 jossain järjestyksessä?

(A) 40 (B) 45 **(C)** 50 (D) 55 (E) 60

*Ratkaisu:* klo 21:01, eli 50 minuutin kuluttua.

**5.**
Kotikadullani on 17 taloa. Toisella puolella katua taloilla on parilliset numerot 2, 4, 6 ja niin edelleen ja toisella puolella parittomat 1, 3, 5 ja niin edelleen. Kotitaloni on viimeinen talo parillisella puolella ja sen numero on 12. Serkkuni asuu kadun parittomalla puolella viimeisessä talossa. Mikä hänen talonsa numero on?

(A) 5 (B) 7 (C) 13 (D) 17 **(E)** 21

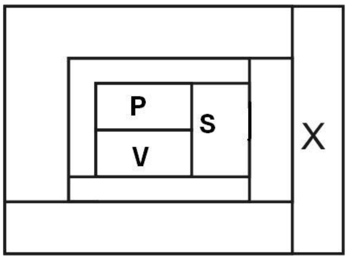
*Ratkaisu:*
Parilliset talot ovat 2, 4, 6, 8, 10 ja 12 eli niitä on 6 kpl.
Parittomia taloja on siis 11 kpl eli numerot 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 ja 21,

**6.**
Felix-kissa pyydysti 12 kalaa kolmen päivän aikana. Joka päivä Felix pyydysti enemmän kaloja kuin edellisenä päivänä. Kolmantena päivänä Felix pyydysti vähemmän kaloja kuin kahtena edellisenä päivänä yhteensä. Kuinka monta kalaa Felix pyydysti kolmantena päivänä?

**(A)** 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

*Ratkaisu:*
$12 = 1 + 2 + 9$, mutta $9 > 1 + 2$
$12 = 1 + 3 + 8$, mutta $8 > 1 + 3$
$12 = 1 + 4 + 7$, mutta $7 > 1 + 4$
$12 = 1 + 5 + 6$, mutta $6 = 1 + 5$, eli ensimmäisenä päivänä Felix pyydysti enemmän kuin yhden kalan.
$12 = 2 + 3 + 7$, mutta $7 > 2 + 3$
$12 = 2 + 4 + 6$, mutta $6 = 2 + 4$, eli ensimmäisenä päivänä Felix pyydysti enemmän kuin kaksi kalaa.
$12 = 3 + 4 + 5$, $5 < 3 + 4$ ja $3 < 4 < 5$, eli kolmantena päivänä Felix pyydysti 5 kalaa.
Muita ratkaisuja ei ole, koska $3 + 4 + 6 > 12$, $4 + 5 + 6 > 12$ jne.

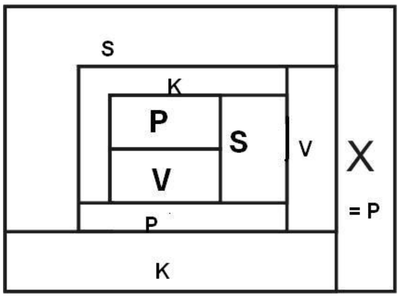
**7.**
Jokainen kuvan alue väritetään yhdellä värillä, joko punaiseksi (P), vihreäksi (V), siniseksi (S) tai keltaiseksi (K). Kolme aluetta on jo väritetty.




Toisissaan kiinni olevat alueet ovat aina erivärisiä. Mikä väri tulee kirjaimella **X** merkittyyn alueeseen?

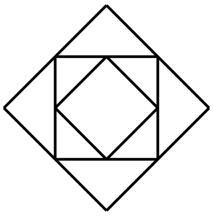
<u>**(A)**</u> punainen (B) sininen (C) vihreä (D) keltainen (E) ei voi päätellä näillä tiedoilla

*Ratkaisu:*



**4 pistettä**

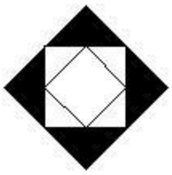
**8.**
Kuvassa on kolme päällekkäin asetettua neliötä.

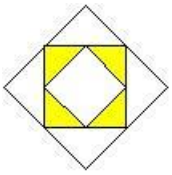


Keskisuuren neliön kärjet ovat isoimman neliön sivujen keskipisteissä. Pienimmän neliön kärjet ovat keskisuuren neliön sivujen keskipisteissä. Pienen neliön pinta-ala on 6 $cm^2$. Mikä on ison neliön ja keskisuuren neliön pinta-alojen erotus?

(A) 6 $cm^2$ (B) 9 $cm^2$ **<u>(C)</u>** 12 $cm^2$ (D) 15 $cm^2$ (E) 18 $cm^2$

*Ratkaisu:*
Ison neliön ja keskisuuren neliön pinta-alojen erotus on mustana näkyvä alue. Alueen pinta-ala on sama kuin keskisuuren neliön pinta-ala.
Keskisuuren neliön ja pienen neliön pinta-alojen erotus on keltaisena näkyvä alue. Alueen pinta-ala on sama kuin pienen neliön pinta-ala.





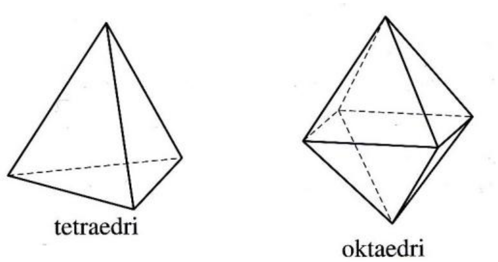
Keskisuuren neliön pinta-ala on siis kaksi kertaa pienen neliön pinta-ala eli 12 $cm^2$. Ison neliön ja keskisuuren neliön pinta-alojen erotus eli musta alue on yhtä suuri kuin keskisuuren neliön pinta-ala eli 12$cm^2$.

**9.**
Mikä on lausekkeen $\frac{2011 \cdot 2{,}011}{201{,}1 \cdot 20{,}11}$ arvo?

(A) 0,01 (B) 0,1 **<u>(C)</u>** 1 (D) 10 (E) 100

*Ratkaisu:*
Sekä jaettavassa että jakajassa on kolme desimaalia. Kun lavennetaan luvulla 1000, saadaan
$\frac{2011 \cdot 2011}{2011 \cdot 2011} = 1$.

**10.**
Elsan rakennussarjassa on paljon tasasivuisia kolmioita, joista voi muodostaa kappaleita. Elsa on tehnyt kolmioistaan kolme nelitahokasta eli tetraedria ja viisi kahdeksantahokasta eli oktaedria. Kuinka monta kolmiota hän on tarvinnut?




(A) 42 (B) 48 (C) 50 **(D)** 52 (E) 56

*Ratkaisu:* Tetraedrissa on 4 tahkoa ja oktaedrissa 6. Kaikki tahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

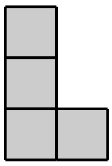
$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 52$$

**11.**
Jalkapalloseura FC Kangaroo teki kolmessa ottelussa yhteensä kolme maalia. Vastustajat tekivät näissä otteluissa yhteensä vain yhden maalin. Kangaroo voitti näistä otteluista yhden, hävisi yhden ja pelasi yhden tasan. Mikä oli tulos siinä ottelussa, jonka Kangaroo voitti?

(A) 2-0 **(B)** 3-0 (C) 1-0 (D) 2-1 (E) 0-1

*Ratkaisu:*
Koska vastustajat tekivät vain yhden maalin, FC Kangaroo hävisi yhden pelin 0-1.
Tasapelin täytyi siis päättyä 0-0, joten voittopeli päättyi 3-0.

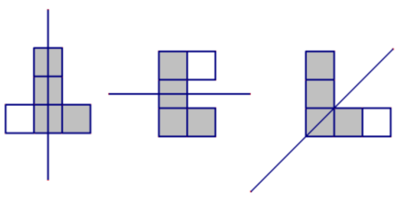
**12.**
Kuvassa on neljästä ruudusta muodostettu L-kirjain.



Ria haluaa lisätä yhden ruudun sellaiseen kohtaan, että kuvio on symmetrinen jonkin suoran suhteen. Kuinka monta sopivaa kohtaa kuviosta löytyy, joihin Ria voi lisätä ruudun?

(A) 1 **(B)** 3 (C) 5 (D) 7 (E) ei ole mahdollista

*Ratkaisu:*



**13.**
Mariella on 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g, ja 9 g painoiset helmet. Hän askartelee niistä neljä sormusta, joihin jokaiseen tulee kaksi helmeä. Helmet lisäävät sormusten painoa 17 g, 13 g, 7 g ja 5 g. Minkä painoista helmeä Marie ei tarvinnut?

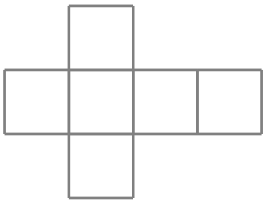
(A) 1 g  (B) 2 g  **(C)** 3 g  (D) 4 g  (E) 5 g

*Ratkaisu:*
Joko näin
$1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ ja $17 + 13 + 7 + 5 = 42$, $45 - 42 = 3$

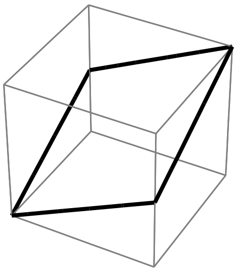
tai näin

9 + 8 = 17, 6 + 7 = 13, 5 + 2 = 7 ja 1 + 4 = 5, siis Marie ei tarvinnut 3 g helmeä.

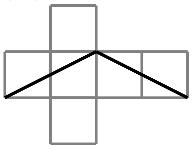
**14.**
Paperista leikataan kuvan mukainen ruudukko ja taitellaan siitä kuutio.

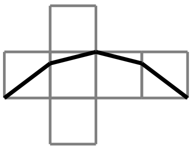


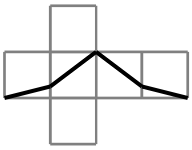
Seuraavaksi piirretään tussilla kuutioon viivat, jotka jakavat kuution kahteen samanlaiseen osaan.

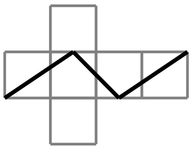


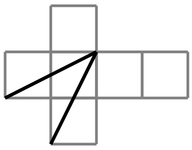
Lopuksi avataan kuutio ja katsotaan, miltä tussiviiva näyttää. Lopputulos voi olla vain yksi alla olevista vaihtoehdoista. Mikä?

**(A)**


(B)


(C)


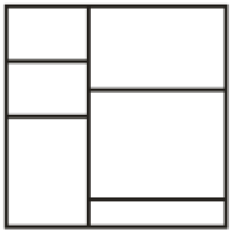
(D)


(E)


*Ratkaisu:*
Askartele kuviot ja taittele!

**5 pistettä**

**15.**
Neliön muotoisesta paperista leikataan kuvan mukaiset suorakulmiot.



Kun kaikkien suorakulmioiden piirit laskettiin yhteen, summa oli 120 cm. Mikä oli alkuperäisen paperineliön pinta-ala?

(A) 48 $cm^2$ (B) 64 $cm^2$ (C) 110.25 $cm^2$ **<u>(D)</u>** 144 $cm^2$ (E) 256 $cm^2$

*Ratkaisu:*
Kun palat leikataan irti, niiden pystysivujen yhteispituus on neliön sivun pituus nelinkertaisena. Vaakasivujen yhteispituus on neliön sivun pituus kuusinkertaisena. Jos merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella *x*,

$$(4+6)\cdot x = 120, \text{ eli } x = 12 \text{ ja edelleen } 12^2 = 144.$$

**16.**
Kolme naakkaa, Iisakki, Mauri ja Oskari istuvat kukin omassa pesässään.

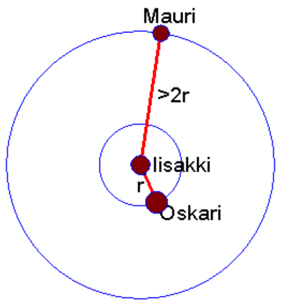
Iisakki sanoo:
”Matka minun pesästäni Maurin pesälle on enemmän kuin kaksi kertaa niin pitkä kuin matka minun pesästäni Oskarin pesälle.”
Mauri sanoo:
”Matka minun pesästäni Oskarin pesälle on enemmän kuin kaksi kertaa niin pitkä kuin matka minun pesästäni Iisakin pesälle”.
Oskari sanoo:
”Matka minun pesästäni Maurin pesälle on enemmän kuin kaksi kertaa niin pitkä kuin matka minun pesästäni matka Iisakin pesälle.”

Ainakin kaksi naakkaa puhuu totta. Kuka valehtelee?

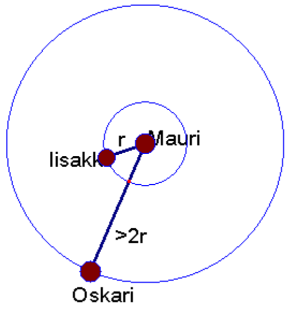
(A) Iisakki **(B)** Mauri (C) Oskari (D) Ei kukaan (E) Ei voi päätellä näistä tiedoista

*Ratkaisu:*
Piirretään kaksi ympyrää, joiden keskipisteenä on 1) Iisakin 2) Maurin ja 3) Oskarin pesä. Pienemmän ympyrän säde on $r$. Suuremman ympyrän säde on suurempi kuin $2r$. Ympyröiden kehät esittävät väitteiden mukaisia muiden naakkojen pesiä: ensimmäisessä kuvassa oletetaan Iisakin puhuvan totta, toisessa Maurin ja kolmannessa Oskarin. Ensimmäisestä kuvasta nähdään, että jos Iisakki puhuu totta, niin Mauri valehtelee ja Oskari puhuu totta. Toisesta kuvasta nähdään, että jos Mauri puhuu totta, niin sekä Oskari että Iisakki valehtelevat. Kolmannesta kuvasta nähdään, että jos Oskari puhuu totta, niin Iisakki puhuu totta ja Mauri valehtelee. Koska ainakin kaksi naakkaa puhuu totta, niin vain ensimmäisen ja kolmannen kuvan tilanteet ovat mahdollisia. Niissä molemmissa Mauri valehtelee, joten B on oikea vastaus.

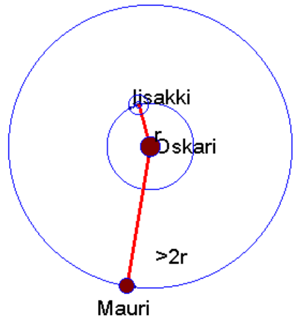
Iisakki sanoo:
"Matka minun pesästäni Maurin pesälle on enemmän kuin kaksi kertaa niin pitkä kuin matka minun pesästäni Oskarin pesälle."



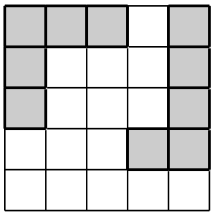

Mauri sanoo:
" Matka minun pesästäni Oskarin pesälle on enemmän kuin kaksi kertaa niin pitkä kuin matka minun pesästäni Iisakin pesälle".



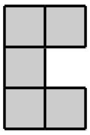

Oskari sanoo:
" Matka minun pesästäni Maurin pesälle on enemmän kuin kaksi kertaa niin pitkä kuin matka minun pesästäni matka Iisakin pesälle."



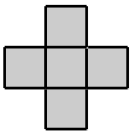
**17.**
Liinalla on neliönmuotoisella alustallaan kaksi tummaa kappaletta, kuten kuvassa näkyy. Hän asettaa alustalleen kolmannen kappaleen. Mikä alla olevista se on, kun sen jälkeen mikään jäljelle jääneistä kappaleista ei enää sovi alustalle? (Palasia saa kääntää ympäri ja kiertää, mutta niiden on peitettävä kokonaisia ruutuja ruudukossa.)



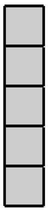
(A)



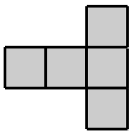
(B)



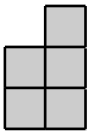
(C)



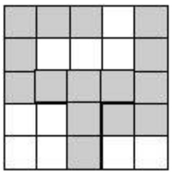
**(D)**



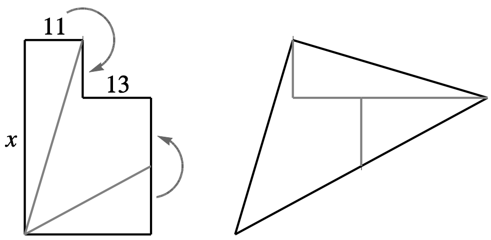
(E)



*Ratkaisu:*



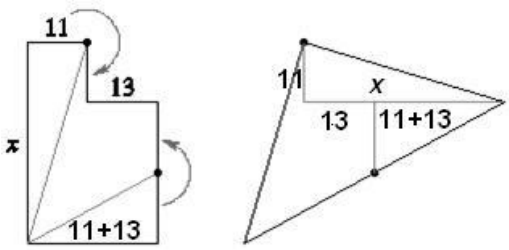
**18.**
Vasemmanpuoleisessa kuvassa on kaksi suorakulmiota, joista kahden sivun pituudet (11 ja 13) tunnetaan. Kuvio leikataan kolmeen osaan harmaita viivoja pitkin ja osista muodostetaan oikealla puolella näkyvä kolmio.




Kuinka pitkä on sivu $x$?

(A) 36 **(B)** 37 (C) 38 (D) 39 (E) 40

*Ratkaisu:*




Siis 13 + 11 + 13 = 37

**19.**

Lauseke $\dfrac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}$ on kahden tulon osamäärä, jossa eri kirjaimet vastaavat eri numeroita. Samaa kirjainta vastaa joka kohdassa sama numero. Mikään numeroista ei ole nolla. Mikä on pienin positiivinen kokonaislukuarvo, joka lausekkeella voi olla?

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

*Ratkaisu:*

Supistetaan ensi kaikki, minkä voi supistaa. Sen jälkeen selvitetään ensin pienin positiivinen lukuarvo (ei tarvitse olla kokonaisluku), joka lausekkeella voi olla panemalla jaettavaan mahdollisimman pieniä numeroita ja jakajaan mahdollisimman suuria:

$$\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=\frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{9\cdot 8}=\frac{5}{3}>1$$

Pienin positiivinen lukuarvo, jonka lauseke voi saada, ei siis voi olla 1. Luku 5 on korvattava sellaisella luvulla, joka on jaollinen kolmella. Luku 6 on pienin tällainen luku.

$$\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=\frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}=\frac{6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{9\cdot 8}=2$$

**20.**
Seitsemän vuotta sitten Eevan ikä oli luvun kahdeksan monikerta. Kahdeksan vuoden kuluttua hänen ikänsä on luvun seitsemän monikerta.
Kahdeksan vuotta sitten Rasmuksen ikä oli luvun seitsemän monikerta. Seitsemän vuoden kuluttua hänen ikänsä on luvun kahdeksan monikerta.
Kumpikaan ei ole yli satavuotias. Mikä väitteistä on totta?

**(A)** Rasmus on kaksi vuotta vanhempi kuin Eeva.
(B) Rasmus on vuoden vanhempi kuin Eeva.
(C) Rasmus ja Eeva ovat yhtä vanhoja.
(D) Rasmus on vuoden nuorempi kuin Eeva.
(E) Rasmus on kaksi vuotta nuorempi kuin Eeva.

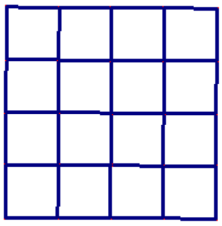
*Ratkaisu:*
Tapa 1:
Merkitään Eevan ikää nyt x ja Rasmuksen ikää nyt y. Tiedetään, että
$x - 7 = 8n$ eli jaollinen 8:lla		$y - 8 = 7s$ eli jaollinen 7:llä
$x + 8 = 7k$, eli jaollinen 7:llä		$y + 7 = 8t$ eli jaollinen 8:lla
joten
$7k - 8n = (x + 8) - (x - 7) = 15$		$8t - 7s = (y + 7) - (y - 8) = 15$
Etsitään sellaisia luvun 8 ja luvun 7 kertotaulun lukuja, joiden erotus on 15.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | **49** | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 |
| 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | **64** | 72 | 80 | 88 | 96 | | |

Eeva: $7k - 8n = 63 - 48 = 7 \cdot 9 - 6 \cdot 8$, siis $x - 7 = 6 \cdot 8$ eli Eeva on $6 \cdot 8 + 7 = 55$ vuotta.
Rasmus: $8t - 7s = 64 - 49 = 8 \cdot 8 - 7 \cdot 7$, siis $y - 8 = 7 \cdot 7$ eli Rasmus on $7 \cdot 7 + 8 = 57$ vuotta.

Tapa 2:
Jos on oikein viisas, voi huomata, että $7 \cdot 8 = 56$ ja 56 on ainoa luku, joka kuuluu sekä seitsemän että kahdeksan kertotauluun.
Eevan ikä 7 vuotta sitten on kahdeksan kertotaulun luku $56 - 8 = 48$ vuotta ja
nyt Eeva on $48 + 7 = 55$ vuotta.
Rasmuksen ikä 8 vuotta sitten on seitsemän kertotaulun luku $56 - 7 = 49$ vuotta ja
nyt Rasmus on $49 + 8 = 57$ vuotta.

**21.**



Kuvan ruudukkoon merkitään kuusitoista positiivista kokonaislukua. Jokainen luku esiintyy vain kerran. Viereisten ruutujen (ruudut ovat viereisiä, jos niillä on yhteinen sivu) luvuilla on aina lukua 1 suurempi yhteinen tekijä (eli luvut ovat aina molemmat jaollisia samalla, lukua 1 suuremmalla luvulla). Merkitään kirjaimella *n* suurinta taulukkoon tulevaa lukua. Mikä on luvun *n* pienin mahdollinen arvo?

(A) 17 **(B)** 21 (C) 24 (D) 25 (E) 33

*Ratkaisu:*

Tarvitaan 16 lukua, siis *n* on vähintään 17, koska luku 1 ei kelpaa.
Mukana ovat aluksi lihavoidut luvut **2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17** 18 19 20 …
Jokaisella luvulla on ainakin kaksi viereistä lukua, eli kaksi lukua, joiden kanssa sillä on yhteinen tekijä. Koska jaottomilla luvuilla eli alkuluvuilla ei ole muita tekijöitä kuin 1 ja luku itse, voidaan luvun *n* arvoa arvioida miettimällä, mitkä alkuluvut ehkä kuuluvat taulukkoon ja mitkä ehkä eivät.

Alkulukuja on pyrittävä välttämään, koska jos laitetaan taulukkoon alkuluku *p*, tarvitaan ainakin kaksi sen monikertaa. Koska lukujen on oltava mahdollisimman pieniä, käytetään monikertoja 2*p* ja 3*p*. Jos otetaan mukaan vain 3 pienintä alkulukua ja niiden monikertoja, saadaan pienimmiksi mahdollisiksi luvuiksi **2 3 4 5 6 8 9 10 12 14 15 16 18 20 22 ja 24**, joista suurin on 24. Käyttämällä vain neljää ensimmäistä alkulukua ja niiden monikertoja saadaan pienimmiksi mahdollisiksi luvuiksi **2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 14 15 16 18 20 21**. Näistä suurin on 21. Nyt lukua 21 pienemmät taulukosta pois jäävät luvut ovat kaikki alkulukuja (11, 13, 17 ja 19), joten *n* = 21 on pienin mahdollinen *n*:n arvo. Seuraava kuva osoittaa, että 4 pienintä alkulukua myös riittää.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 21 | 7 |
| 15 | 18 | 6 | 14 |
| 5 | 10 | 2 | 4 |
| 20 | 8 | 12 | 16 |

Ohje lukujen sijoittamiseksi ruudukkoon: Parillisia lukuja on paljon, niitä on helppo sijoittaa. Kannattaa aloittaa parittomista luvuista 3, 5, 7, 9, 15 ja 21. Sen jälkeen sijoitellaan sellaisia näiden lukujen monikertoja, jotka ovat parillisia. Kun taulukkoon syntyy vinorivi, jonka kaikki luvut ovat parillisia, loput parilliset luvut menevät taulukon vapaaseen nurkkaan.