3-Point-Problems

1. There are 200 fish in an aquarium. 1 % of them are blue, all the rest are yellow. How many yellow fish do we have to take out the aquarium, so that the blue fish represent 2 % of all the fish in the aquarium?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 20 (**D**) 50 (**E**) 100

Sinisiä kaloja on $0,01 \cdot 200 = 2$ *kappaletta, loput 198 ovat keltaisia. Jotta sinisten osuus olisi* 2 %, *keltaisia täytyy olla 98. Täytyy siis poistaa 100 keltaista.*

2. Which is the largest of the following numbers?

(**A**) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ (**B**) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (**C**) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ (**D**) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ (**E**) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

Kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöjuurten erotusta voidaan sieventää:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Erotuksen arvo on siis sitä pienempi, mitä suurempi n on, joten annetuista vaihtoehdoista suurin on $\sqrt{2}-\sqrt{1}$. *Vastauksen voi toki päätellä myös likiarvoilla laskemalla.*

3. For how many different positive integers n is the number n^2+n a prime number?

(**A**) 0
(**B**) 1
(**C**) 2
(**D**) a finite number but more than 2
(**E**) an infinite number

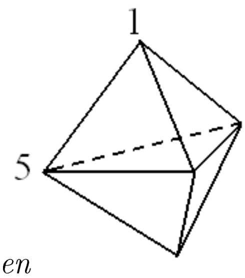
Koska $n^2+n = n(n+1)$ *ja alkuluvulla voi olla tekijöinä vain itsensä ja luku 1, tekijöistä pienemmän (eli luvun n) täytyy olla 1. Siis* n^2+n *on alkuluku vain yhdellä positiivisella n.*

4. Mari, Ville and Ossi went to a café. Each of them bought three glasses of juice, two icecreams and five buns. Which of the following could be the total bill?

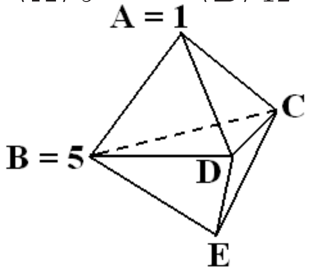
(**A**) 39,20 € (**B**) 38,20 € (**C**) 37,20 € (**D**) 36,20 € (**E**) 35,20 €

Koska hinnat ovat tasasenttejä ja kaikilla kolmella on sama ostos, yhteishinnan täytyy kolmella jaettaessa mennä senttien tarkkuudella tasan. Ainoa tällainen hinta on
$37,20$ € $: 3 = 12,40$ €.

5. The picture shows a solid formed with 6 triangular faces. At each vertex there is a number. For each face we consider the sum of the 3 numbers at the vertices of that face. If all the sums are the same and two of the numbers are 1 and 5 as shown, what is the sum of all the 5 numbers?



(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 24



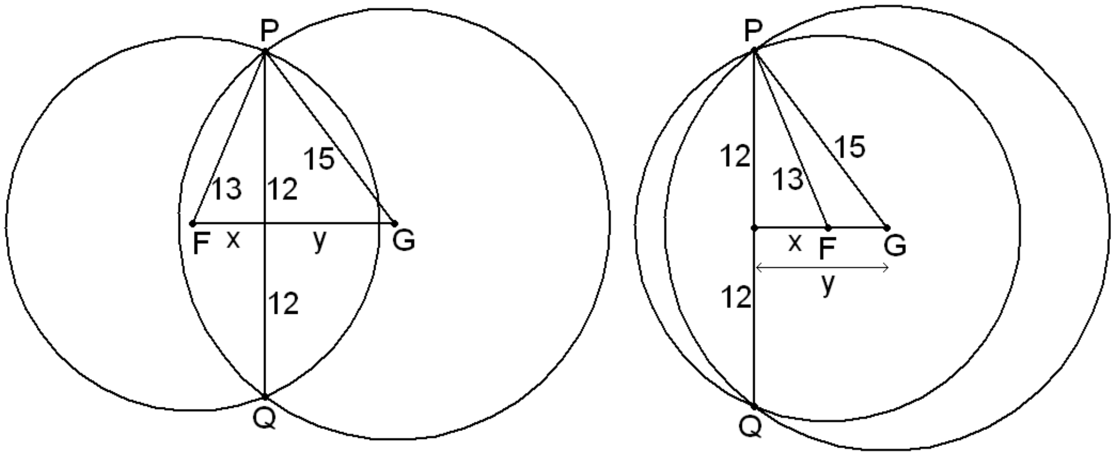
Tahkojen ABC ja ADC summa on sama, joten $1+5+C = 1+D+C$, eli $D = 5$. Joka tahkon summa on siis $1+5+5 = 11$, joten myös $C = 5$ ja $E = 1$. Kaikkien kärkien summa on $1+5+5+5+1 = 17$.

---

6. Two circles with centers F and G and radii 13 and 15 intersect in points P and Q. Length of line segment PQ is 24. Which of the following could be the length of the segment FG?

(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 14 (**E**) 18

Ympyröiden asemalla on kaksi vaihtoehtoa:



Pythagoraan lausella saadaan $x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x = 5$ ja $y^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow y = 9$. Keskipisteiden etäisyys on siis joko $5 + 9 = 14$ tai $9 - 5 = 4$.

---

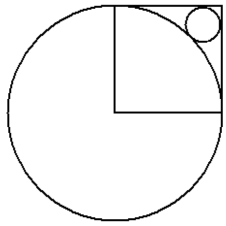
7. A box contains 2 white, 3 red and 4 blue socks. Liz knows, that a third of the socks have a hole in them but not what colour the worn through socks are. She is picking up socks from the box to the floor at random and hoping to get two good socks of the same colour. How many socks must she take to be absolutely sure to have a good pair?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

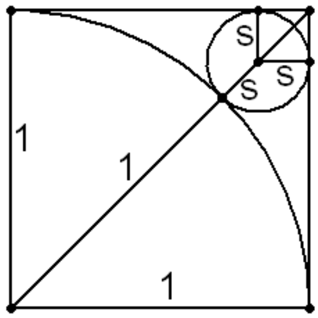
Sukkia on yhteensä 9, joten kolmessa on reikä. Huonoimmassa tapauksessa ne poimitaan ensin. Ehjiä sukkia voi olla kolmea väriä, joten pahimmassa tapauksessa vasta neljäs ehjä on sukka muodostaa parin. Sukkia voi siis joutua ottamaan 7 kappaletta.

---

8. The square in the figure has side equal to 1. Then the radius of the small circle is equal to



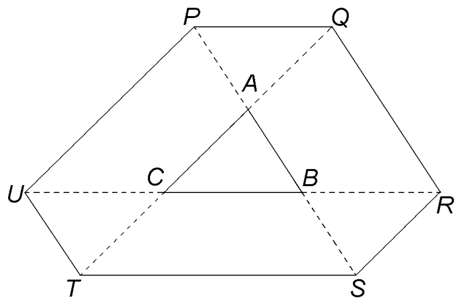
(**A**) $\sqrt{2}-1$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (**D**) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**<u>E</u>**) $(1-\sqrt{2})^2$



Olkoon pienen ympyrän säde s. Suuren neliön lävistäjä on $\sqrt{2}$ ja pienen $\sqrt{2}s$. Yhteensä lävistäjä koostuu osista $1+s+\sqrt{2}s=\sqrt{2} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})s=\sqrt{2}-1$
$\Leftrightarrow s=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=(1-\sqrt{2})^2.$

---

9. Sides of triangle ABC are continued to both sides to points P, Q, R, S, T and U so that $|PA|=|AB|=|BS|$, $|TC|=|CA|=|AQ|$ and $|UC|=|CB|=|BR|$. If the area of ABC is 1, what is the area of the hexagon $PQRSTU$?



(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12
(**<u>D</u>**) 13 (**E**) not enough information

Syntyneet kolmiot BSR, AQP ja CUT ovat alkuperäisen kanssa yhteneviä, joten niillä on sama ala. Suuret kolmiot AST, CRQ ja BPU ovat alkuperäisen kanssa yhdenmuotoisia, ja suhdeluku on 2, joten niiden ala on neljä. Puolisuunnikkaiden $CBST$, $BRQA$ ja $APUC$ alat ovat siis kolme. Kysytty kuusikulmion ala on $1+1+1+1+3+3+3=13$.

---

10. We want to colour the squares in the grid using colours A, B, C and D in such a way that neighbouring squares do not have the same colour (squares that share a vertex are considered neighbours). Some of the squares have been coloured as shown. What are the possibilities for the shaded square?

A	B			
C	D			
		B		
B				

(**A**) only B (**B**) only C (**C**) only D
(**<u>D</u>**) either C or D (**E**) any of A, B, C, D

A	B	A	B	A
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B
C/D	D/C	C/D	D/C	C/D
B	A	B	A	B

Kuvan mukaiset väritykset ovat ainoat mahdolliset. Tummennettuun ruutuun käy siis joko C tai D.

4-Point-Problems

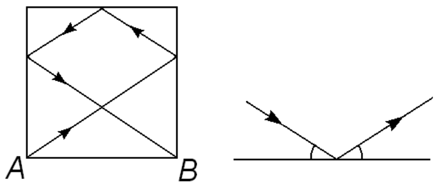
11. 2009 kangaroos, each of them either light or dark, compare their heights. It is known that one light kangaroo is higher than exactly 8 dark kangaroos, one light kangaroo is higher than exactly 9 dark kangaroos, one light kangaroo is higher than exactly 10 dark kangaroos, and so on, and exactly one light kangaroo is higher than all dark kangaroos. What is the number of light kangaroos?

(**A**) 1000 (**B**) 1001 (**C**) 1002
(**D**) 1003 (**E**) this situation is impossible

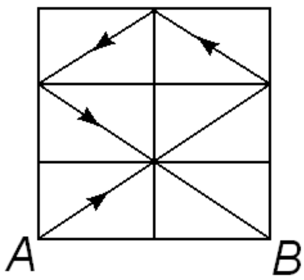
Asetetaan kengurut jonoon pituusjärjestykseen. Koska jokainen vaalea kenguru on ainakin 8 *tummaa kengurua pidempi, kahdeksan lyhyintä kengurua ovat tummia. Loppujen* 2001 *kengurun kohdallan jonossa vuorottelevat vaaleat ja tummat kengurut. Koska pisin kenguru on vaalea, näistä* 2001 *kengurusta* 1001 *on vaaleita.*

---

12. On a square shaped billiard table with side 2 m, a ball is thrown from the corner A. After touching three sides as shown it goes to corner B. How many meters did the ball travel? (Remember that a ball bounces with the same angle that it enters as shown in the picture on the right.)

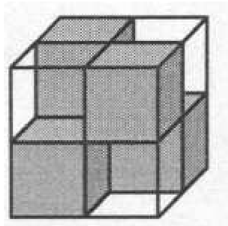


(**A**) 7 (**B**) $2\sqrt{13}$ (**C**) 8
(**D**) $4\sqrt{3}$ (**E**) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$



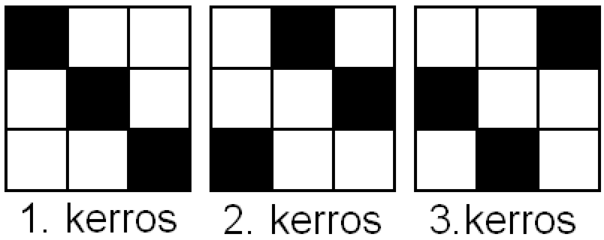
Pallo kulkee kuvan mukaisesti kuuden suorakulmion läpi. Suorakulmioiden sivut ovat 1 *m ja* $\frac{2}{3}$ *m. Yhden suorakulmion lävistäjän pituus on siis* $\sqrt{1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$ *m* $= \frac{\sqrt{13}}{3}$ *m.*
Koko matka on $6 \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = 2\sqrt{13}$ *m.*

13. A cube measuring $2 \times 2 \times 2$ is formed of four $1 \times 1 \times 1$ white transparent and four $1 \times 1 \times 1$ black non-transparent cubes (picture). They are placed in the way that the whole big cube is non-transparent, meaning that it is not possible to see through it neither from top to bottom, nor from front to back and not even from left to right. At least how many black cubes would we have to put into the big cube measuring $3 \times 3 \times 3$ to make the whole cube non-transparent?



(A) 6   **(B)** 9   **(C)** 10   **(D)** 12   **(E)** 18

Jotta kuutio olisi yhden tahkon suunnasta katsottuna läpinäkymätön, kaikkien sen 9 pikkuneliön kohdalla täytyy olla jossakin kohtaa kuutiota musta pikkukuutio. Mustia kuutiota tarvitaan siis vähintään 9. Yhdeksän riittää, kun ne asetellaan esimerkiksi näin:



Yllä kuvatulla asettelulla kuutio on läpinäkymätön kaikista suunnista.

---

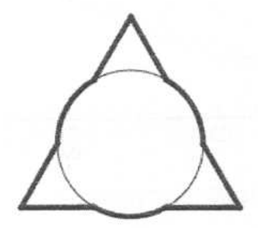
14. On the island of nobles and liars 25 people are standing in a queue. Everyone, except the first person in the queue, said, that the person before him in the queue is a liar, and the first man in the queue said, that all people, standing after him are liars. How many liars are there in the queue? (Nobles always speak the truth, and liars always tell lies.)

(A) 0   **(B)** 12   **(C)** 13
(D) 24   **(E)** impossible to determine

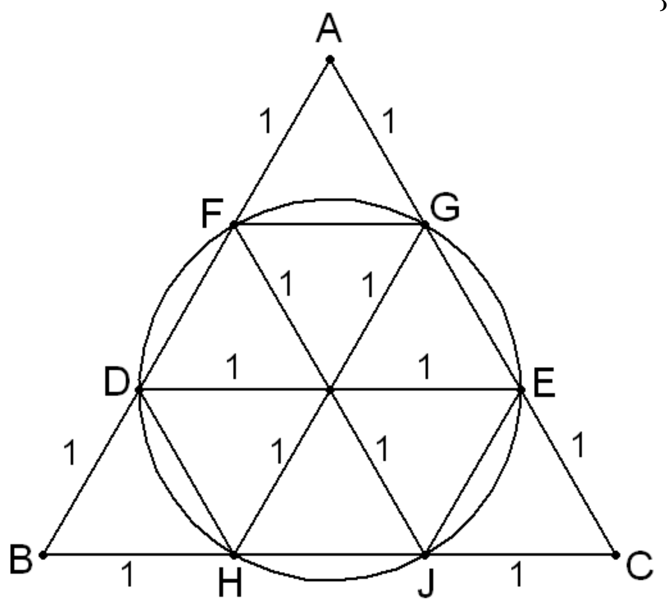
"Noble" = aatelinen, tässä ritari, "liar" = valehtelija, tässä kelmi.
Ensimmäinen ei voi puhua totta, sillä silloin esimerkiksi viimeinen ei voisi väittää edellään seisovaa kelmiksi. (Koska puhuisi totta, vaikka on kelmi.) Ensimmäinen on siis kelmi, jolloin hänen takanaan seisova puhuu totta eli on ritari. Seuraava siis valehtelee ja niin edelleen. Joka toinen jonossa seisova on kelmi, eli heitä on yhteensä 13 kappaletta.

---

15. We overlap an equilateral triangle with side length of 3 and a circle of radius 1 matching the centers of the two figures. What is the length of the perimeter of the figure that we get?



(**A**) $3 + 2\pi$ (**B**) $6 + \pi$ (**C**) $9 + \frac{\pi}{3}$ (**D**) 3π (**E**) $9 + \pi$



Ympyrän keskipiste on myös kolmion mediaanien leikkauspiste. Koska mediaanit leikkaavat toisensa 1:2, ympyrän keskipisteen kautta piirretty kolmion sivun BC suuntainen suora erottaa tasasivuisen kolmion ADE, jonka sivu on 2. Koska ympyrän säde on 1, pisteet D ja E ovat myös ympyrän ja suuren kolmion leikkauspisteitä. Sama pätee sivuille FJ ja HG. Syntyvät pienet kolmiot ovat alkuperäisen kanssa yhdenmuotoisia (kk), joten ne ovat kaikki tasasivuisia. Piiri koostuu siis suorista osista (yhteispituus 6) ja kolmeen osaan jaetusta puoliympyrän kaaresta, jonka pituus on π, *yhteensä* $6 + \pi$.

---

16. What is the last digit of the number $1^2 - 2^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

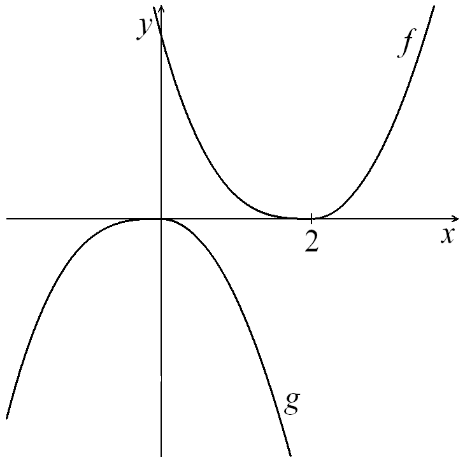
Kongruenssiä hyödyntäen

$$\begin{aligned}
1^2 - 2^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2 &\equiv 1^2 - 2^2 + \ldots - \quad 8^2 + \quad 9^2 && \pmod{10}\\
&\equiv 201 \cdot (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2) && \pmod{10}\\
&\equiv 1 \cdot (1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81) && \pmod{10}\\
&\equiv 1 - 4 + 9 - 6 + 5 - 6 + 9 - 4 + 1 && \pmod{10}\\
&\equiv 5 && \pmod{10}
\end{aligned}$$

---

17. Graphs of real functions f and g are on the figure. What could be the relation between f and g?

(**A**) $g(x) = f(x+2)$
(**B**) $g(x-2) = -f(x)$
(**C**) $g(x) = -f(-x+2)$
(**D**) $g(-x) = -f(-x+2)$
(**E**) $g(2-x) = -f(x)$



Kuvaajan perusteella funktion f kuvaaja on saatu funktion g kuvaajasta peilaamalla se x-akselin suhteen ja siirtämällä kaksi yksikköä oikealle. Tätä vastaisi $f(x) = -g(x-2)$, jonka kanssa yhtäpitävä on $g(x-2) = -f(x)$.

---

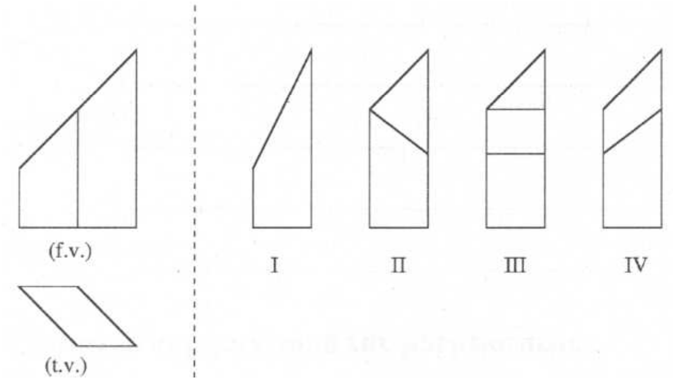
18. Four problems were proposed to each of 100 contestants of a Mathematical Olympiad. 90 contestants solved the first problem, 85 contestants solved the second problem, 80 contestants solved the third problem, and 70 contestants solved the fourth problem. What is the smallest possible number of the contestants which solved all four problems?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

Ensimmäisessä tehtävässä epäonnistui 10 *henkilöä, toisessa* 15, *kolmannessa* 20 *ja neljännessä* 30. *Mikäli eri tehtävissä epäonnistuneet olivat kaikki eri henkilöitä, heitä oli yhteensä* $10 + 15 + 20 + 30 = 75$. *Kaikki tehtävät olivat oikein ainakin* 25 *henkilöllä.*

---

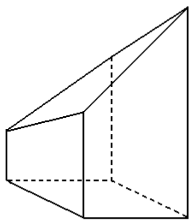
19. In the figure below you see the front view (f.v.) and the top view (t.v.) of a geometric solid.



Which of the figures I to IV describes the view from the left?

(**A**) Figure I (**B**) Figure II (**C**) Figure III (**D**) Figure IV (**E**) None of the above

Näkymä vasemmalta $\longrightarrow$



20. How many ten-digit numbers only composed of 1, 2 and 3 exist, in which any two neighboring digits differ by 1.

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 64 (**D**) 80 (**E**) 100

Koska numerot 1 *ja* 3 *eivät voi olla vierekkäin, ehdot täyttävän luvun joka toinen numero on* 2. *Jäljelle jäävien* 5 *numeron kohdalla voidaan valita kahdesta vaihtoehdosta* (1 *ja* 3), *joten valinta voidaan tehdä* $2^5 = 32$ *eri tavalla. Luvun ensimmäinen numero on joko 2 tai ei ole, ja kummassakin tapauksessa voidaan valita 32 vaihtoehdosta. Lukuja on siis yhteensä* $32 + 32 = 64$ *erilaista.*

5-Point-Problems

21. We have constructed a 3×3-squaretable of real numbers in which the sum in each row, column and diagonal is the same. Two of the numbers are shown in the figure. Which number must be in position a?

a		
		47
	63	

(**A**) 16 (**B**) 51 (**C**) 54
(**D**) 55 (**E**) 110

a	x	y
	z	47
	63	w

Rivien summa on vakio, joten erityisesti viistorivin ja ylimman vaakarivin summa on sama kuin kahden pystyrivin summa:
$(a + x + y) + (a + z + w) = (x + z + 63) + (y + 47 + w)$
$\Leftrightarrow 2a = 63 + 47 = 110.$
$\Leftrightarrow a = 55.$

22. Two persons A and B are running round a stadium. Both of them are running all the time at a constant speed. A runs faster than B and it takes 3 minutes for A to run one turn. A and B start together and 8 minutes later, A catches up B for the first time. How long does it take B to run one turn?

(**A**) 6 min (**B**) 8 min (**C**) 4 min 30 sec
(**D**) 4 min 48 sec (**E**) 4 min 20 sec

Kohtaamishetkellä A on juossut $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ *kierrosta ja B yhden vähemmän eli* $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ *kierrosta. Siihen kului* 8 *minuuttia, joten yhteen kierrokseen kuluu* $\frac{3}{5} \cdot 8 = 4\frac{4}{5}$ *minuuttia eli* 4 *min* 48*s.*

23. Let Z be the number of 8-digit numbers with 8 different digits, none of which is 0. How many 8-digit numbers exist that are divisible by 9, that have 8 different digits, none of which is 0?

(**A**) $\frac{Z}{8}$ (**B**) $\frac{Z}{3}$ (**C**) $\frac{Z}{9}$
(**D**) $\frac{8Z}{9}$ (**E**) $\frac{7Z}{8}$

Luku on jaollinen yhdeksällä täsmälleen silloin, kun sen numerosummakin on. Käytettävissä ovat luvut 1*–* 9*, joiden summa on* 45*, joka on yhdeksällä jaollinen. Jotta kahdeksan numeron summa pysyisi yhdeksällä jaollisena, myös puuttuvan numeron täytyy olla yhdeksällä jaollinen, eli* 9*. Suotuisia lukuja on siis* $\frac{1}{9}$ *kaikista luvuista.*

---

24. For how many integers $n \geq 3$ does there exists a convex n-gon, whose angles are in ratio $1 : 2 : \ldots : n$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) more than 5

Suurimman kulman osuus kaikista kulmista on

$$\frac{n}{1+2+\ldots+n} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}.$$

n*-kulmion kulmien summa on* $180° \cdot (n-2)$*, eli suurin kulma on*

$$180° \cdot (n-2) \cdot \frac{2}{n+1} = 360° \cdot \frac{n-2}{n+1}.$$

Jotta monikulmio olisi kupera, suurimman kulman täytyy olla alle $180°$*, eli* $\frac{n-2}{n+1} < \frac{1}{2}$*. Tästä ratkaistuna* $2(n-2) < n+1 \Leftrightarrow n < 5$*. Siis vain arvot* $n = 3$ *ja* $n = 4$ *kelpaavat.*

---

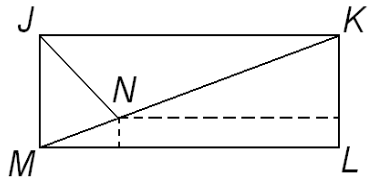
25. 55 schoolchildren took part in math Olympiad. When checking the problems, the jury marked them either with "+" – the problem was solved, or with "−" – the problem was not solved, or with "0" – participant skipped the problem. Later it occurred that no two works had the same number of "+" and "−". What is the least number of problems at the Olympiad?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 11 (**E**) 12

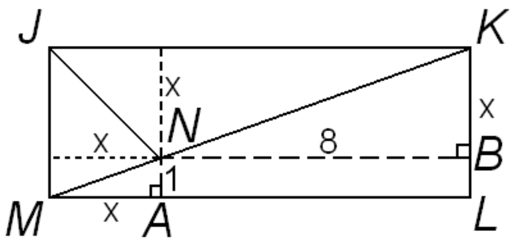
Olkoon kisassa n *tehtävää. Jos paperissa ei ole yhtään plusmerkkiä, miinusmerkkejä on 0–*n *kappaletta eli* $n+1$ *vaihtoehtoa. Jos plusmerkkejä on 1, miinuksia on korkeintaan* $n-1$ *eli* n *vaihtoehtoa ja niin edelleen. Vihdoin* n *plusmerkkiä jättää vain yhden vaihtoehdon - miinuksia ei ole lainkaan. Eri vaihtoehtoja on siis* $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *kappaletta. Lauseke* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *saavuttaa arvon 55, kun* $n = 9$*.*

---

26. In a rectangle $JKLM$, the bisector of angle KJM cuts the diagonal KM at point N. The distances between N and the sides LM and KL are respectively 1 and 8. Then LM is :



(**A**) $8+2\sqrt{2}$ (**B**) $11-\sqrt{2}$ (**C**) 10
(**D**) $8+3\sqrt{2}$ (**E**) $11+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Jana JN on suoran kulman puolittajalla, joten x:llä merkityt sivut ovat yhtä suuret. Kolmiot MAN ja MLK ovat yhdenmuotoiset, joten $\frac{x}{8}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{8}$
Sivun LM pituus on siis $8+\sqrt{8}=8+2\sqrt{2}$.

27. If $k=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$, how many possible values of k are there?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

Lavennetaan samannimisiksi:

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{b(b+a)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{c(c+a)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Osoittajien täytyy olla samat, eli

$$\begin{aligned} a^3+a^2(b+c)+abc &= b^3+b^2(a+c)+abc = c^3+c^2(a+b)+abc \\ a^3+a^2(b+c) &= b^3+b^2(a+c) = c^3+c^2(a+b) \\ a^2(a+b+c) &= b^2(a+b+c) = c^2(a+b+c) \end{aligned}$$

Nyt vaihtehtoja on kaksi: Joko $a^2=b^2=c^2$, jolloin $a=b=c$ (eivät voi olla vastalukuja, koska nimittäjään tulisi nolla) ja $k=\dfrac{a}{a+a}=\dfrac{1}{2}$. Toinen vaihtoehton on $a+b+c=0$ eli $b+c=-a$. Tällöin $k=\dfrac{a}{-a}=-1$. Luku k on siis joko $\dfrac{1}{2}$ tai -1.

28. The numbers $1; 2; 3; \ldots; 99$ are distributed into n groups under the conditions:

1. each number is exactly in one group;
2. there are at least two numbers in each group;
3. if two numbers are in one and the same group, then their sum is not divisible by 3.

The smallest n with this property is:

(**A**) 3 (**B**) 9 (**C**) 33 (**D**) 34 (**E**) 66

Lukujen $1, \ldots, 99$ joukossa on 33 kolmella jaollista lukua. Niistä minkä tahansa kahden summa on kolmella jaollinen, joten tarvitaan vähintään 33 ryhmää. Tutkitaan, riittääkö tämä: Ryhmitellään luvut aluksi ryhmiin $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \ldots, \{97, 98, 99\}$. Tällöin jokainen ryhmä on muotoa $\{3k-2, 3k-1, 3k\}$, missä lukujen $3k-2$ ja $3k-1$ summa on aina kolmella jaollinen, koska $3k-1+3k-2 = 6k-3 = 3(2k-1)$. Nyt vaihdetaan kahdessa ensimmäisessä ryhmässä luvut 2 ja 4 keskenään. Saadaan $\{1, 3, 4\}$ ja $\{2, 5, 6\}$. Vaihdetaan samalla tavalla aina kahdessa perättäisessä ryhmässä muotoa $3k-1$ oleva luku ylempään ja muotoa $3k-2$ oleva alempaan. Näin voidaan tehdä 32:ssa ryhmässä, mutta viimeiselle ryhmälle $\{97, 98, 99\}$ ei ole paria. Luku 97 voidaan kuitenkin sijoittaa 1. ryhmään, jolloin siellä ovat luvut $\{1, 3, 4, 97\}$. Nyt ryhmiä on 33 ja minkään kahden samassa ryhmässä olevan luvun summa ei ole kolmella jaollinen.

---

29. Samantha and her 3 sisters go to the theatre. They have a booth with four seats. Samantha and two of her sisters arrive earlier and each take a seat at random on any of the four seats. What is the probability that Samantha has to move when her youngest sister Marie arrives if Marie insists that she take her assigned seat and then so does any of the sisters that have to stand up?

(**A**) $\frac{3}{4}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Samantha on voinut valita 4 tuolista, sisar A kolmesta ja sisar B kahdesta, joten eri järjestyksiä on $4! = 24$. Samanthan ei tarvitse liikkua, jos hän istuu omalla tuolillaan (6 tapausta). Hänen on pakko liikkua, jos hän istuu viimeisenä saapuvan sisaren C tuolissa (6 tapausta). Lopuissa 12 tapauksessa Samantha istuu joko A:n tai B:n paikalla. Luokitellaan tapaukset sen mukaan, kuka istuu sisaren C tuolissa:

1. *Ei kukaan (4 tapausta) - Samanthan ei tarvitse liikkua*
2. *Sisar A (4 tapausta) - Samanthan ei tarvitse liikkua, jos vapaana on A:n penkki (1 tapaus)*
3. *Sisar B (4 tapausta) - Samanthan ei tarvitse liikkua, jos vapaana on B:n penkki (1 tapaus)*

Samanthan ei siis tarvitse liikkua $6 + 4 + 1 + 1 = 12$ tapauksessa 24:stä, joten hänen täytyy liikkua todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

---

30. The sequence of integers a_n is defined by: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ for $n \geq 0$. When a_{2009} is divided by 7, the rest is:

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 6

Tarkastellaan lukujonon jäsenten jakojäännöksiä modulo 7. Jonon jäsenen jakojäännös määräytyy kahden edellisen jäsenen jakojäännöksen perusteella.

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 1 \\
&a_1 = 2 \\
&a_2 = 2^2 + 1 = 5 \\
&a_3 = 5^2 + 2 = 27 && \equiv 6 \pmod 7 \\
&a_4 \equiv 6^2 + 5 = 41 && \equiv 6 \pmod 7 \\
&a_5 \equiv 6^2 + 6 = 42 && \equiv 0 \pmod 7 \\
&a_6 \equiv 0^2 + 6 = 6 && \equiv 6 \pmod 7 \\
&a_7 \equiv 6^2 + 0 = 36 && \equiv 1 \pmod 7 \\
&a_8 \equiv 1^2 + 6 = 7 && \equiv 0 \pmod 7 \\
&a_9 \equiv 0^2 + 1 = 1 && \equiv 1 \pmod 7 \\
&a_{10} \equiv 1^2 + 0 = 1 && \equiv 1 \pmod 7 \\
&a_{11} \equiv 1^2 + 1 = 2 && \equiv 2 \pmod 7
\end{aligned}
$$

Nähdään siis, että $a_{10} \equiv a_0 \pmod 7$ *ja* $a_{11} \equiv a_1 \pmod 7$. *Tästä seuraa, että yleisesti* $a_{n+10} \equiv a_n \pmod 7$, *kun* $n \geq 0$. *Siis* $a_{2009} \equiv a_9 \equiv 1 \pmod 7$.