3-Point-Problems

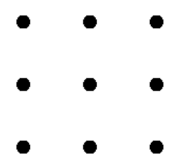
1. Which among these numbers is a multiple of 3?

(**A**) 2009 (**B**) $2+0+0+9$ (**C**) $(2+0)\cdot(0+9)$
(**D**) 200^9 (**E**) $200-9$

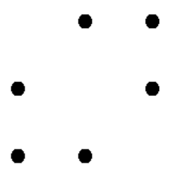
Ainoa 3 jaollinen on $(2+0)\cdot(0+9)=18$. *Luku* 200^9 *ei ole jaollinen kolmella, koska* $200=2^3\cdot5^2$, *joten sen* 9. *potenssissakaan ei ole tekijänä lukua* 3.

---

2. What is the smallest number of points in the figure one needs to remove so that no 3 of the remaining points are collinear?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 7



Kolme riittää, kun ne poistetaan samalta viistoriviltä kuvan mukaisesti. Vähempi ei riitä, koska silloin jollekin vaakariveistä jäisi kolme pistettä.

---

3. 2009 people have participated in a popular race. The number of people that John has won is three times the number of people that have won John. In what place has John been classified in the race?

(**A**) 503 (**B**) 501 (**C**) 500 (**D**) 1503 (**E**) 1507

Olkoot n *ihmistä voittanut Johnin. Voitettuja on silloin* $3n$, *joten John mukaan lukien kilpailijoita on* $n+1+3n=2009 \Leftrightarrow n=502$. *John oli siis sijalla* 503.

---

4. What is the value of the $\frac{1}{2}$ of $\frac{2}{3}$ of $\frac{3}{4}$ of $\frac{4}{5}$ of $\frac{5}{6}$ of $\frac{6}{7}$ of $\frac{7}{8}$ of $\frac{8}{9}$ of $\frac{9}{10}$ of 1000?

(**A**) 250 (**B**) 200 (**C**) 100
(**D**) 50 (**E**) None of these

Lähes kaikki supistuu:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot1000=\frac{1}{10}\cdot1000=100.$$

---

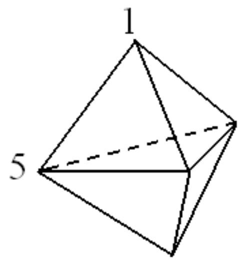
5. A long sequence of digits has been composed by writing the number 2009 repeatedly 2009 times. The sum of those odd digits in the sequence that are immediately followed by an even digit is equal to

(**A**) 2 (**B**) 9 (**C**) 4018 (**D**) 18072 (**E**) 18081

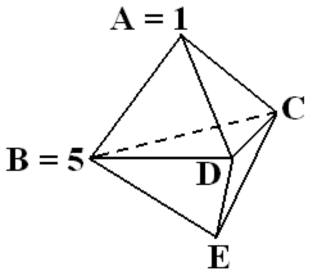
Ainoita parittomia numeroita ovat yhdeksiköt, joita on 2009 *kappaletta. Niistä kaikkia paitsi viimeistä seuraa parillinen luku, eli kysytty summa on* $2008\cdot9=18072$.

<

6. The picture shows a solid formed with 6 triangular faces. At each vertex there is a number. For each face we consider the sum of the 3 numbers at the vertices of that face. If all the sums are the same and two of the numbers are 1 and 5 as shown, what is the sum of all the 5 numbers?



(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 24



Tahkojen ABC ja ADC summa on sama, joten $1 + 5 + C = 1 + D + C$, *eli* $D = 5$. *Joka tahkon summa on siis* $1 + 5 + 5 = 11$, *joten myös* $C = 5$ *ja* $E = 1$. *Kaikkien kärkien summa on* $1 + 5 + 5 + 5 + 1 = 17$.

---

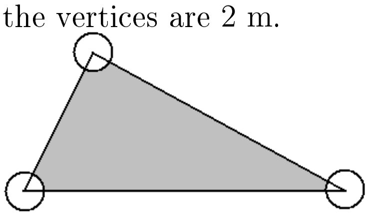
7. How many positive integers have equally many digits in the decimal representation of their square and their cube?

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4
(**D**) 9 (**E**) infinitely many

Kun $n \geq 10$, n^3 *on ainakin kymmenen kertaa suurempi kuin* n^2, *jolloin niissä on eri määrä numeroita. Riittää tarkistaa luvut* $1 - 9$. *Ehdon toteuttavat luvut* 1, 2 *ja* 4. ($1^2 = 1$, $1^3 = 1$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$.)

---

8. The area of the triangle of the picture is 80 m^2 and the radii of the circles centered at the vertices are 2 m.



What is the measure, in m^2, of the shaded area?

(**A**) 76 (**B**) $80 - 2\pi$ (**C**) $40 - 4\pi$ (**D**) $80 - \pi$ (**E**) 78π

Ympyrät erottavat kolmiosta kolme ympyräsektoria. Kolmien kulmien summa on $180°$, *joten sektorit muodostavat yhteensä puoliympyrän. Niiden yhteinen ala on siis neliösentteinä* $\pi \cdot 2^2 : 2 = 2\pi$, *eli tummennettu ala on* $80 - 2\pi$.

---

9. Leonard has written a sequence of numbers, such that each number (from the third number in the sequence) was a sum of previous two numbers in the sequence. The forth number in the sequence was 6 and the sixth number in the sequence was 15. What was the seventh number in the sequence?

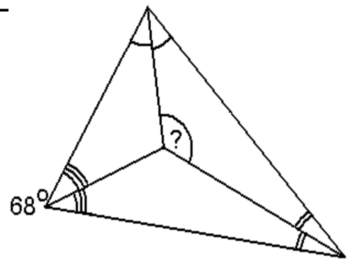
(**A**) 9 (**B**) 16 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

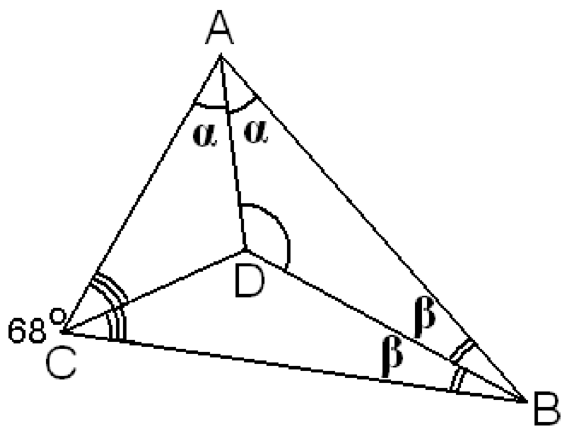
Olkoon viides luku x. *Tällöin kuudes luku on* $15 = 6 + x$ *eli* $x = 9$ *ja seitsemäs luku on* $9 + 15 = 24$.

---

10. A triangle has an angle of 68°. The three angle bisectors are drawn. How many degrees is the angle with the question mark?

(**A**) 120° (**B**) 124° (**C**) 128° (**D**) 132° (**E**) 136°





Kolmiosta ABC *saadaan* $2\alpha + 2\beta + 68° = 180° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 56°$. *Kolmiosta* ABD *saadaan ratkaistua kysytyn kulman suuruudeksi* $180° - \alpha - \beta = 180° - 56° = 124°$.

4-Point-Problems

---

11. At each test, you can get 0, 1, 2, 3, 4 or 5 points. After 4 tests, the Mary's average is 4. One of the sentences cannot be true. Which is it?

(**A**) Mary got 4 points in each test.

(**B**) Mary got 3 points exactly twice.

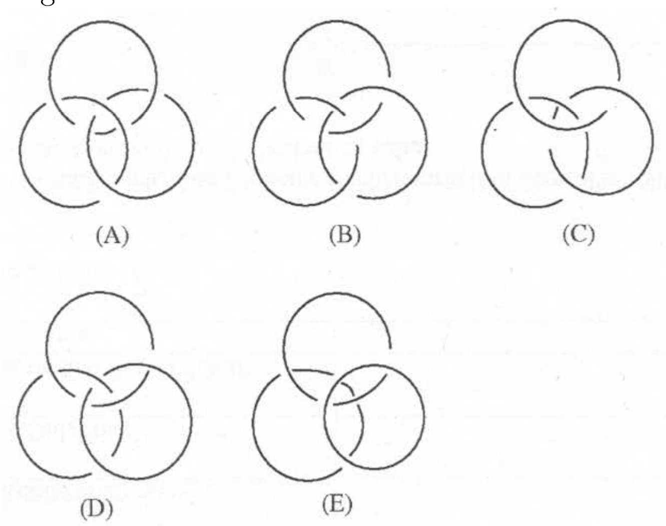
(**C**) Mary got 3 points exactly 3 times.

(**D**) Mary 1 point exactly once.

(**E**) Mary 4 points exactly twice.

Koska neljän kokeen keskiarvo on 4, pisteiden summa eri kokeista on 16. Tämä ei ole mahdollista, jos kolmosia on tullut kolme kappaletta - viimeisen pistemäärän tulisi olla $16 - 3 \cdot 3 = 7$.

12. The Borromean rings have the surprising property that the three of them cannot be separated without destroying them but once one of them is removed (regardless which one), the other two are not linked anymore. Which of the following figures shows the Borromean rings?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

---

13. On the island of nobles and liars 25 people are standing in a queue. Everyone, except the first person in the queue, said that the person before him in the queue is a liar, and the first man in the queue said that all people standing after him are liars. How many liars are there in the queue? (Nobles always speak the truth, and liars always tell lies.)

(**A**) 0 (**B**) 12 (**C**) 13
(**D**) 24 (**E**) impossible to determine

"Noble" = aatelinen, tässä ritari, "liar" = valehtelija, tässä kelmi.
Ensimmäinen ei voi puhua totta, sillä silloin esimerkiksi viimeinen ei voisi väittää edellään seisovaa kelmiksi. (Koska puhuisi totta, vaikka on kelmi.) Ensimmäinen on siis kelmi, jolloin hänen takanaan seisova puhuu totta eli on ritari. Seuraava siis valehtelee ja niin edelleen. Joka toinen jonossa seisova on kelmi, eli heitä on yhteensä 13 kappaletta.

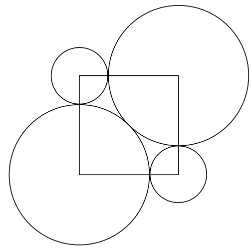
---

14. If $a\Box b = ab + a + b$, and $3\Box 5 = 2\Box x$, then x equals

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 10 (**E**) 12

$$\begin{aligned} 3\Box 5 &= 2\Box x \\ 3\cdot 5 + 3 + 5 &= 2x + 2 + x \\ 23 &= 3x + 2 \\ 7 &= x. \end{aligned}$$

15. Around the vertices of a square circles are drawn: 2 large and 2 small ones. The large circles are tangent to each other and to both the small circles. What is the ratio of the radius of the large circle to the radius of the small circle?



(**A**) $\frac{2}{9}$ (**B**) $\sqrt{5}$ (**C**) $1+\sqrt{2}$ (**D**) $2,5$ (**E**) $0,8\pi$

Olkoon neliön sivu s. Suuren ympyrän säde on puolet neliön lävistäjästä eli $\frac{\sqrt{2}}{2}s$. *Pienen ympyrän säteeksi jää* $s-\frac{\sqrt{2}}{2}s$. *Kysytty suhde on siis*

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}s}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)s}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1.$$

---

16. The distance on the number line between $\sqrt{n}$ and 10 is less than 1. How many such integer n exist?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 39 (**D**) 40 (**E**) 41

$$\begin{aligned} & |\sqrt{n}-10|<1 & \\ \Leftrightarrow\quad & -1<\sqrt{n}-10<1 & \|+10 \\ \Leftrightarrow\quad & 9<\sqrt{n}<11 & \|(\ )^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 81<n<121 & \end{aligned}$$

Lukujen 81 ja 121 välissä on 39 *kokonaislukua.*

---

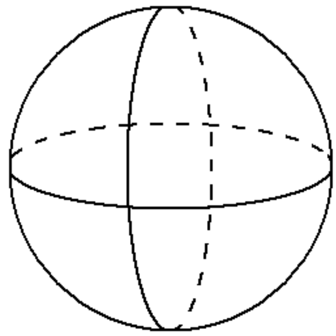
17. Man Friday wrote down in a row several different positive integers not exceeding 10. Robinson Crusoe examined these numbers and noticed with satisfaction that in each pair of neighbouring numbers one of the numbers is divisible by another. At most how many numbers did Man Friday write down?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

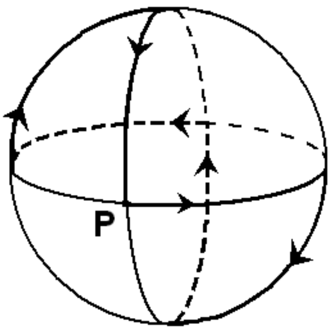
Yhdeksän peräkkäistä on mahdollista, esimerkiksi $6,3,9,1,4,8,2,10,5$. *Kymmenen ei ole mahdollista, sillä ainoa tapa, jolla joukkojen* $\{3,6,9\}$, $\{4,8\}$, $\{5,10\}$ *ja* $\{7\}$ *jäseniä voi yhdistää samaan ketjuun on käyttää välissä lukuja* 1 *tai* 2. *Näitä ” linkkejä ” on kuitenkin vain kaksi, joten kaikkien neljän joukon jäseniä ei voi yhdistää toisiinsa.*

---

18. 3 circular hoops are joined together so that they intersect at right angels as shown. A ladybird lands on an intersection and crawls around the hoop as follows : she travels along a quarter-circle, turns right 90°, travels along a quarter-circle and turns left 90°. Proceeding in this way, how many quarter-circles will she travel along before she first returns to her starting point?



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18



Aloitetaan mielivaltaisesta risteyksestä P ja edetään ohjeen mukaan. Lähtöpisteeseen palataan 6 neljännesympyrän jälkeen. Kokeile itse pallolla!

---

19. How many zeros should be inscribed in place of $*$ in the decimal fraction $1.*1$ in order to get a number that is less than $\frac{2009}{2008}$ but greater than $\frac{20009}{20008}$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

$\frac{2009}{2008} = 1 + \frac{1}{2008}$, $\frac{20009}{20008} = 1 + \frac{1}{20008}$. *Koska* $\frac{1}{20008} < 0,0001 < \frac{1}{2008}$, *vastaus on* 3.

---

20. If $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ and $c = 3^{11}$, then

(**A**) $a < b < c$ (**B**) $b < a < c$ (**C**) $c < b < a$ (**D**) $c < a < b$ (**E**) $b < c < a$

Sievennetään: $b = 8^8 = (2^3)^8 = 2^{24} < a$. *Toisaalta* $b = 2^{24} = (2^2)^{12} = 4^{12} > c$. *Siis* $c < b < a$.

5-Point-Problems

---

21. How many ten-digit numbers only composed of 1, 2 and 3 exist, in which any two neighbouring digits differ by 1?

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 64 (**D**) 80 (**E**) 100

Koska numerot 1 *ja* 3 *eivät voi olla vierekkäin, ehdot täyttävän luvun joka toinen numero on* 2*. Jäljelle jäävien* 5 *numeron kohdalla voidaan valita kahdesta vaihtoehdosta* (1 *ja* 3)*, joten valinta voidaan tehdä* $2^5 = 32$ *eri tavalla. Luvun ensimmäinen numero on joko 2 tai ei ole, ja kummassakin tapauksessa voidaan valita 32 vaihtoehdosta. Lukuja on siis yhteensä* $32 + 32 = 64$ *erilaista.*

---

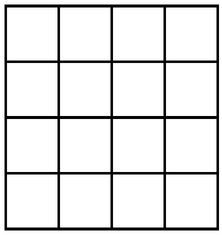
22. Young Kangaroo has 2009 unit $1 \times 1 \times 1$ cubes that he has placed forming a cuboid. He has also 2009 stickers 1×1 that he must use to color the outer surface of the cuboid. Young Kangaroo has achieved its goal and has stickers left. How many stickers has he left?

(**A**) more than 1000
(**B**) 763
(**C**) 476
(**D**) 49
(**E**) It is not true that the Kangaroo can achieve his goal

$2009 = 7^2 \cdot 41$, *joten särmiön mitat ovat* $7 \times 7 \times 41$ *tai sellaiset, jossa jonkin särmän pituus on* 1. *Särmän pituus ei voi olla* 1, *koska sitä vastaan kohtisuoran tahkon pinta-ala olisi* 2009 *ja tarrat eivät riittäisi. Ainoat mahdolliset mitat ovat siis* $7 \times 7 \times 41$, *joten särmiön pinta-ala on* $A = 2(7 \cdot 7 + 7 \cdot 41 + 7 \cdot 41) = 1246$. *Yli jää siis* $2009 - 1246 = 763$ *tarraa.*

---

23. Bob wants to place draughts into cells of 4×4 board so that the numbers of the draughts in any row and in any column will be different (more than one draught can be placed into one cell as well as the cell can be empty). What is the smallest possible number of draughts placed on the board?



(**A**) 13 (**B**) 14 (**C**) 17 (**D**) 19 (**E**) 20

				0
		1	2	3
	1	2	1	4
1	1	2	3	7
1	2	5	6	

14 nappulaa on mahdollista kuvan osoittamalla tavalla. Vähempään ei ole mahdollista päästä, koska pienimmät mahdolliset summat ovat 0, 1, ..., 7, *ja niiden summa on* 28. *Tähän summaan joka nappula lasketaan kahdesti, joten vähimmäismäärä on 14.*

---

24. Some oranges, peaches, apples and bananas were put in a row, so that somewhere in the row each type of fruit can be found next to each other type of fruit. What is the least number of fruits in the row?

(**A**) 4
(**B**) 5
(**C**) 8
(**D**) 11
(**E**) this situation is impossible

Jokaisen hedelmän on esiinnyttävä vähintään kahdesti, koska yksi hedelmä voi olla vain kahden muun vieressä. Hedelmiä tarvitaan siis vähintään $2 \cdot 4 = 8$ *kappaletta. Tämä on mahdollista, esimerkiksi AOPABOPB.*

---

25. What is the least integer n, for which $(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot\ldots(n^2-1)$ is a perfect square?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 16 (**D**) 27 (**E**) other answer

Jaetaan sulkulausekkeet tekijöihin muistikaavan $n^2-1=(n-1)(n+1)$ mukaisesti. Kirjoitetaan tuloa auki, kunnes kaikkia alkutekijöitä on parillinen määrä. Tämä tapahtuu, kun $n=8$.

$$\underbrace{(2-1)}_{1}\underbrace{(2+1)}_{3}\underbrace{(3-1)}_{2}\underbrace{(3+1)}_{4}\underbrace{(4-1)}_{3}\underbrace{(4+1)}_{5}\underbrace{(5-1)}_{4}\underbrace{(5+1)}_{6}\underbrace{(6-1)}_{5}\underbrace{(6+1)}_{7}\underbrace{(7-1)}_{6}\underbrace{(7+1)}_{8}\underbrace{(8-1)}_{7}\underbrace{(8+1)}_{9}$$

---

26. All divisors of the number N, not equal to N or 1, were written in line. It occurred, that the greatest of the divisors in the line is 45 times as great as the least one. How many numbers satisfy this condition?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2
(**D**) more then 2 (**E**) impossible to determine

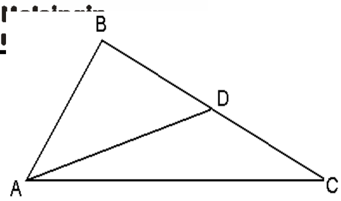
Kuvaillun kaltaisella luvulla on aina tekijänään 3, koska $45=3\cdot15$. Pienin tekijä on siis joko 2 tai 3. Kumpikin on mahdollista: Vastaavat suurimmat tekijät ovat $2\cdot45=90$ ja $3\cdot45=135$. Tällöin luvuksi N saadaan $2\cdot90=180$ ja $3\cdot135=405$. Muita mahdollisuuksia ei ole, koska jos luvulla N olisi vielä muita tekijöitä, 90 ja 135 eivät olisi suurimmat tekijät. Tämä on yleinen ominaisuus: mikäli luvulla on itseään pienempiä tekijöitä, jotka ovat suurempia kuin 1, luku on niistä suurimman ja pienimmän tulo.

---

27. A kangaroo is sitting in the origin of a coordinate system. It can jump 1 unit vertically or horizontally. How many points are there in the plane where the kangaroo can be after 10 jumps?

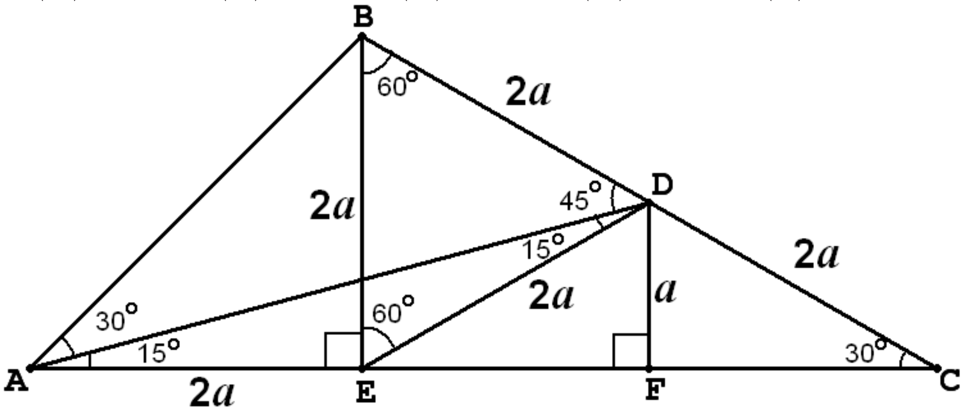
(**A**) 100 (**B**) 121 (**C**) 400
(**D**) 441 (**E**) none of the others

Kengurun kymmenellä hypyllä saavuttamat pisteet muodostavat neliön, jonka kärkinä ovat pisteet $A=(-10,0)$, $B=(0,-10)$, $C=(10,0)$ ja $D=(0,10)$. Koska joka hypyllä toinen koordinaatti muuttuu yhdellä, kenguru voi parillisella määrällä hyppyjä saavuttaa vain pisteet, joiden koordinaattien summa on parillinen. Neliön jokaisella sivulla on 11 tällaista pistettä (esimerkiksi kokonaislukukoordinaatit janalla CD), ja pisteitä on yhteensä $11^2=121$ kappaletta.



28. Let AD be a median in the triangle ABC. The angle ACB has measure $30°$, the angle ADB has measure $45°$. What is the measure of the angle BAD?

(**A**) $45°$ (**B**) $30°$ (**C**) $25°$ (**D**) $20°$ (**E**) $15°$



Asetetaan $DF = a$, jolloin $CD = 2a$, koska $\angle ACB = 30°$. Kolmiot CFD ja CEB ovat yhdenmuotoiset (kk), joten $BE = 2a$ ja $BC = 4a$ eli $BD = 2a$. Myös $ED = CD$ (yhtenevät kolmiot CFD ja EFD tai kolmion DEC tasakylkisyys, koska korkeusjana puolittaa kannan), joten kolmio EDB on tasasivuinen. Kulma EDA on siis $60° - 45° = 15°$. Myös $\angle DAE = 15°$ (kolmion EAD kulmien summa), joten kolmio EAD on tasakylkinen. Siis $AE = 2$, joten kolmio AEB on tasakylkinen. Siis $\angle BAD = 45° - 15° = 30°$.

---

29. A square has been dissected into 2009 squares whose lengths of the sides are integers. What is the shortest possible length of the side of the original square?

(**A**) 44
(**B**) 45
(**C**) 46
(**D**) 503
(**E**) It is not possible to dissect a square into 2009 such squares

Pienten neliöiden pienin sivu on pisin, kun neliöt ovat yhtä suuria. Koska $44^2 = 1936 < 2009$ ja $45^2 = 2025 > 2009$, suuren neliön sivun täytyy olla vähintään 45. Tämä riittää, kun menetellään seuraavasti: Jaetaan suuri neliö ensin 45×45 pieneen neliöön. Yhdistetään 9 pientä neliötä yhdeksi, jolloin neliöiden määrä vähenee kahdeksalla. Toistetaan tämä toisten 9 pienen neliön kohdalla ja neliöiden kokonaismäärä on $2025 - 8 - 8 = 2009$.

---

30. A prime number is defined as being "strange" if it is either a one digit prime or if it has two or more digits but both numbers obtained by omitting either its first or its last digit is also "strange". How many strange primes are there?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 11

Yksinumeroisia alkulukuja ovat 2, 3, 5 ja 7. Näistä voidaan rakentaa ehdot täyttävät kaksinumeroiset alkuluvut 23, 37, 53, ja 73. Kolminumeroisia lukuja, joilla sekä alku että loppu on kaksinumeroinen "outo" alkuluku, ovat 237, 373, 537, ja 737. Niistä vain 373 on alkuluku, sillä $237 = 3 \cdot 79$, $537 = 3 \cdot 179$ ja $737 = 11 \cdot 67$. Luku 373 ei voi olla sekä alku että loppu nelinumeroiselle luvulle, joten nelinumeroisia tai sitä suurempia "outoja" alkulukuja ei ole. "Oudot" alkuluvut ovat siis $2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73$ ja 373, eli niitä on 9 kappaletta.
