3 points

---

1) Numbers 3, 4 and two other unknown numbers are writtenin the cells of 2×2 table. It is known that the sums of the numbers in the rows are equal to 5 and 10, and the sum of the numbers in one of the columns is equal to 9. The bigger of the two unknown numbers is ?

Numerot 3 ja 4 eivät voi olla samalla rivillä. Koska rivien summat tiedetään, puuttuvat numerot ovat 2 ja 6.

2	3	5
4	6	10
	9	

Esimerkiksi sijoittamalla ensimmäiselle vaakariville 2 ja 3 sekä toiselle vaakariville 4 ja 6 annetut ehdot täyttyvät. Suurempi tuntematon luku on siis 6.

A) 5 **B) 6** C) 7 D) 8 E) 3

---

2) If $x + y = 0$ and $x \neq 0$, then $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

$x + y = 0, x \neq 0$, *jolloin* $y = -x$ *ja* $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} = \left(\frac{x}{-x}\right)^{2008} = (-1)^{2008} = 1$

A) -1 B) 0 **C) 1** D) 2^{2008} E) $\frac{x}{y}$

---

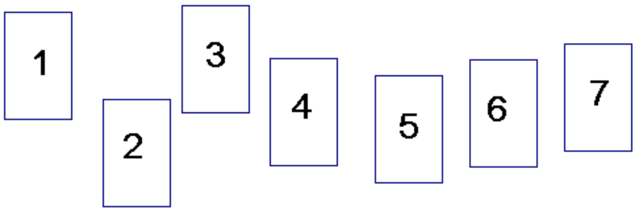
3) An array contains 21 columns numbered 1, 2, …, 21 and 33 rows numbered 1, 2, …, 33. We erase the columns whose number is not a multiple of 3 and also the rows whose number is even. How many cells of the array remain after that?

Jäljelle jää pystyrivit, joiden numero on kolmella jaollinen eli 3, 6, 9, 12, 15, 18 ja 21 sekä parittomat vaakarivit eli 1, 3, …,31 ja 33. Pystyrivejä on jäljellä 7 ja vaakarivejä 17, joten alkioita yhteensä on $7 \cdot 17 = 119$

A) 110 B) 121 C) 115,5 **D) 119** E) 242

---

4) A box contains seven cards. The cards are numbered from 1 to 7. Mary picks, at random, three cards from the box and afterwards John picks two cards. Two cards are left in the box. Then Mary says to John: “I know that the sum of the numbers of your cards is even.” The sum of the numbers on Mary´s cards is equal to

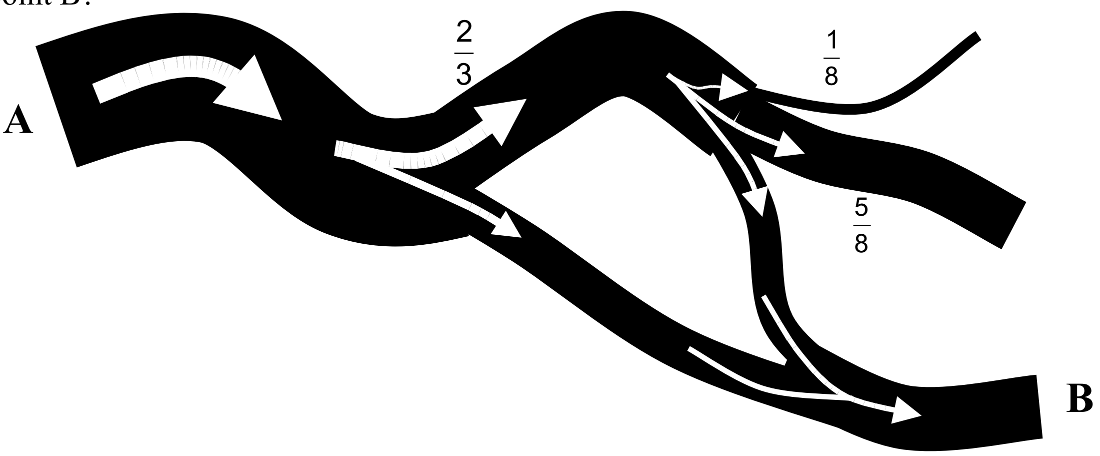


Mary tietää varmasti, että Johnin kahden kortin summa on parillinen, jos hän itse on ottanut kaikki parilliset kortit. $2+4+6=12$

A) 10 **B) 12** C) 6 D) 9 E) 15

---

5) A river starts at point A. As it flows the river splits in two. The first branch takes 2/3 of the water and the second takes the rest. Later the first branch splits in three, one taking 1/8th of the branch’s water, the second 5/8ths and the third the rest. Further down this last branch meets again a branch of the river. The map below shows the situation. What proportion of the original water flows at the point B?



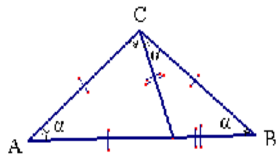
Olkoon pisteen A kautta virtaava vesimäärä a. Ensimmäisestä haarautumiskohdasta pisteeseen B suuntautuu $\frac{1}{3}a$. *Loppu* $\frac{2}{3}a$ *haarautuu edelleen niin, että pisteeseen B siitä suuntautuu* $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Yhteensä pisteeseen B suuntautuu $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}a=\frac{1}{2}a$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

---

6) In an isosceles triangle ABC (CA = CB) the point D is marked on the side AB so that AD = AC and DB = DC (see the fig.). Find the value of the angle ACB.



Olkoon tasakylkisen kolmion ABC kantakulmat α. Koska kolmio BCD on tasakylkinen, on myös kulma BCD = α. Koska kulma CAD on tasakylkisen kolmion CAD huippukulma, on kulma

$ACD = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$. *Tällöin kulma* $ACB = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} + \alpha = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. *Toisaalta kulmien ADC ja CDB*

summa on $\dfrac{180^\circ - \alpha}{2} + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$, *josta* $90^\circ = \dfrac{5}{2}\alpha$ *eli* $\alpha = \dfrac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. *Siis kulma*

$ACB = 90^\circ + \dfrac{36^\circ}{2} = 108^\circ$

A) 98° B) 100° C) 104° **D) 108°** E) 110°

---

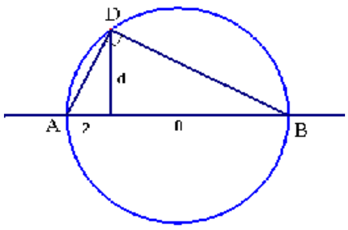
7) The maximum value of $f(x) = |5\sin x - 3|$ for $x \in$ **R** is

$-1 \le \sin x \le 1$ *ja* $-5 \le 5\sin x \le 5$, *josta edelleen* $-8 \le 5\sin x - 3 \le 2$. *Tällöin* $|5\sin x - 3| \le 8$

A) 2 B) 3 C) π D) 5π **E) 8**

---

8) The figure shows a circle with the diameter AB and point D on it. Find d.

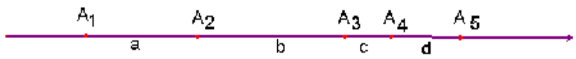


Kulma $ADB = 90^\circ$ *puoliympyrän sisältämänä kehäkulmana. Kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhdenmuotoiseen kolmioon, joista saadaan kateettien suhteina 2:d = d:8, josta edelleen* $d^2 = 16$ *ja edelleen* $d = \pm 4$. *Kuvan mukaan* $d = 4$.

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ **C) 4** D) 5 E) 6

9) We have five different points A_1, A_2, A_3, A_4 and A_5, placed in this order on a straight line (with some distances that can be different between the points). Another point P is placed on the same line so that the sum of the distances $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$ is minimal. Then the point P is

$PA_1 + PA_5 = a + b + c + d$ *pisteen P paikasta riippumatta. Kun* $P = A_3$*, on* $PA_2 + PA_3 + PA_4 = b + c$*. Kaikissa muissa tapauksissa on summassa* $PA_2 + PA_3 + PA_4$ *joku suoran osa kahteen kertaan, joten pienin summa saadaan kun* $P = A_3$



A) A_1 B) A_2 <u>**C)**</u> A_3
D) Any point between A_2 and A_4 E) Any point between A_1 and A_5

---

10) Nora wants to have on the empty places of 2 _ _ 8 two such digits that the complete number is divisible by 3. How many possibilities are there?

Luku on jaollinen kolmella, jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella. Siis $2 + x + y + 8 = x + y + 10$ *on oltava jaollinen kolmella. Tästä seuraa, että* $x + y$ *voi olla 2, 5, 8, 11, 14 tai 17. Saadaan vaihtoehdot 1+1, 0+2, 2+0, 0+5, 5+0, 1+4, 4+1, 2+3, 3+2, 0+8, 8+0, 1+7, 7+1, 2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4, 2+9, 9+2, 3+8, 8+3, 4+7, 7+4, 5+6, 6+5, 5+9, 9+5, 6+8, 8+6, 7+7, 8+9, 9+8 . Yhteensä 33 mahdollisuutta.*

A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 <u>**E) 33**</u>

---

4 points

---

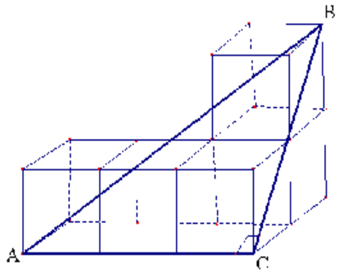
11) Here are seven numbers: {–9, 0, –5, 5, –4, –1, –3}. We arranged six of them in groups of two so that the sum in each group is the same. Which number was not used in the sums?

$-9 + 5 = -4$ *ja* $0 + (-4) = -4$ *ja* $-1 + (-3) = -4$ *Siis −5 ei ole mukana*
Jos ratkaisu ei selviä vain lukuja katselemalla, sen löytää näin: Lukujen summan -17 tulee olla kongruentti yhden annetun luvun kanssa modulo 3, koska kuuden luvun summa on muotoa 3k, missä k on kahden luvun summa. -17 ≡ -2 ≡ -5 (mod 3).

A) 5 B) 0 C) –3 D) –4 <u>**E) –5**</u>

---

12) Each of the cubes in the figure has the length of edge equal to 1. What is the length of the segment AB?



Kolmio ACB on suorakulmainen, joten

$AB = \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{17}$

A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$

---

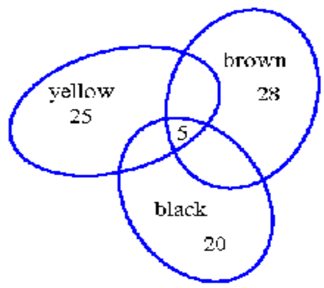
13) Five problems are proposed on a Mathematical Competition. Since the problems have different difficulty levels, no two of them have the same point value (all point values are positive integers). Bill solved all five problems and he obtained a total of 10 points for the two problems with the lowest point value and a total of 18 points for the two problems with the highest point value. How many points did Bill obtain?

Koska pisteet ovat eri suuria ja kahden ensimmäisen summa on 10 ja kahden suurimman summa 18, ovat pisteet 4, 6, 7, 8, ja 10. Näiden summa on 35.

A) 30 B) 32 C) 34 **D) 35** E) 40

---

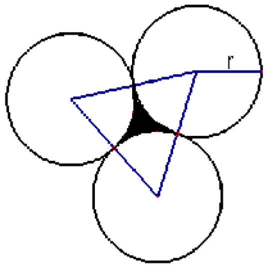
14) Mathilde drew 36 kangaroos using three different colours. 25 of the kangaroos contain some yellow, 28 contain some brown and 20 contain some black colour. Only 5 of them have all the three colours. How many single-colour kangaroos did she draw?



Kenguruja, joilla on yhtä tai kahta väriä, on $36 - 5 = 31$ *. Summassa* $25 + 20 + 28 - 3 \cdot 5 = 58$ *ovat kaksiväriset kahteen kertaan.*
Vähennetään niistä kaksi- ja yksiväriset $58 - 31 = 27$ *, jolloin saadaan kaksiväriset. Yksiväriset saadaan vähentämällä kaksi- ja yksivärisistä kaksiväriset. Siis yksivärisiä on* $31 - 27 = 4$

A) None **B) 4** C) 12 D) 31 E) It’s impossible to know.

15) Three circles touch each other as shown. The radius of each circle is r. The dark area in the middle is



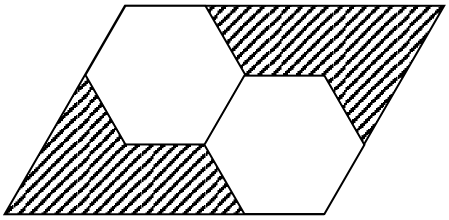
Yhdistämällä ympyröiden keskipisteet saadaan tasasivuinen kolmio, jonka sivut ovat 2r. Kolmion ala on $\frac{2r \cdot r\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$. *Kolmion sisällä olevien ympyräsektoreiden keskuskulmat ovat* 60°, *joten niiden yhteispinta-ala on* $3 \cdot \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi r^2}{2}$. *Musta alue saadaan vähentämällä kolmion alasta sektoreiden ala. Siis* $r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2$

<u>A)</u> $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)r^2$ B) $\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$

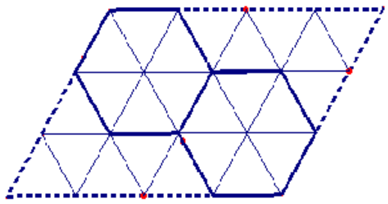
C) $\frac{1}{8}\pi r^2$ D) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\pi r^2$ E) $\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$

---

16) In the figure the two regular hexagons are equal to each other. What fraction of the parallelogram's area is shaded?



Säännölliset kuusikulmiot muodostuvat kuudesta tasasivuisista kolmiosta. Viivoitettu alue jakaantuu myös samanlaisiin kolmioihin, joiden sivut ovat kuusikulmion sivujen suuntaiset ja yhtä pitkät, koska koko alue on suunnikas. Viivoitetulla alueella on 12 pikkukolmiota, kuten kuusikulmioissa yhteensä. Viivoitettu alue on siis puolet koko suunnikkaasta.



<u>A)</u> $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

---

17) The numerator and the denominator of a fraction are negative numbers, and the numerator is larger by one than the denominator. Which of the following is true about the fraction?

Olkoon n > 0. Silloin puheena oleva murtoluku on muotoa $\frac{-n}{-n-1} = \frac{n}{n+1}$, *joka täyttää ehdon*

$0 < \frac{n}{n+1} < 1$

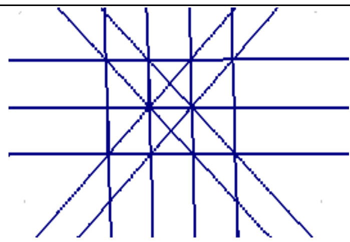
A) The fraction is a number less than -1.
B) The fraction is a number between -1 and 0.
<u>C) The fraction is a positive number less than 1.</u>
D) The fraction is a number greater than 1.
E) It cannot be determined whether the fraction is positive or negative.

18) Suppose $x^2yz^3 = 7^3$ and $xy^2 = 7^9$. Then $xyz =$

$x^2yz^3 \cdot xy^2 = 7^3 \cdot 7^9$, joten $x^3y^3z^3 = 7^{12}$ ja edelleen $(xyz)^3 = (7^4)^3$. Siis $xyz = 7^4$

A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

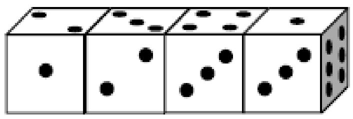
19) Three points are selected at random from the grid (see the fig.). What is the probability that they are collinear?



Kolme pistettä voidaan valita 12 pisteestä $\binom{12}{3} = 220$ *eri tavalla.*
Täsmälleen kolme pistettä sisältäviä suoria 4 pystysuoraa, 3 vaakasuoraa ja 4 vinoa. Kolmella vaakasuoralla suoralla on kullakin neljä pistettä. Kolme pistettä voidaan valita neljästä $\binom{4}{3} = 4$ *eri tavalla. Suotuisia tapoja on siis* $4 + 4 + 3 \cdot 4 = 20$ *ja todennäköisyys valita kolme pistettä niin, että ne ovat samalla suoralla on* $\frac{20}{220} = \frac{1}{11}$

A) $\frac{1}{12}$ **B) $\frac{1}{11}$** C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20) Four identical dice are arranged in a row (see the fig.). Each dice has faces with 1, 2, 3, 4, 5 and 6 points, but the dice are not standard, i. e. the sum of the points on the opposite faces of the dice does not necessarily equal 7. What is the total sum of the points in all 6 touching faces of the dice?



Vierekkäisten noppien toisiaan koskettavien tahkojen silmälukujen summa vasemmalta oikealle on $(5 + 1) + (4 + 6) + (2 + 2) = 20$

A) 19 **B) 20** C) 21 D) 22 E) 23

5 points

21) The lengths of the edges of a block (rectangular parallelepiped) in centimetres are integers and they form a geometric sequence with quotient q = 2. Which of the following can be the volume of this solid?

Tilavuus on $V = x \cdot 2x \cdot 4x = 8x^3$. *Koska x on kokonaisluku, myös* $V/8$ *on kokonaisluku. Vastausvaihtoehdoista vain 120 ja 216 ovat jaollisia 8:lla. 120 ei käy, koska osamäärän pitää olla kokonaisluvun kuutio.*

A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 **C) 216 cm^3** D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

---

22) In the figure each asterisk stands for one digit. The sum of the digits of the product is equal to

$$\begin{array}{rrrrr} & & * & * & * \\ \times & & 1 & * & * \\ \hline & 2 & 2 & * & * \\ + & 9 & 0 & * & \\ * & * & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & * & * & * \end{array}$$

Päättelemällä ja kokeilemalla saadaan kertolaskuksi

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4 & 5 & 2 \\ \cdot & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & 9 & 0 & 4 & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

joten tulon numeroiden summa on $5 + 6 + 5 = 16$

A) 16 B) 20 C) 26 D) 30 E) Another answer

---

23) Find the value of the expression $x^2 + y^2 + z^2$, if $x + y + z = 1$ and $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 0$, *joten* $xy + yz + xz = 0$.

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 1$, *joten*

$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(xy + yz + xz) = 1 - 0 = 1$

A) 0 **B) 1** C) 2 D) 3
E) It is impossible to determine.

24) The first element of a sequence is $a_1 = 0$, and if $n \geq 1$ then $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$. If $a_k = 2008$ then the value of k is

$a_1 = 0,\quad a_2 = 0 + (-1)^1 \cdot 1 = -1,\quad a_3 = -1 + (-1)^2 \cdot 2 = 1,\quad a_4 = 1 + (-1)^3 \cdot 3 = -2$

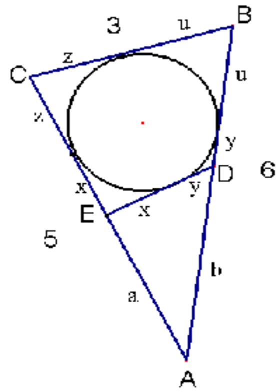
$a_5 = -2 + 4 = 2,\quad a_6 = 2 - 5 = -3,\quad a_7 = -3 + 6 = 3$ *jne. Siis* $a_k = \dfrac{k-1}{2}$, *kun k on pariton.*

Saadaan yhtälö $2008 = \dfrac{k-1}{2}$, *josta* $k = 2 \cdot 2008 + 1 = 4017$

A) 2008 B) 2009 **<u>C) 4017</u>** D) 4018 E) Other

---

25) A circle is inscribed in the triangle ABC, as in the figure on the right, and |AC| = 5, |AB| = 6, |BC| = 3. The segment ED is tangent to the circle. The perimeter of the triangle ADE is



Kolmion sivuista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} z + u = 3 \\ a + x + z = 5 \\ b + y + u = 6 \end{cases}$$ *Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen*

saadaan

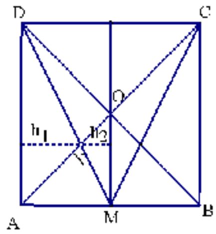
$a + b + 2z + 2u + x + y = 14$, *joten kolmion ADE piiri*

$a + b + x + y = 14 - 2(z + u) = 14 - 2 \cdot 3 = 8$

A) 7 B) 4 C) 9 D) 6 **<u>E) 8</u>**

---

26) The square ABCD has a side of length 1 and M is the midpoint of AB. The area of the shaded region is



Kolmiot AND ja ONM ovat yhdenmuotoiset (kk) ja niiden mittakaava on 2:1

$\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{2}{1}$, *josta* $h_1 = 2h_2$. *Toisaalta* $h_1 + h_2 = \dfrac{1}{2}$, *joten* $2h_1 + h_1 = \dfrac{1}{2}$ *ja*

edelleen $h_2 = \dfrac{1}{6}$. *Varjostettu alue on*

$$2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{12}$$

A) $\dfrac{1}{24}$ B) $\dfrac{1}{16}$ C) $\dfrac{1}{8}$ **<u>D)</u>** $\dfrac{1}{12}$ E) $\dfrac{2}{13}$

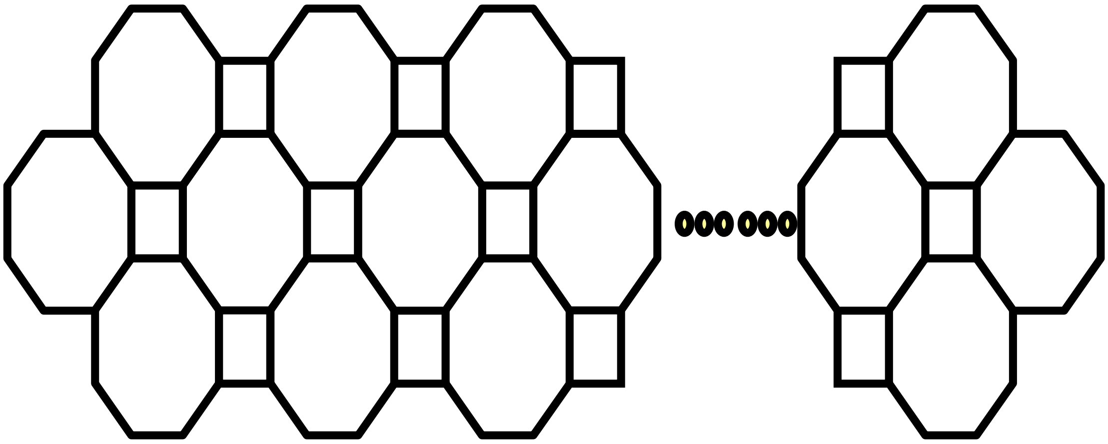
27) How many prime numbers p have the property that $p^4 + 1$ is prime as well? Note: Number 1 is not a prime!

Pienin alkuluku on 2 ja $2^4 + 1 = 17$ *, joka on alkuluku. Kaikki muut alkuluvut* p *ovat parittomia, joten* p^4 *on pariton. Silloin* $p^4 + 1$ *on parillinen eikä siten ole alkuluku.*

A) None **B) 1** C) 2 D) 3 E) Infinitely many

---

28) We used metal rods to build this nice ensemble. We know there are 61 octagons, how many rods are there?



Rakennelman aloitusyksikkö koostuu neljästä 8-kulmiosta ja niiden keskellä olevasta suorakulmiosta. Aloitusyksikön perään liittyy jaksoja, jotka kukin koostuvat kolmesta 8-kulmiosta ja kolmesta suorakulmiosta. Aloitusyksikön perässä olevia 8-kulmioita on $61 - 4 = 57$ *kpl, joten jaksoja on* $\frac{57}{3} = 19$ *kpl. Aloitusyksikössä on* $4 \cdot 8 - 4 = 28$ *sauvaa ja jaksossa* $3 \cdot 8 - 4 + 2 = 22$ *sauvaa. Yhteensä* $28 + 19 \cdot 22 = 446$ *sauvaa.*

A) 488 B) 400 C) 328 D) 244 **E) 446**

---

29) The number $3^{32} - 1$ has exactly two divisors which are larger than 75 and smaller than 85. What is the product of these two divisors?

$3^{32} - 1 = (3^{16} - 1)(3^{16} + 1) = (3^8 - 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) = (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)$
$= 80 \cdot 82 \cdot (3^8 + 1)(3^{16} + 1)$ *. Tekijät 80 ja 82 ovat välillä* $]75, 85[$ *ja niiden tulo on* $80 \cdot 82 = 6560$

A) 5852 **B) 6560** C) 6804 D) 6888 E) 6972

---

30) If $\sin x + \cos x = m$, then $\sin^4 x + \cos^4 x =$

Koska vain yksi vaihtoehto on oikein, kokeillaan sijoittamalla jokin kulman arvo. Yhtälön tulee toteutua kulman arvosta riippumatta.

Jos x = 0, $\sin 0 + \cos 0 = 1 = m$ *ja* $\sin^4 0 + \cos^4 0 = 1$.

Vastausvaihtoehto A: $1 - \frac{\left(1-1^2\right)^2}{2} = 1$ *eli se kelpaa. Selvästikin myös vastausvaihtoehdot B ja D kelpaavat tässä tapauksessa, mutta muut eivät. Riittää siis tutkia vain vaihtoehtoja A, B ja D.*

Valitaan nyt kulmaksi $\frac{\pi}{4}$. $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = m$ *ja*

$\sin^4\frac{\pi}{4} + \cos^4\frac{\pi}{4} = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}$. *Vastausvaihtoehto A*: $1 - \frac{\left(1-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *eli se kelpaa. Vaihtoehto B ei kelpaa, koska sen arvo on* $1 + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$. *Vaihtoehto D ei kelpaa, koska sen arvo on* $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 4 \neq \frac{1}{2}$. *Siis vain vaihtoehto A kelpaa, kun kulmana on* $\frac{\pi}{4}$*, joten A on oikea vaihtoehto.*

Tehtävän voi ratkaista myös kehittämällä lausekkeen $m^4 = \left(\sin x + \cos x\right)^4 = \ldots$ *mutta se johtaa pitkiin hankaliin lausekkeisiin. Kilpailutehtävä lienee ajateltu ratkaistavaksi tähän tyyliin käyttäen annettuja ratkaisuja ja päättelemällä.*

A) $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ D) m^4 E) $m^4 + 1$